DOI: 10.37863/umzh.v73i1.1115

УДК 512.542

В. С. Монахов, М. М. Коновалова (Гомел. держ. ун-т ім. Ф. Скорини, Білорусь)

ПРО ГРУПИ З ФОРМАЦІЙНО СУБНОРМАЛЬНИМИ СТРОГО 2-МАКСИМАЛЬНИМИ ПІДГРУПАМИ

Let H be a subgroup of a finite group G. If G contains a maximal subgroup M such that H is a maximal subgroup in M, then H is called a 2-maximal subgroup of G. A subgroup U of G is said to be a strictly 2-maximal subgroup in G if U is a 2-maximal subgroup of G and U is not a 2-maximal subgroup in any proper subgroup of G. We investigate the finite groups with $\mathfrak{X}$-subnormal strictly 2-maximal subgroups for arbitrary subgroup-closed formation $\mathfrak{X}$. In such a group, any proper subgroup has a nilpotent $\mathfrak{X}$-residual. We study in more detail the case where $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{F}$ for a subgroup-closed formation $\mathfrak{F}$ and the case where $\mathfrak{X}$ is a soluble saturated formation.

Нехай H — підгрупа скінченної групи G. Якщо існує максимальна в G підгрупа M така, що H є максимальною підгрупою в M, то H називається 2-максимальною підгрупою групи G. Підгрупу U групи G називають строго 2-максимальною підгрупою в G, якщо U є 2-максимальною підгрупою в G і U не є 2-максимальною підгрупою в жодній власній підгрупі групи G. Досліджуються скінченні групи з $\mathfrak{X}$-субнормальними строго 2-максимальними підгрупами для довільної спадкової формації $\mathfrak{X}$. У такій групі всі власні підгрупи мають нільпотентні $\mathfrak{X}$-корадикали. Більш детально вивчено випадки, коли $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{F}$ для деякої спадкової формації $\mathfrak{F}$ або коли $\mathfrak{X}$ — розв'язна насичена формація.

1. Вступ. Усі групи, що розглядаються, вважаємо скінченними. Термінологія, що використовується, відповідає [1, 2]. Запис $M < G$ ($M \lessdot G$) означає, що M — власна (максимальна) підгрупа групи G.

Нехай H — підгрупа групи G. Якщо існує максимальна в групі G підгрупа M така, що H є максимальною підгрупою в M, то H називається 2-максимальною підгрупою групи G. Нехай n — натуральне число. Якщо існує ланцюжок підгруп

$$H = H_0 \lessdot H_1 \lessdot \ldots \lessdot H_{n-1} \lessdot H_n = G, \tag{1}$$

то підгрупа H називається n-максимальною підгрупою групи G.

У знакозмінній групі A_4 степеня 4 одинична підгрупа 1 є 2-максимальною підгрупою в ланцюжку підгруп $1 \lessdot Z_3 \lessdot A_4$ і 3-максимальною підгрупою в ланцюжку $1 \lessdot Z_2 \lessdot E_4 \lessdot A_4$. Тут Z_m і E_4 — циклічна й елементарна абелева підгрупи порядку $m \in \{2, 3\}$ і 4 відповідно. Для будь-якого натурального числа $n \geq 3$ існує група, в якій деяка 2-максимальна підгрупа є n-максимальною підгрупою [3] (приклад 3).

Підгрупу U групи G називають строго 2-максимальною підгрупою в G, якщо U є 2-максимальною підгрупою в G і U не є 2-максимальною підгрупою в жодній власній підгрупі групи G. Іншими словами, строго 2-максимальна підгрупа — це така підгрупа групи G, яка є 2-максимальною у будь-якому ланцюжку підгруп групи G. Аналогічно визначається строго n-максимальна підгрупа [4].

У надрозв'язній групі кожна 2-максимальна підгрупа є строго 2-максимальною. Це випливає з класичної теореми Хупперта: *група надрозв'язна тоді і тільки тоді, коли кожна її максимальна підгрупа має простий індекс* [5] (теорема 6). У не надрозв'язній групі A_4 всі підгрупи порядку 2 строго 2-максимальні, а одинична підгрупа 2-максимальна, але не є строго 2-максимальною підгрупою. У групі S_4 підгрупи порядку 3 і 4 строго 2-максимальні, а підгрупа порядку 2 з S_3 є 2-максимальною підгрупою в S_4, але не є строго 2-максимальною підгрупою в S_4. Тут A_n і S_n — знакозмінна і симетрична групи степеня n відповідно.

Групи з обмеженнями на 2-максимальні підгрупи досліджувались у багатьох роботах (див., наприклад, [3 – 8]). Зокрема, відомо, що у групі, в якій кожна 2-максимальна підгрупа субнормальна, всі власні підгрупи нільпотентні [6].

Формаційним узагальненням субнормальності є поняття $\mathfrak{F}$-субнормальності. Нехай $\mathfrak{F}$ — формація, G — група. Підгрупа H групи G називається $\mathfrak{F}$-субнормальною в G, якщо або $H = G$, або існує ланцюжок підгруп (1) такий, що $H_i/(H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{F}$ для всіх i. Тут $Y_X = \bigcap_{x \in X} Y^x$ — ядро підгрупи Y у групі X. У випадку, коли H — максимальна підгрупа і $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, говорять, що H $\mathfrak{F}$-нормальна в G.

