DOI: 10.37863/umzh.v72i5.1125

УДК 517.5

О. В. Коваленко (Дніпр. нац. ун-т ім. О. Гончара)

ПРО БАГАТОВИМІРНІ НЕРІВНОСТІ ТИПУ ОСТРОВСЬКОГО

Sharp Ostrowski type inequalities for multidimensional sets and functions of bounded variations are proved.

Доведено точні нерівності типу Островського для багатовимірних множин і функцій багатьох змінних з обмеженою варіацією.

1. Вступ. У 1937 р. А. Островський [1] довів таку нерівність.

Теорема А. *Нехай* $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ *є диференційовною на інтервалі* $(0,1)$ *функцією, яка має обмежену на цьому інтервалі похідну. Тоді для всіх* $x\in[0,1]$

$$\left|\int\limits_0^1 f(t)\,dt-f(x)\right|\le\left(\frac{1}{4}+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)\sup_{t\in(0,1)}|f'(t)|.$$

Нерівність є точною.

Нерівності, які оцінюють відхилення значення функції від її середнього значення за допомогою деякої характеристики функції, називають нерівностями типу Островського. Такі нерівності мають багато застосувань, зокрема в теорії наближень і чисельних методах, і активно досліджувались (див., наприклад, монографії [2–4]).

Позначимо через θ початок координат у $\mathbb{R}^d$, $d\in\mathbb{N}$, через B^d одиничну кулю в $\mathbb{R}^d$ з центром у точці θ, а через μ^d міру Лебега в $\mathbb{R}^d$.

В [5] дано означення варіацій $v_p(F)$ для компактних множин $F\subset\mathbb{R}^d$ і варіацій $v_p(f)$ неперервних функцій, $p\in[1,\infty]$. Ці означення базуються на означенні варіації Кронрода–Вітушкіна, яке у двовимірному випадку дав О. С. Кронрод [6] і яке було перенесено у простір $\mathbb{R}^d$, $d>2$, А. Г. Вітушкіним [7] (див. також [8]).

В [5] доведено такі нерівності типу Островського.

Теорема Б. *Нехай* $d\in\mathbb{N}$ *і задано неперервну функцію* $f\colon B^d\to\mathbb{R}$. *Тоді для всіх* $p\in[1,\infty]$

$$\left|\frac{1}{\mu^dB^d}\int\limits_{B^d}f(x)dx-f(\theta)\right|\le\frac{v_p(f)}{2}.$$

Нерівність є точною. Вона перетворюється на рівність лише у випадку сталої функції f.

Теорема В. *Нехай задано* $d\in\mathbb{N}$ *і замкнену множину* $F\subset B^d$. *Якщо* $\theta\notin F$, *то для всіх* $p\in[1,\infty]$

$$\mu^dF\le\frac{\mu^dB^d}{2}v_p(F).$$

Нерівність є точною. Якщо нерівність перетворилась на рівність, то $\mu^dF=0$.

© О. В. КОВАЛЕНКО, 2020

Для множини $A \subset \mathbb{R}^d$ через $\operatorname{int} A$ позначимо її внутрішність, а через $\mathcal{C}(A)$ — конус, породжений множиною A, тобто

$$\mathcal{C}(A) := \big\{\lambda \cdot a : \lambda \geq 0,\ a \in A\big\}.$$

Нехай S^{d-1} позначає одиничну сферу у просторі $\mathbb{R}^d$ і μ — сферична міра на ній. Метою даної статті є узагальнення теорем Б і В для більш загальних, ніж B^d, областей.

Означення 1. *Позначимо через $\mathfrak{A}$ сім'ю всіх компактних опуклих множин $A \subset \mathbb{R}^d$ таких, що $\theta \in \operatorname{int} A$ і для всіх $\lambda \in \left(0, \dfrac{\mu S^{d-1}}{2}\right]$ точна нижня грань*

$$C(A,\lambda) := \inf_{\substack{\Lambda \subset S^{d-1},\, \mu\Lambda = \lambda \\ \Lambda \cap (-\Lambda) = \varnothing}} \mu^d \left[\mathcal{C}(\Lambda) \cap A\right] \tag{1}$$

досягається на деякій множині $\Lambda(\lambda)$, для якої множина $\mathcal{C}(\Lambda(\lambda))$ є опуклою.