Введемо такі позначення: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{U}$ і $\mathfrak{S}$ — формації всіх абелевих, нільпотентних, надрозв'язних і розв'язних груп відповідно; $\mathcal{A}$ — формація всіх розв'язних груп з абелевими силовськими підгрупами; $\mathfrak{A}_1$ — формація всіх абелевих груп з елементарними абелевими силовськими підгрупами; w$\mathfrak{U}$ — формація всіх груп з $\mathfrak{U}$-субнормальними силовськими підгрупами; v$\mathfrak{U}$ — формація всіх груп, у яких кожна примарна циклічна підгрупа $\mathfrak{U}$-субнормальна. Формації w$\mathfrak{U}$ і v$\mathfrak{U}$ детально вивчені у роботах [3, 9 – 11].

У розв'язній групі будь-яка субнормальна підгрупа $\mathfrak{A}_1$-субнормальна [9]. Оскільки при $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$ будь-яка $\mathfrak{X}$-субнормальна підгрупа буде $\mathfrak{Y}$-субнормальною, то у розв'язній групі кожна субнормальна підгрупа $\mathfrak{F}$-субнормальна для будь-якої формації $\mathfrak{F}$, що містить $\mathfrak{A}_1$. Навпаки, субнормальність підгрупи у розв'язній групі випливає з її $\mathfrak{F}$-субнормальності при $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$. Далі, у розв'язній групі $\mathfrak{U}$-субнормальність підгрупи H рівносильна існуванню ланцюжка підгруп (1), у якому всі індекси $|H_{i1} : H_i|$ — прості числа [9]. У роботах [3 – 7] вивчено групи з $\mathfrak{U}$-субнормальними 2-максимальними підгрупами. Для довільних розв'язних спадкових формацій $\mathfrak{F}$ групи з $\mathfrak{F}$-субнормальними 2-максимальними підгрупами вивчались у статті [8].

У цій статті умова $\mathfrak{F}$-субнормальності накладається не на всі 2-максимальні підгрупи, а лише на строго 2-максимальні. Для довільної спадкової формації $\mathfrak{F}$ в теоремі 1 встановлено, що в групі G з $\mathfrak{F}$-субнормальними строго 2-максимальними підгрупами всі власні підгрупи мають нільпотентні $\mathfrak{F}$-корадикали. Звідси випливає, що $G \in \mathfrak{N}\mathcal{A}$ при $\mathfrak{F} = \mathcal{A}$ і $|\pi(G)| > 2$ (наслідок 1). У теоремі 2 стверджується, що $\mathfrak{A}_1\mathfrak{F}$-субнормальність строго 2-максимальних підгруп у розв'язній групі G рівносильна тому, що всі власні підгрупи мають нільпотентні $\mathfrak{F}$-корадикали і $\Phi(G^{\mathfrak{F}}) = 1$. Звідси випливає нільпотентність комутанта групи G при $\mathfrak{A}_1\mathfrak{F} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}$ і $|\pi(G)| > 3$, а також при $\mathfrak{A}_1\mathfrak{F} = \mathfrak{A}_1\mathcal{A}$ і $|\pi(G)| > 2$ (наслідки 3 і 4). Вибір формації $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}$ пов'язаний з тим, що вона міститься у багатьох формаціях розв'язних груп і при $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$ будь-яка $\mathfrak{X}$-субнормальна підгрупа буде $\mathfrak{Y}$-субнормальною. Тому з теореми 2 можна виводити інформацію про групи з $\mathfrak{X}$-субнормальними строго 2-максимальними підгрупами для конкретних спадкових розв'язних формацій $\mathfrak{X}$. Теорема 3 і її наслідки встановлюють критерії $\mathfrak{F}$-субнормальності строго 2-максимальних підгруп для багатьох насичених спадкових формацій, у тому числі для $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{U}$, w$\mathfrak{U}$ і v$\mathfrak{U}$.

2. Властивості строго 2-максимальних підгруп.

Лема 1. *Якщо H — 2-максимальна підгрупа групи G, $H \lessdot M \lessdot G$, а індекси $|G : M|$ і $|M : H|$ — прості числа, то H є строго 2-максимальною підгрупою групи G. Зокрема, в надрозв'язній групі всі 2-максимальні підгрупи строго 2-максимальні.*

Доведення. Нехай H — 2-максимальна підгрупа групи G, $H \lessdot M \lessdot G$, й індекси $|G:M|$ і $|M:H|$ — прості числа. Припустимо, що H не є строго 2-максимальною підгрупою групи G. За означенням існує підгрупа K в групі G така, що $H < K < G$ і H 2-максимальна в K. Тому існує підгрупа L така, що $H \lessdot L \lessdot K < G$. За лемою про індекси

$$|G:H| = |G:K||K:L||L:H|, \ |G:K| \neq 1, \ |K:L| \neq 1, \ |L:H| \neq 1,$$

тому $|G:H|$ ділиться на три простих числа, суперечність. Отже, припущення є хибним і H — строго 2-максимальна підгрупа групи G.

Нехай $H \lessdot M \lessdot G$ і G — надрозв'язна група. За теоремою Хупперта [5] (теорема 6) індекс $|G:H|$ ділиться точно на два простих числа, необов'язково різних. Якщо $H < X \lessdot G$, то $|X:H|$ — просте число і H — максимальна підгрупа у X. Оскільки X — довільна максимальна підгрупа групи G, що містить H, то H є строго 2-максимальною підгрупою групи G.

Лема 2. *Нехай H — (строго) 2-максимальна підгрупа групи G. Тоді справедливі такі твердження*:

(1) *H^x — (строго) 2-максимальна підгрупа групи G для будь-якого $x \in G$*;

(2) *якщо N — нормальна в G підгрупа і $N \leq H$, то H/N — (строго) 2-максимальна підгрупа групи G/N*;

(3) *якщо N — абелева мінімальна нормальна в G підгрупа, що не міститься в H, то HN — максимальна підгрупа групи G.*

Доведення. Твердження 1 і 2 доводяться простою перевіркою. Доведемо твердження 3. Нехай N — абелева мінімальна нормальна в G підгрупа, що не міститься в H, і $H \lessdot M \lessdot G$. Якщо $HN = G$, то H — максимальна в G підгрупа, суперечність. Тому $HN < G$. Якщо $N \leq M$, то $HN = M$ — максимальна підгрупа групи G. Припустимо, що N не міститься в M. Тоді

$$G = MN, \quad M \cap N = H \cap N = 1.$$

Нехай $HN \leq V \lessdot G$. За тотожністю Дедекінда $V = (V \cap M)N$. Оскільки

$$H \leq V \cap M \leq M, \quad H \lessdot M,$$

то або $V \cap M = M$, або $H = V \cap M$. Якщо $V \cap M = M$, то $M \leq V$ і $G = MN \leq V$, що неможливо. Тому $H = V \cap M$ і $V = (V \cap M)N = HN$ — максимальна підгрупа групи G.

Лема 3. *Нехай H — 2-максимальна підгрупа групи G, $H \lessdot M \lessdot G$. Якщо H не є строго 2-максимальною підгрупою групи G, то існує строго 2-максимальна підгрупа U групи G, $U \lessdot W \lessdot G$, така, що $H = M \cap U = M \cap W$.*

Доведення. Оскільки 2-максимальна підгрупа H за умовою не є строго 2-максимальною підгрупою групи G, то існує власна підгрупа V групи G, в якій H є 2-максимальною. Тому існує ланцюжок підгруп

$$H = V_0 \lessdot V_1 \lessdot V_2 = V \leq \ldots \leq V_t = W \lessdot G, \quad t \geq 2, \qquad V_i \lessdot V_{i+1} \ \text{ для будь-якого } \ i. \quad (2)$$

Серед усіх таких ланцюжків виберемо ланцюжок найбільшої довжини. Нехай (2) — ланцюжок максимальної довжини і U — максимальна в W підгрупа, що містить V при $V \neq W$ і $U = V_1$ при $V = W$. Підгрупа U 2-максимальна в G. Якщо U не є строго 2-максимальною в G, то можна побудувати новий ланцюжок більшої довжини, ніж довжина (2), суперечність. Отже, U — строго 2-максимальна підгрупа групи G. Крім того,

$$H \leq M \cap U \leq M \cap W \leq M.$$

Оскільки M не міститься в W, то $M \cap W < M$. Оскільки H максимальна в M, то $H = M \cap U = M \cap W$.

Нам знадобляться наступні загальні властивості $\mathfrak{F}$-субнормальних підгруп.

Лема 4. *Нехай $\mathfrak{F}$ — спадкова формація, H і K — підгрупи групи G, N — нормальна в G підгрупа. Тоді справедливі такі твердження*:

(1) *якщо K $\mathfrak{F}$-субнормальна в H, а H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G* [12] (6.1.6 (1));

(2) *якщо H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то $H \cap K$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в K* [12] (6.1.7 (2));

(3) *якщо $H \leq K \leq G \in \mathfrak{F}$, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна в K* [12] (6.1.7 (1)).

Лема 5 ([8], лема 9)**.** 1. *Нехай $\mathfrak{F}$ — спадкова формація. Тоді і тільки тоді в групі G всі максимальні підгрупи $\mathfrak{A}_1\mathfrak{F}$-нормальні, коли $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$.*

2. *Якщо група $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$, то всі її власні підгрупи $\mathfrak{A}_1\mathfrak{F}$-субнормальні.*

Неодноразово будемо використовувати таку лему.

Лема 6 ([13], 24.2; 24.3)**.** *Якщо $\mathfrak{F}$ — насичена формація, G — розв'язна мінімальна не $\mathfrak{F}$-група, то справедливі такі твердження*:

(1) *$G^{\mathfrak{F}}$ є p-групою для деякого $p \in \pi(G)$*;

(2) *$G^{\mathfrak{F}}/\Phi(G^{\mathfrak{F}})$ — головний фактор групи G*;

(3) *$G^{\mathfrak{F}}\Phi(G) = F(G)$.*

Лема 7. *Якщо G — розв'язна мінімальна не метанільпотентна група, то $G/F(G)$ — група Шмідта.*

Доведення. Клас усіх метанільпотентних груп є насиченою спадковою формацією [13, с. 36] і збігається з добутком $\mathfrak{N}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^2$. Нехай спочатку $\Phi(G) = 1$. Згідно з лемою 6 (3) підгрупа $G^{\mathfrak{N}^2} = F(G)$. Оскільки $G^{\mathfrak{N}^2}$ — p-група для деякого $p \in \pi(G)$ за лемою 6 (1), то $F(G) = O_p(G)$. Оскільки $G \notin \mathfrak{N}^2$, то $G/F(G) \notin \mathfrak{N}$.

Нехай $U/F(G)$ — власна підгрупа в $G/F(G)$. Тоді U метанільпотентна і $U/F(U)$ нільпотентна. Оскільки G розв'язна, $O_p(G) = F(G) \leq U$, то

$$C_G(F(G)) = Z(F(G)), \qquad O_{p'}(U) = 1,$$

$$O_p(G) = F(G) \leq F(U) = O_p(U).$$

Нехай $H/F(G) = F(G/F(G))$. Тоді $H/F(G)$ є p'-підгрупою і

$$H \cap O_p(U) = O_p(G) = F(G).$$

Оскільки G/H нільпотентна, то $UH/H \simeq U/U \cap H$ і $U/O_p(U)$ нільпотентна. Тому

$$U/U \cap H \cap O_p(U) = U/F(G)$$

нільпотентна. Отже, всі власні в $G/F(G)$ підгрупи нільпотентні і $G/F(G)$ — група Шмідта.