В теоремі 3 дається еквівалентне (та більш геометричне) означення множин із сім'ї $\mathfrak{A}$. Зазначимо, до сім'ї $\mathfrak{A}$, зокрема, належать кулі $B^d(x,r)$ із центром $x \in \mathbb{R}^d$ і радіусом $r > |x|$.

Основними результатами даної статті є такі узагальнення теорем Б і В.

Теорема 1. *Нехай $A \in \mathfrak{A}$ і задано неперервну функцію $f : A \to \mathbb{R}$. Тоді для всіх $p \in [1,\infty]$*

$$\left| \int\limits_A f(x)dx - \mu^d A f(\theta) \right| \leq C_p(A) v_p(f), \tag{2}$$

де

$$C_p(A) = \begin{cases} \sup_{\lambda \in [0,\mu S^{d-1}]} \dfrac{\mu^d A - C\left(A, \dfrac{\lambda}{2}\right)}{\left(\dfrac{(1-2^p)\lambda}{\mu S^{d-1}} + 2^p\right)^{\frac{1}{p}}}, & p < \infty, \\ \dfrac{\mu^d A}{2}, & p = \infty, \end{cases} \tag{3}$$

а $C(A,\lambda)$ означено в (1). *Нерівність є точною. Вона перетворюється на рівність лише у випадку сталої f.*

Теорема 2. *Нехай $A \in \mathfrak{A}$ і задано замкнену множину $F \subset A$. Якщо $\theta \notin F$, то для всіх $p \in [1,\infty]$*

$$\mu^d F \leq C_p(A) v_p(F).$$

Статтю побудовано таким чином. У пункті 2 наведено позначення, які будуть використовуватись у подальшому. В пункті 3 наведено означення варіацій v_p для компактних множин і неперервних функцій. Також уведено екстремальні для нерівностей типу Островського множини і функції. У пункті 4 досліджуються властивості множин сім'ї $\mathfrak{A}$. Пункт 5 містить доведення теорем 1 і 2, які є основними результатами даної статті.

2. Позначення. Скрізь далі d позначає натуральне число, $d \geq 2$. Для множини $F \subset \mathbb{R}^d$ через ∂F, $\mathrm{int} F$ і $\overline{F}$ позначаємо її границю, внутрішність і замикання відповідно.

Для $x, y \in \mathbb{R}^d$ через xy будемо позначати відрізок із кінцями в точках x і y, тобто $xy = \{(1-t)x + ty : t \in [0,1]\}$. Для $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^d$ і $F \subset \mathbb{R}^d$ покладемо $cF := \{cx : x \in F\}$ і $x + F := \{x + y : y \in F\}$.

Для $w \in \mathbb{R}^d$ через $|w|$ позначимо евклідову відстань від точки w до початку координат θ.

Для $\varepsilon > 0$ і $x \in \mathbb{R}^d$ покладемо $B^d(x, \varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^d : |x - y| \leq \varepsilon\}$, $B^d(\varepsilon) := B^d(\theta, \varepsilon)$ і $B^d := B^d(1)$. Через $S^{d-1}(x, \varepsilon)$, $S^{d-1}(\varepsilon)$ і S^{d-1} позначимо граничні сфери $B^d(x, \varepsilon)$, $B^d(\varepsilon)$ і B^d відповідно.

Для довільних $x \in S^{d-1}$ позначимо через $\Pi(x)$ гіперплощину, яка ортогональна $\overline{\theta x}$ і містить θ. Через $\Pi_+(x)$ $(\Pi_-(x))$ позначимо замкнений півпростір, породжений гіперплощиною $\Pi(x)$, що містить (відповідно не містить) x. Покладемо $S^{d-1}_{\pm}(x) := S^{d-1} \cap \Pi_{\pm}(x)$. Для точок $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x \neq y$, позначимо через $h(x, y)$ промінь з початком у точці x, що містить y.

Для опуклої компактної множини $A \subset \mathbb{R}^d$ такої, що $\theta \in \mathrm{int}\, A$, і довільного $x \in S^{d-1}$ покладемо $\rho_A(x) := \sup_{y \in A \cap h(\theta, x)} |y|$. Тоді функція ρ_A є неперервною.

Через $\mathbb{P}^{d-1}$ будемо позначати $(d-1)$-вимірний дійсний проективний простір, тобто множину всіх прямих в $\mathbb{R}^d$, які містять θ. Відстань між двома прямими $r_1, r_2 \in \mathbb{P}^{d-1}$, за означенням, дорівнює куту між r_1 і r_2. Мірою вимірної множини $A \subset \mathbb{P}^{d-1}$ є, за означенням, сферична міра множини $\bigcup\limits_{l \in A} l \cap S^{d-1}$; за цим означенням міри множин $\mathbb{P}^{d-1}$ і S^{d-1} є рівними.

Для кожного $r \in \mathbb{P}^{d-1}$ через $\Pi^{d-1}(r)$ позначаємо гіперплощину, що містить θ і є ортогональною до прямої r; $\Pi^{d-1}(r)$ розглядається як $(d-1)$-вимірний простір з $(d-1)$-вимірною мірою Лебега і евклідовою метрикою. Для кожного $\beta \in \Pi^{d-1}(r)$ через $l(r, \beta)$ будемо позначати пряму, що містить β і є паралельною до r.

Через μ^k, $k \in \mathbb{N}$, будемо позначати k-вимірну міру Лебега в $\mathbb{R}^k$, а через μ — сферичну міру на одиничній сфері S^{d-1} та міру у проективному просторі $\mathbb{P}^{d-1}$.

3. Варіація множин і функцій. У цьому пункті ми наведемо означення варіації для компактних множин і неперервних функцій зі статті [5]. В пп. 3.2 (див. лему 2) і 3.3 (див. лему 5) ми обчислимо варіації спеціальних множин і функцій, які будуть екстремальними у відповідних нерівностях типу Островського.

3.1. Означення.

Означення 2. *Позначимо через $N(F)$ число компонент зв'язності множини $F \subset \mathbb{R}^d$; 0 для порожньої множини і $+\infty$, якщо множина компонент зв'язності є нескінченною.*

Означення 3. *Для компактної множини $F \subset \mathbb{R}^d$ і прямої $r \in \mathbb{P}^{d-1}$ покладемо*

$$v(F, r) := \operatorname*{ess\,sup}_{\beta \in \Pi^{d-1}(r)} N\big(F \cap l(r, \beta)\big).$$

Варіація компактної множини означається таким чином.

Означення 4. *Для компактної множини $F \subset \mathbb{R}^d$ і $p \in [1, \infty]$ покладемо*

$$v_p(F) := \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\mu \mathbb{P}^{d-1}} \displaystyle\int_{\mathbb{P}^{d-1}} v^p(F, r)\, dr \right)^{\frac{1}{p}}, & p \in [1, \infty), \\ \operatorname{ess\,sup}_{r \in \mathbb{P}^{d-1}} v(F, r), & p = \infty. \end{cases}$$

Означення 5. *Нехай задано множину $E \subset \mathbb{R}^d$ і функцію $f\colon E \to \mathbb{R}$. Для $t \in \mathbb{R}$ множина*

$$L(f;t) := \{x \in E\colon f(x) = t\}$$

називається множиною рівня функції f.

Варіація неперервної функції означається таким чином.

Означення 6. *Нехай задано компактну множину $E \subset \mathbb{R}^d$, неперервну функцію $f\colon E \to \mathbb{R}$ і $p \in [1, \infty]$. Покладемо*

$$v_p(f) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} v_p(L(f;t))\,dt.$$

3.2. Варіація деяких множин.

Лема 1. *Нехай задано множину $X \subset S^{d-1}$ таку, що*

$$\mu X < \mu S^{d-1} \tag{4}$$

і множина $\mathcal{C}(X)$ є опуклою. Тоді існує така точка $x \in S^{d-1}$, що $X \subset S_+^{d-1}(x)$.

Доведення. З нерівності (4) випливає, що $\mathcal{C}(X) \neq \mathbb{R}^d$. Тому $\theta \notin \operatorname{int}\mathcal{C}(X)$ і, отже, $\theta \in \partial\mathcal{C}(X)$. Таким чином, з опуклості множини $\mathcal{C}(X)$ випливає існування опорної для $\mathcal{C}(X)$ гіперплощини, що містить θ. Ця гіперплощина породжує шукану півсферу.