Нехай $\Phi(G) \neq 1$. Згідно з лемою 6 (3) підгрупа $F(G) = G^{\mathfrak{N}^2}\Phi(G)$. Оскільки $\mathfrak{N}^2$ — насичена формація, то $G/\Phi(G) \notin \mathfrak{N}^2$ і $G/\Phi(G)$ — мінімальна не $\mathfrak{N}^2$-група. За умовою група G розв'язна, тому $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$ за [1] (4.21), і

$$G/F(G) \simeq (G/\Phi(G))/(F(G)/\Phi(G)) =$$

$$= (G/\Phi(G))/(F(G/\Phi(G)).$$

Оскільки $\Phi(G/\Phi(G)) = 1$, то за доведеним $(G/\Phi(G))/F(G/\Phi(G))$ — група Шмідта, а отже, $G/F(G)$ — група Шмідта.

Приклад. У простій групі $\mathrm{PSL}(2,5)$ усі власні підгрупи метанільпотентні та навіть метабелеві. Тому умова розв'язності групи в лемі 7 не є зайвою.

3. Випадок спадкової формації.

Лема 8. *Нехай $\mathfrak{F}$ — спадкова формація і у групі G всі максимальні підгрупи $\mathfrak{F}$-нормальні. Тоді $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Якщо $\mathfrak{F}$ насичена, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Доведення. Нехай у групі G всі максимальні підгрупи $\mathfrak{F}$-нормальні, тобто $G/M_G \in \mathfrak{F}$ для всіх $M \lessdot G$. Оскільки $\mathfrak{F}$ — формація, то

$$G/\bigcap_{M \lessdot G} M_G \in \mathfrak{F}.$$

Але $\bigcap_{M \lessdot G} M_G = \Phi(G)$, отже, $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Якщо $\mathfrak{F}$ насичена, то $G \in \mathfrak{F}$.

Лема 9. *Якщо $\mathfrak{X}$ — розв'язна спадкова формація і в групі G всі строго 2-максимальні підгрупи $\mathfrak{X}$-субнормальні, то G розв'язна.*

Доведення. При $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$ кожна $\mathfrak{X}$-субнормальна підгрупа є $\mathfrak{Y}$-субнормальною. Тому можна вважати, що $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$. Нехай $M \lessdot G$ і $H \lessdot M$. За лемою 3 існує строго 2-максимальна підгрупа U така, що $H = M \cap U$. За умовою U $\mathfrak{S}$-субнормальна в G. За лемою 4 (2) підгрупа H $\mathfrak{S}$-нормальна в M. Оскільки M і H довільні, то за лемою 8 усі максимальні підгрупи групи G розв'язні. Тому G — мінімальна нерозв'язна група і фактор-група $G/\Phi(G)$ — проста група. Якщо $\Phi(G) \neq 1$, то за індукцією $G/\Phi(G)$ розв'язна, а отже, G розв'язна. Таким чином, $\Phi(G) = 1$ і G — проста група. Нехай K — строго 2-максимальна підгрупа групи G. За умовою K $\mathfrak{S}$-субнормальна у G, отже, існує максимальна в G підгрупа L така, що $K \leq L$ і $G/L_G \in \mathfrak{S}$. Але $L_G = 1$, тому G розв'язна.

Теорема 1. *Нехай $\mathfrak{F}$ — спадкова формація і у групі G всі строго 2-максимальні підгрупи $\mathfrak{F}$-субнормальні. Тоді справедливі такі твердження*:

(1) *$M/\Phi(M) \in \mathfrak{F}$ для кожної максимальної підгрупи M групи G; зокрема, група $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$ або G є мінімальною не $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$-групою*;

(2) *якщо $\mathfrak{F}$ насичена, то всі власні підгрупи групи G належать $\mathfrak{F}$ і кожна 2-максимальна підгрупа групи G $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

Доведення. 1. Нехай M — максимальна підгрупа в G і H — максимальна підгрупа в M. Тоді H є 2-максимальною підгрупою групи G. Якщо H строго 2-максимальна, то за умовою H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Тепер H $\mathfrak{F}$-нормальна в M за лемою 4 (2). Якщо H не є строго 2-максимальною, то за лемою 3 існує строго 2-максимальна підгрупа U така, що $H = U \cap M$. За умовою U $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. За лемою 4 (2) підгрупа H $\mathfrak{F}$-нормальна в M. Таким чином, усі максимальні в M підгрупи $\mathfrak{F}$-нормальні. За лемою 8 фактор-група $M/\Phi(M) \in \mathfrak{F}$. Оскільки M — довільна максимальна підгрупа в G і формація $\mathfrak{F}$ спадкова, то $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$ або G є мінімальною не $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$-групою.

2. Якщо $\mathfrak{F}$ насичена, то всі власні підгрупи групи G належать $\mathfrak{F}$. Нехай H — довільна 2-максимальна в G підгрупа, $H \lessdot M \lessdot G$. Якщо H — строго 2-максимальна, то за умовою H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Нехай H — не строго 2-максимальна. За лемою 3 існує строго 2-максимальна

підгрупа U така, що $H = U \cap M$. За умовою U $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Оскільки $U \in \mathfrak{F}$, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна в U за лемою 4 (3). За лемою 4 (1) підгрупа H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Отже, у випадку, коли формація $\mathfrak{F}$ насичена, кожна 2-максимальна підгрупа $\mathfrak{F}$-субнормальна.