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай задано опуклу компактну множину $A \subset \mathbb{R}^d$ таку, що $\theta \in \operatorname{int} A$. Нехай також $X \subset S^{d-1}$ з $\mu S^{d-1} > \mu X > 0$ така, що множина $\mathcal{C}(X)$ є опуклою. Тоді для всіх $p \in [1, \infty)$*

$$v_p\big(A \setminus \operatorname{int}\mathcal{C}(X)\big) = v_p(A \cap \partial\mathcal{C}(X)) = \left(\frac{(1-2^p)\mu X}{\mu S^{d-1}} + 2^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доведення. Достатньо довести, що

$$v\big(A \setminus \operatorname{int}\mathcal{C}(X), r\big) = v\big(A \cap \partial\mathcal{C}(X), r\big) = \begin{cases} 1, & r \cap \operatorname{int}\mathcal{C}(X) \neq \varnothing, \\ 2, & r \cap \overline{X} = \varnothing. \end{cases}$$

Дійсно, оскільки множина прямих $r \in \mathbb{P}^{d-1}$, які містять граничні точки X, має нульову міру через опуклість $\mathcal{C}(X)$, то

$$v_p(A \setminus \operatorname{int}\mathcal{C}(X)) = v_p(A \cap \partial\mathcal{C}(X)) =$$
$$= \left(\frac{1}{\mu S^{d-1}}\Big(1 \cdot \mu X + 2^p \cdot (\mu S^{d-1} - \mu X)\Big)\right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= \left(\frac{(1-2^p)\mu X}{\mu S^{d-1}} + 2^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Покладемо $Y := A \setminus \operatorname{int}\mathcal{C}(X)$. Спочатку доведемо твердження для варіації множини Y. Оскільки Y є різницею двох опуклих множин, то $N(Y \cap l(r,\beta)) \leq 2$ для всіх $r \in \mathbb{P}^{d-1}$ і $\beta \in \Pi^{d-1}(r)$. Оскільки $\mu^d Y > 0$, то $v(Y, r) \geq 1$ для всіх $r \in \mathbb{P}^{d-1}$.

З леми 1 випливає існування такої $x \in S^{d-1}$, що $X \subset S_+^{d-1}(x)$.

Нехай $r \in \mathbb{P}^{d-1}$ така, що $r \cap \overline{X} = \varnothing$, і $r \cap S^{d-1} = \{y_1, y_2\}$. Тоді $y_1, y_2 \notin \overline{X}$, а отже, існує таке $\varepsilon > 0$, що $X \cap B(y_i, \varepsilon) = \varnothing$, $i = 1, 2$. Оскільки $\mathcal{C}(X)$ — опукла множина з ненульовою мірою, то $\mathcal{C}(X) \cap B(\varepsilon)$ містить внутрішні точки множини $\mathcal{C}(X)$. Тому існує множина з додатною мірою точок $\beta \in \Pi^{d-1}(r)$ така, що $l(r, \beta) \cap \operatorname{int} \mathcal{C}(X) \neq \varnothing$ і $l(r, \beta) \cap B(y_i, \varepsilon) \neq \varnothing$, $i = 1, 2$. Тому $v(Y, r) \geq 2$ і, отже, $v(Y, r) = 2$.

Нехай $r \in \mathbb{P}^{d-1}$ така, що $r \cap \operatorname{int} \mathcal{C}(X) \neq \varnothing$ і $y = r \cap X$. Припустимо, що існує така множина $\beta \in \Pi^{d-1}(r)$, що $N(Y \cap l(r, \beta)) \geq 2$. Нехай $l(r, \beta) \cap \partial A = \{y_1, y_2\}$. Тоді $y_1, y_2 \in Y$. Виберемо деяку точку $z \in l(r, \beta) \cap \operatorname{int} \mathcal{C}(X)$ і розглянемо двовимірну площину Π^2, яка містить θ, y і z. Тоді $y_1, y_2 \in \Pi^2$. Крім того, промені $h(\theta, y)$ і $h(\theta, z)$ містяться у множині $\mathcal{C}(X)$ через її опуклість. Отже, весь кут, породжений променями $h(\theta, y)$ і $h(\theta, z)$, міститься у $\mathcal{C}(X)$. Але звідси випливає, що одна з точок y_1 або y_2 належить $\operatorname{int} \mathcal{C}(X)$. Прийшли до суперечності, а отже, $N(Y \cap l(r, \beta)) = 1$ для всіх $\beta \in \Pi^{d-1}(r)$. Тому $v(Y, r) = 1$.

Зазначимо, що $N(A \cap \partial \mathcal{C}(X) \cap l(r, \beta)) \leq 2$ для всіх $r \in \mathbb{P}^{d-1}$ і $\beta \in \Pi^{d-1}(r)$ через опуклість $\mathcal{C}(X)$. Крім того, $N(A \cap \partial \mathcal{C}(X) \cap l(r, \beta)) = 2$ тоді і тільки тоді, коли $N((A \setminus \operatorname{int} \mathcal{C}(X)) \cap l(r, \beta)) = 2$. Звідси випливає справедливість твердження щодо множини $A \cap \partial \mathcal{C}(X)$.

Лему 2 доведено.

3.3. Варіація деяких функцій.

Лема 3. *Нехай задано множину $X \subset S^{d-1}$ з $\mu S^{d-1} > \mu X > 0$ таку, що $\mathcal{C}(X)$ є опуклою. Припустимо, що $x \in \operatorname{int} \mathcal{C}(X)$. Тоді для всіх $y \in \mathcal{C}(X)$ пряма $l(y) := \{y + sx : s \in \mathbb{R}\}$ перетинає $\partial \mathcal{C}(X)$ рівно в одній точці.*

Доведення. З леми 1 випливає, що множина $\mathcal{C}(X)$ міститься в деякому півпросторі. Більше того, оскільки $x \in \operatorname{int} \mathcal{C}(X)$, то довільна пряма, паралельна вектору $\overline{\theta x}$, перетинає гіперплощину, що породжує цей півпростір. З цього випливає, що довільна пряма $l(y)$ перетинає $\partial \mathcal{C}(X)$ хоча б в одній точці.

Для завершення доведення леми достатньо показати, що довільна пряма $l(y)$, $y \in \mathcal{C}(X)$, містить промінь, який міститься в $\mathcal{C}(X)$.

Якщо $y \in h(\theta, x)$, то $l(y) \supset h(\theta, x)$ і $h(\theta, x) \subset \mathcal{C}(X)$.

З леми 1 випливає, що $y \notin -h(\theta, x)$. Розглянемо двовимірну площину Π^2, яка містить x, y і θ. Опукла множина $\mathcal{C}(X) \cap \Pi^2$ містить обидва промені $h(\theta, x)$ і $h(\theta, y)$, а тому містить весь кут, який породжується цими променями. Тому $\mathcal{C}(X) \supset h(y, y + x)$.

Лему 3 доведено.

Лема 4. *Нехай множина $X \subset S^{d-1}$ з $\mu S^{d-1} > \mu X > 0$ така, що $\mathcal{C}(X)$ є опуклою. Припустимо, що $x \in \operatorname{int} \mathcal{C}(X)$. Тоді існує така стала $C > 0$, що для всіх $s > 0$ і $y \in$ $\in -sx + \partial \mathcal{C}(X)$*

$$C \cdot s \leq \inf_{z \in \partial \mathcal{C}(X)} |y - z|. \tag{5}$$

Доведення. Нехай $y \in -sx + \partial \mathcal{C}(X)$. Тоді $z = y + sx \in \partial \mathcal{C}(X)$. Існує опорна для $\mathcal{C}(X)$ гіперплощина $\Pi = \Pi(z)$, що містить z. Більше того, $\theta \in \Pi$, оскільки всі точки променя $h(\theta, z)$ знаходяться по один бік від Π. Нехай $\varepsilon > 0$ таке, що $B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{C}(X)$. Тоді для кута $\alpha(z)$ між гіперплощиною Π і променем $h(\theta, x)$ маємо $\alpha(z) \geq \alpha$, де $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$ залежить від ε і не залежить від z. Тоді

$$\inf_{w\in\partial\mathcal{C}(X)}|y-w|\geq\inf_{w\in\Pi(z)}|y-w|=s|x|\sin\alpha(z)\geq s|x|\sin\alpha$$

і нерівність (5) виконується з $C=|x|\sin\alpha>0$.

Лему 4 доведено.