***Наслідок* 1.** *Нехай у групі G всі строго 2-максимальні підгрупи $\mathcal{A}$-субнормальні. Тоді $G \in \mathfrak{N}\mathcal{A}$ або група G має такі властивості*:

(1) $G = P \rtimes Q$;

(2) $P = G^{\mathfrak{N}\mathcal{A}}$ — *силовська p-підгрупа*;

(3) Q — *силовська q-підгрупа і $1 \neq Q' \leq C_G(\Phi(P))$*;

(4) Q_G — *силовська q-підгрупа в $\Phi(G)$ і Q/Q_G — мінімальна неабелева група.*

Зокрема, *якщо $|\pi(G)| > 2$, то $G \in \mathfrak{N}\mathcal{A}$.*

Доведення. Нехай $G \notin \mathfrak{N}\mathcal{A}$. За теоремою 1 (1) група G є мінімальною не $\mathfrak{N}\mathcal{A}$-групою. Згідно з лемою 5 [8] вона має властивості 1 – 4. Зокрема, якщо $|\pi(G)| > 2$, то $G \in \mathfrak{N}\mathcal{A}$.

Теорема 2. *Нехай $\mathfrak{F}$ — спадкова формація. Якщо у групі G всі строго 2-максимальні підгрупи $\mathfrak{A}_1\mathfrak{F}$-субнормальні*, *то кожна власна підгрупа має нільпотентний $\mathfrak{F}$-корадикал. Навпаки*, *якщо у розв'язній групі G кожна власна підгрупа має нільпотентний $\mathfrak{F}$-корадикал і $\Phi(G^{\mathfrak{A}_1\mathfrak{F}}) = 1$*, *то всі 2-максимальні підгрупи $\mathfrak{A}_1\mathfrak{F}$-субнормальні.*

Доведення. Нехай всі строго 2-максимальні підгрупи $\mathfrak{A}_1\mathfrak{F}$-субнормальні, M — максимальна підгрупа групи G, а H — максимальна підгрупа в M. Якщо H — строго 2-максимальна підгрупа групи G, то за умовою вона $\mathfrak{A}_1\mathfrak{F}$-субнормальна в G. За лемою 4 (2) підгрупа H $\mathfrak{A}_1\mathfrak{F}$-нормальна в M. Якщо H не є строго 2-максимальною, то за лемою 3 існує строго 2-максимальна підгрупа U така, що $H = U \cap M$. За умовою U $\mathfrak{A}_1\mathfrak{F}$-субнормальна в G. За лемою 4 (2) підгрупа H $\mathfrak{A}_1\mathfrak{F}$-нормальна в M. Таким чином, усі максимальні в M підгрупи $\mathfrak{A}_1\mathfrak{F}$-нормальні. За лемою 5 (1) підгрупа $M \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$. Оскільки M — довільна в G підгрупа, то або $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$, або G є мінімальною не $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$-групою. У будь-якому випадку всі власні в G підгрупи мають нільпотентні $\mathfrak{F}$-корадикали.

Обернене твердження можна отримати з теореми 2 роботи [8]. Ми наведемо тут безпосереднє доведення. Нехай G — розв'язна група, $\Phi(G^{\mathfrak{A}_1\mathfrak{F}}) = 1$ і всі власні підгрупи мають нільпотентні $\mathfrak{F}$-корадикали. Нехай H — довільна 2-максимальна підгрупа групи G. Якщо $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$, то за лемою 5 (2) підгрупа H $\mathfrak{A}_1\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Нехай тепер G не належить $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$. Тоді G є мінімальною не $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$-групою. За лемою 6 (1) підгрупа $P = G^{\mathfrak{N}\mathfrak{F}}$ є p-підгрупою для деякого $p \in \pi(G)$ і P — мінімальна нормальна в G підгрупа, оскільки

$$\Phi(P) = \Phi(G^{\mathfrak{N}\mathfrak{F}}) \leq \Phi(G^{\mathfrak{A}_1\mathfrak{F}}) = 1.$$

Якщо $HP = G$, то H — максимальна в G підгрупа, оскільки P — мінімальна нормальна підгрупа, суперечність. Отже, $HP < G$, $HP \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$ і H $\mathfrak{A}_1\mathfrak{F}$-субнормальна в HP за лемою 5 (2). Оскільки $HP/P < G/P \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$, то HP/P $\mathfrak{A}_1\mathfrak{F}$-субнормальна в G/P знову за лемою 5 (2). Тепер HP $\mathfrak{A}_1\mathfrak{F}$-субнормальна в G і H $\mathfrak{A}_1\mathfrak{F}$-субнормальна в G за лемою 4 (1).

***Наслідок* 2.** *Нехай $\mathfrak{F}$ — розв'язна спадкова формація. Якщо в групі G всі строго 2-максимальні підгрупи $\mathfrak{A}_1\mathfrak{F}$-субнормальні*, *то група G розв'язна і або $\mathfrak{F}$-корадикал групи G нільпотентний, або $G/F(G)$ є мінімальною не $\mathfrak{F}$-групою.*

Доведення. За лемою 9 група G розв'язна. Згідно з теоремою 2, всі власні підгрупи групи G мають нільпотентні $\mathfrak{F}$-корадикали. Якщо $\mathfrak{F}$-корадикал групи G не нільпотентний, то група G є мінімальною не $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$-групою і згідно з лемою 3 [8] фактор-група $G/F(G)$ буде мінімальною не $\mathfrak{F}$-групою.