Лема 5. *Нехай виконуються умови леми* 2 *і точка* $x\in A\cap\operatorname{int}\mathcal{C}(X)$ *така, що* $-x\in\operatorname{int}A$. *Визначимо функцію* $f\colon A\to\mathbb{R}$ *за формулою*

$$f(t)=\begin{cases}0, & t\in\overline{\mathcal{C}(X)}\cap A,\\ s, & t\in[-sx+\partial\mathcal{C}(X)]\cap A, s\in(0,1),\\ 1, & t\in A\setminus[-x+\operatorname{int}\mathcal{C}(X)].\end{cases}$$

Тоді f *є неперервною і для всіх* $p\in[1,\infty)$

$$v_p(f)=\left(\frac{(1-2^p)\mu X}{\mu S^{d-1}}+2^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{6}$$

Доведення. З леми 4 випливає, що $\big[-s_1x+\partial\mathcal{C}(X)\big]\cap\big[-s_2x+\partial\mathcal{C}(X)\big]=\varnothing$ для $s_1\neq s_2$. Крім того, з леми 3 випливає, що $-x+\operatorname{int}\mathcal{C}(X)\supset\overline{\mathcal{C}(X)}$ і для всіх $y\in\big[-x+\operatorname{int}\mathcal{C}(X)\big]\setminus\overline{\mathcal{C}(X)}$ існує таке число $s\in(0,1)$, що $y\in-sx+\partial\mathcal{C}(X)$. Тому функція f коректно визначена. Крім того, якщо $y_1\in-s_1x+\partial\mathcal{C}(X)$ і $y_2\in-s_2x+\partial\mathcal{C}(X)$, $0\leq s_1<s_2\leq1$, то, згідно з лемою 4,

$$\big|f(y_1)-f(y_2)\big|=|s_1-s_2|\leq\frac{1}{C}\inf_{y\in-s_1x+\partial\mathcal{C}(X)}|y_2-y|\leq\frac{1}{C}|y_2-y_1|.$$

Тому функція f є неперервною.

З означення функції f випливає, що $0\leq f(y)\leq1$ для всіх $y\in A$. Для всіх $s\in(0,1)$ маємо $L(f,s)=\big[-sx+\partial\mathcal{C}(X)\big]\cap A$. З леми 2 випливає, що

$$v_p\big(L(f,s)\big)=\left(\frac{(1-2^p)\mu X}{\mu S^{d-1}}+2^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad s\in(0,1).$$

Дійсно, достатньо застосувати лему 2 до множин $sx+A$ і $\partial\mathcal{C}(X)$, а потім врахувати, що $v_p(F)=v_p(y+F)$ для довільної компактної множини F і $y\in\mathbb{R}^d$. Звідси випливає (6).

Лему 5 доведено.

4. Сім'я множин $\mathfrak{A}$. У цьому пункті ми доведемо еквівалентне означення сім'ї множин $\mathfrak{A}$. Доведення теореми наведено в пп. 4.3.

Теорема 3. *Компактна опукла множина* $A\subset\mathbb{R}^d$ *з* $\theta\in\operatorname{int}A$ *належить до сім'ї* $\mathfrak{A}$ *тоді і тільки тоді*, *коли виконуються такі умови*:

1) *існує така точка* $x\in S^{d-1}$, *що*

$$\rho_A(y)\leq\rho_A(-y)\quad\text{для всіх}\quad y\in S^{d-1}_+(x); \tag{7}$$

2) *для всіх* $r>0$ *множина* $\mathcal{C}\big(\{y\in S^{d-1}_+(x)\colon\rho_A(y)\leq r\}\big)$ *є опуклою.*

4.1. Допоміжні результати.

Лема 6. *Нехай* $x \in S^{d-1}$ *і* $X \subset S_+^{d-1}(x)$ *такі, що множина* $\mathcal{C}(X)$ *є опуклою. Припустимо, що* $y \in \Pi(x) \cap S^{d-1}$ *і* $\varepsilon > 0$ *такі, що*

$$\mu\big(X \cap B^d(y,\varepsilon)\big) = \mu\big(X \cap B^d(-y,\varepsilon)\big) = \mu\big(S_+^{d-1}(x) \cap B^d(y,\varepsilon)\big). \tag{8}$$

Тоді $\mu X = \dfrac{\mu S^{d-1}}{2}$.