***Наслідок* 3.** *Якщо в групі G всі строго 2-максимальні підгрупи $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}$-субнормальні і $|\pi(G)| > 3$, то комутант групи G нільпотентний.*

Доведення. Нехай комутант групи G не нільпотентний. Застосовуючи теорему 2 при $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}$, переконуємося, що G є мінімальною не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-групою. За лемою 9 група G розв'язна, а згідно з лемою 3 [8] фактор-група $G/F(G)$ є мінімальною не $\mathfrak{A}$-групою. Будова мінімальних неабелевих груп відома, зокрема їхній порядок ділиться не більш ніж на два різних простих числа, тому $|\pi(G/F(G))| \leq 2$. Підгрупа $F(G) = G^{\mathfrak{N}\mathfrak{A}}\Phi(G)$ за лемою 6 (3) і $|\pi(G^{\mathfrak{N}\mathfrak{A}})| = 1$ за лемою 6 (1). Оскільки $\pi(G/\Phi(G)) = \pi(G)$, то $|\pi(G)| \leq 3$, суперечність з умовою. Тому припущення є хибним і комутант групи G нільпотентний.

***Зауваження* 1.** Будову групи G з $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}$-субнормальними строго 2-максимальними підгрупами можна записати детальніше. Згідно з наслідками 2 і 3 вони або належать $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$, або $|\pi(G)| \leq 3$ і фактор-група по підгрупі Фіттінга є мінімальною неабелевою групою. Будова останніх є відомою (див., наприклад, [13], § 26).

***Наслідок* 4.** *Якщо у групі G всі строго 2-максимальні підгрупи $\mathfrak{A}_1\mathcal{A}$-субнормальні і $|\pi(G)| > 2$, то $G \in \mathfrak{N}\mathcal{A}$.*

Доведення. Нехай $G \notin \mathfrak{N}\mathcal{A}$. Застосовуючи теорему 2 при $\mathfrak{F} = \mathcal{A}$, переконуємося, що G є мінімальною не $\mathfrak{N}\mathcal{A}$-групою. За лемою 9 група G розв'язна, а згідно з лемою 5 [8] $|\pi(G)| = 2$, суперечність з умовою. Тому припущення є хибним і $G \in \mathfrak{N}\mathcal{A}$.

***Зауваження* 2.** Будову групи G з $\mathfrak{A}_1\mathcal{A}$-субнормальними строго 2-максимальними підгрупами можна записати детальніше. Згідно з наслідками 2 і 4 вони або належать $\mathfrak{N}\mathcal{A}$, або $|\pi(G)| \leq 2$ і фактор-група по підгрупі Фіттінга є мінімальною не $\mathcal{A}$-групою. Будова останніх є відомою (див. [8], лема 5). Ці властивості пераховано у наслідку 1.

4. Розв'язна і насичена формація.

Теорема 3. *Нехай $\mathfrak{H}$ — розв'язна спадкова насичена формація така, що в кожній розв'язній мінімальній не $\mathfrak{H}$-групі $\mathfrak{H}$-корадикал є силовською підгрупою. Тоді еквівалентні такі твердження*:

(1) *у групі G всі 2-максимальні підгрупи $\mathfrak{H}$-субнормальні*;

(2) *у групі G всі строго 2-максимальні підгрупи $\mathfrak{H}$-субнормальні*;

(3) *група G розв'язна*, $\Phi(G^{\mathfrak{H}}) = 1$ *і всі власні підгрупи з G належать $\mathfrak{H}$.*

Доведення. Очевидно, що з першого твердження випливає друге. Доведемо, що з другого твердження випливає третє. Нехай у групі G всі строго 2-максимальні підгрупи $\mathfrak{H}$-субнормальні. За лемою 9 група G розв'язна, а за теоремою 1 (2) всі власні в G підгрупи належать $\mathfrak{H}$. Якщо $G \in \mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{H}} = 1$, $\Phi(G^{\mathfrak{H}}) = 1$, тобто група G з пункту 3 теореми. Нехай G не належить $\mathfrak{H}$. За умовою $P = G^{\mathfrak{H}}$ є силовською p-підгрупою для деякого $p \in \pi(G)$. Нехай H — p'-холлова підгрупа в G. Припустимо, що $\Phi(P) \neq 1$. Тоді H — власна підгрупа у $\Phi(P)H$ і $\Phi(P)H$ — максимальна в G підгрупа. Це випливає з того, що $P/\Phi(P)$ — мінімальна нормальна у $G/\Phi(P)$ підгрупа за лемою 6 (2). Нехай K — максимальна в $\Phi(P)H$ підгрупа, що містить H. Тоді K — 2-максимальна в G підгрупа і за лемою 3 існує строго 2-максимальна підгрупа U така, що $K = U \cap \Phi(P)H$, тому $H \leq U$. За умовою U $\mathfrak{H}$-субнормальна в G. Тому існує максимальна в G підгрупа V така, що $H \leq U \leq V$ і $G/V_G \in \mathfrak{H}$. Тепер $P \leq V$ і $G = PH \leq V$, суперечність. Тому припущення є хибним і $\Phi(G^{\mathfrak{H}}) = 1$.

Тепер доведемо, що з третього твердження випливає перше. Нехай група G розв'язна, всі власні підгрупи з G належать $\mathfrak{H}$ і $\Phi(G^{\mathfrak{H}}) = 1$. Якщо $G \in \mathfrak{H}$, то всі її підгрупи $\mathfrak{H}$-субнормальні за лемою 4 (3). Нехай G не міститься в $\mathfrak{H}$, $P = G^{\mathfrak{H}}$. Згідно з лемою 6 (2) підгрупа P буде мінімальною нормальною в G підгрупою. Нехай H — довільна 2-максимальна в G підгрупа. Якщо $G = HP$, то H — максимальна в G підгрупа, суперечність. Отже, HP — власна в G підгрупа. Нехай $HP \leq M$, M — максимальна в G підгрупа. Підгрупа H $\mathfrak{H}$-субнормальна в M, оскільки $M \in \mathfrak{H}$. Оскільки $P \leq M$, то

$$P \in M_G, \qquad G/M_G \simeq (G/P)/(M_G/P) \in \mathfrak{H},$$

отже, M $\mathfrak{H}$-субнормальна в G. За лемою 4 (1) підгрупа H $\mathfrak{H}$-субнормальна в G.

Теорему доведено.

Розглянемо застосування теореми 3 до формацій $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{U}$, $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ і $\mathrm{v}\mathfrak{U}$. Зрозуміло, що

$$\mathfrak{N} \subset \mathfrak{U} \subset \mathrm{w}\mathfrak{U} \subset \mathrm{v}\mathfrak{U}.$$

Для кожної з цих формацій запишемо наслідки з теореми 3.

***Наслідок* 5** [14]**.** *Нехай G — не нільпотентна група. Тоді еквівалентні такі умови*:

(1) *кожна 2-максимальна підгрупа субнормальна в G*;

(2) *кожна строго 2-максимальна підгрупа субнормальна в G*;

(3) *G — група Шмідта з абелевими силовськими підгрупами.*

Доведення. Мінімальна не $\mathfrak{N}$-група є групою Шмідта і її $\mathfrak{N}$-корадикал збігається з нормальною силовською підгрупою [13] (§ 26). Для групи Шмідта G умова $\Phi(G^{\mathfrak{N}}) = 1$ рівносильна тому, що $G^{\mathfrak{N}}$ абелева [13] (§ 26). Крім того, у розв'язних групах $\mathfrak{N}$-субнормальність підгрупи H у групі G рівносильна [9] (лема 1.11) субнормальності H в G. Залишилося застосувати теорему 3 при $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$.

***Наслідок* 6.** *Нехай G — не надрозв'язна група. Тоді еквівалентні такі умови*:

(1) *кожна 2-максимальна підгрупа $\mathfrak{U}$-субнормальна в G*;

(2) *кожна строго 2-максимальна підгрупа $\mathfrak{U}$-субнормальна в G*;

(3) *G — мінімальна не надрозв'язна група і $\Phi(G^{\mathfrak{U}}) = 1$.*

Доведення. Мінімальна не надрозв'язна група розв'язна і її $\mathfrak{U}$-корадикал є нормальною силовською підгрупою [9] (лема 2.1). Залишилося застосувати теорему 3 при $\mathfrak{H} = \mathfrak{U}$.

***Наслідок* 7.** *Нехай група $G \notin \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Тоді еквівалентні такі умови*:

(1) *кожна 2-максимальна підгрупа $\mathrm{w}\mathfrak{U}$-субнормальна в G*;

(2) *кожна строго 2-максимальна підгрупа $\mathrm{w}\mathfrak{U}$-субнормальна в G*;

(3) *G — біпримарна мінімальна не надрозв'язна група і $\Phi(G^{\mathrm{w}\mathfrak{U}}) = 1$.*

Доведення. Клас $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ є насиченою спадковою формацією [10] (2.7). Мінімальна не $\mathrm{w}\mathfrak{U}$-група є біпримарною мінімальною не надрозв'язною групою [10] (2.9). Тому вона розв'язна і її $\mathrm{w}\mathfrak{U}$-корадикал є нормальною силовською підгрупою. Залишилося застосувати теорему 3 при $\mathfrak{H} = \mathrm{w}\mathfrak{U}$.

***Наслідок* 8.** *Нехай група $G \notin \mathrm{v}\mathfrak{U}$. Тоді еквівалентні такі умови*:

(1) *кожна 2-максимальна підгрупа $\mathrm{v}\mathfrak{U}$-субнормальна в G*;

(2) *кожна строго 2-максимальна підгрупа $\mathrm{v}\mathfrak{U}$-субнормальна в G*;

(3) *G — біпримарна мінімальна не надрозв'язна група, в якій не нормальна силовська підгрупа циклічна і $\Phi(G^{\mathrm{v}\mathfrak{U}}) = 1$.*

Доведення. Клас $\mathrm{v}\mathfrak{U}$ є спадковою насиченою формацією [3] (теорема B (2)). Мінімальна не $\mathrm{v}\mathfrak{U}$-група є біпримарною мінімальною не надрозв'язною групою, в якій не нормальна силовська підгрупа циклічна [3] (теорема B (4)). Тому вона розв'язна і її $\mathrm{v}\mathfrak{U}$-корадикал є нормальною силовською підгрупою. Залишилося застосувати теорему 3 при $\mathfrak{H} = \mathrm{v}\mathfrak{U}$.

***Наслідок* 9.** *Якщо в групі* G *всі строго 2-максимальні підгрупи* $\mathfrak{N}\mathcal{A}$*-субнормальні і* $|\pi(G)| > 2$, *то* $G \in \mathfrak{N}\mathcal{A}$.

Доведення. Формація $\mathfrak{N}\mathcal{A}$ розв'язна, насичена і згідно з лемою 5 [8] задовольняє умови теореми 3. За цією теоремою всі власні підгрупи групи G належать $\mathfrak{N}\mathcal{A}$. Якщо G є мінімальною не $\mathfrak{N}\mathcal{A}$-групою, то $|\pi(G)| = 2$ за лемою 5 [8], суперечність з умовою. Тому $G \in \mathfrak{N}\mathcal{A}$.

***Зауваження* 3.** Теорема 3 непридатна для формації $\mathfrak{F}$, у якої $\mathfrak{F}$-корадикал деякої мінімальної не $\mathfrak{F}$-групи не є силовською підгрупою. Прикладом такої формації є формація $\mathfrak{N}^2$ всіх метанільпотентних груп. Симетрична група S_4 степеня 4 є мінімальною не $\mathfrak{N}^2$-групою і $(S_4)^{\mathfrak{N}^2} \cong E_4$ не є силовською в S_4 підгрупою. Група S_4 також є мінімальною не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-групою і $(S_4)^{\mathfrak{N}\mathfrak{A}} \cong E_4$.

Теорема 4. *Нехай* $\mathfrak{H}$ — *розв'язна спадкова насичена формація*, G — *група і* $\Phi(G^{\mathfrak{H}}) = 1$. *Тоді еквівалентні такі твердження*:

(1) *у групі* G *всі 2-максимальні підгрупи* $\mathfrak{H}$*-субнормальні*;

(2) *у групі* G *всі строго 2-максимальні підгрупи* $\mathfrak{H}$*-субнормальні*;

(3) *група* G *розв'язна і всі власні підгрупи з* G *належать* $\mathfrak{H}$.

Доведення. Оскільки кожна строго 2-максимальна підгрупа є 2-максимальною, то з першого твердження випливає друге. Доведемо, що з другого твердження випливає третє. Нехай у групі G всі строго 2-максимальні підгрупи $\mathfrak{H}$-субнормальні. За лемою 9 група G розв'язна, а за теоремою 1 (2) всі власні в G підгрупи належать $\mathfrak{H}$.

Доведемо, що з третього твердження випливає перше. Нехай група G розв'язна, всі власні підгрупи з G належать $\mathfrak{H}$ і $\Phi(G^{\mathfrak{H}}) = 1$. Якщо $G \in \mathfrak{H}$, то всі її підгрупи $\mathfrak{H}$-субнормальні за лемою 4 (3). Нехай G не міститься в $\mathfrak{H}$ і $P = G^{\mathfrak{H}}$. Згідно з лемою 6 (2) підгрупа P є мінімальною нормальною підгрупою групи G. Нехай U — довільна 2-максимальна в G підгрупа. За лемою 2 (2), (3) або $P \le U$, або PU — максимальна в G підгрупа. У будь-якому випадку $PU \ne G$. Нехай $PU \le M$, M — максимальна в G підгрупа. Підгрупа U $\mathfrak{H}$-субнормальна в M за лемою 4 (3), оскільки $M \in \mathfrak{H}$. Оскільки $P \le M$, то $P \le M_G$ і

$$G/M_G \simeq (G/P)/(M_G/P) \in \mathfrak{H}.$$

Отже, M $\mathfrak{H}$-нормальна в G. За лемою 4 (1) підгрупа U $\mathfrak{H}$-субнормальна в G.

***Наслідок* 10.** *Нехай* G — *група і* $\Phi(G^{\mathfrak{N}^2}) = 1$. *Тоді еквівалентні такі твердження*:

(1) *у групі* G *всі 2-максимальні підгрупи* $\mathfrak{N}^2$*-субнормальні*;

(2) *у групі* G *всі строго 2-максимальні підгрупи* $\mathfrak{N}^2$*-субнормальні*;

(3) *група* G *розв'язна і або* G *метанільпотентна*, *або* $G/F(G)$ — *група Шмідта*.

Зокрема, *якщо* $|G/F(G)| > 2$, *то* G *метанільпотентна*.

Доведення. Достатньо застосувати теорему 4 при $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}^2$ і лему 7.

Література

1. В. С. Монахов, *Введение в теорию конечных групп и их классов*, Вышэйш. шк., Минск (2006).
2. K. Doerk, T. Hawkes, *Finite soluble groups*, Walter de Gruyter, Berlin, New York (1992).
3. V. S. Monakhov, V. N. Kniahina, *Finite groups with* $\mathbb{P}$*-subnormal subgroups*, Ric. Mat., **62**, № 1, 307 – 322 (2013).
4. M. Asaad, *Finite groups some of whose* n*-maximal subgroups are normal*, Acta Math. Hungar., **54**, № 1-2, 9 – 27 (1989).
5. B. Huppert, *Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen*, Math. Z., **60**, 409 – 434 (1954).

6. Ю. В. Луценко, А. Н. Скиба, *Конечные группы с субнормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами*, Мат. заметки, **91**, № 5, 730 – 740 (2012).
7. V. A. Kovaleva, A. N. Skiba, *Finite soluble groups with all n-maximal subgroups $\mathfrak{F}$-subnormal*, J. Group Theory, **17**, № 1, 273 – 290 (2014).
8. В. С. Монахов, *О группах с формационно субнормальными 2-максимальными подгруппами*, Мат. заметки, **105**, № 2, 69 – 277 (2019).
9. В. С. Монахов, *Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами*, Сиб. мат. журн., **57**, № 2, 447 – 462 (2016).
10. А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов, *О конечных группах сверхразрешимого типа*, Сиб. мат. журн., **51**, № 6, 1270 – 1281 (2010).
11. В. И. Мурашко, *Свойства класса конечных групп с $\mathbb{P}$-субнормальными циклическими примарными подгруппами*, Докл. НАН Беларуси, **58**, № 1, 5 – 8 (2014).
12. A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro, *Classes of finite groups*, Springer-Verlag, Dordrecht (2006).
13. Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Наука, Москва (1978).
14. Ю. В. Горбатова, М. Н. Коновалова, *Конечные группы с субнормальными строго 2-максимальными или строго 3-максимальными подгруппами*, Вестн. Омск. ун-та, **24**, № 3, 4 – 12 (2019).

Одержано 01.11.19