Доведення. З (8) випливає, що $\mu^d(\mathcal{C}(X)) \neq 0$. Тому з опуклості $\mathcal{C}(X)$ випливає

$$\mu^d\big[\operatorname{int}\mathcal{C}(X) \cap B^d\big] = \mu^d\big[\mathcal{C}(X) \cap B^d\big] = \mu^d\big[\overline{\mathcal{C}(X)} \cap B^d\big].$$

Отже, достатньо довести, що $\overline{\mathcal{C}(X)} \cap S^{d-1} = S_+^{d-1}(x)$, оскільки для довільної вимірної множини $S \subset S^{d-1}$ маємо $\mu S = \dfrac{\mu S^{d-1}}{\mu^d B^d}\mu^d\left[\mathcal{C}(S) \cap B^d\right]$.

Для довільної точки $z \in \mathbb{R}^d$ позначимо через $l(z)$ пряму, що містить точку z і паралельна прямій, що проходить через точки y та $-y$. Тоді для кожної $z \in B^d(\varepsilon) \cap \Pi_+(x)$ пряма $l(z)$ перетинає обидві множини $S_+^{d-1}(x) \cap B^d(y,\varepsilon)$ і $S_+^{d-1}(x) \cap B^d(-y,\varepsilon)$.

Тому, згідно з (8), пряма $l(z)$ перетинає обидві множини $\overline{X} \cap B^d(y,\varepsilon)$ і $\overline{X} \cap B^d(-y,\varepsilon)$. З цього випливає, що $z \in \operatorname{conv}\overline{X}$, а отже, $z \in \operatorname{conv}\mathcal{C}(\overline{X}) = \overline{\mathcal{C}(X)}$. Із довільності точки z отримуємо $B^d(\varepsilon) \cap \Pi_+(x) \subset \overline{\mathcal{C}(X)}$ і, отже, $\overline{\mathcal{C}(X)} \cap B^d \supset S_+^{d-1}(x)$. З цього випливає, що $\overline{\mathcal{C}(X)} \cap S^{d-1} = S_+^{d-1}(x)$.

Лему 6 доведено.

4.2. Деякі властивості множин сім'ї $\mathfrak{A}$.

Лема 7. *Нехай* $A \in \mathfrak{A}$ *і* $x \in S^{d-1}$ *такі, що виконується умова* (7). *Тоді* $\rho_A(y) = \rho_A(-y)$ *для всіх* $y \in \Pi(x) \cap S^{d-1}$.

Доведення. Припустимо протилежне, тобто нехай $\rho_A(y) > \rho_A(-y)$ для деякої $y \in \Pi(x) \cap \cap S^{d-1}$. Тоді з неперервності функції ρ_A випливає існування такого $\delta > 0$, що $\rho_A(z) > \rho_A(-z)$ для всіх $z \in S^{d-1} \cap B^d(y,\delta)$, але це суперечить (7).

Лему 7 доведено.

Лема 8. *Нехай* $A \in \mathfrak{A}$. *Тоді існує така точка* $x \in S^{d-1}$, *що виконується умова* (7), *і для всіх* $y \in S_+^{d-1}(x) \setminus \Pi(x)$ *і* $z \in \Pi(x) \cap S_+^{d-1}(x)$ *маємо* $\rho_A(y) \le \rho_A(z)$.

Доведення. Для кожного $\dfrac{\mu S^{d-1}}{2} > \varepsilon > 0$ покладемо $\lambda_\varepsilon = \dfrac{\mu S^{d-1}}{2} - \varepsilon$ і розглянемо множину $\Lambda_\varepsilon = \Lambda(\lambda_\varepsilon)$ з означення сім'ї $\mathfrak{A}$. З леми 1 випливає, що для кожного такого ε існує така точка $x_\varepsilon \in S^{d-1}$, що $\Lambda_\varepsilon \subset S_+^{d-1}(x_\varepsilon)$. Переходячи до підпослідовності, якщо потрібно, ми можемо припустити, що $\lim_{\varepsilon\to+0} x_\varepsilon = x \in S^{d-1}$. Далі ми доведемо, що точка x задовольняє умови леми.

Спочатку доведемо, що виконується умова (7). Припустимо протилежне, тобто нехай $y \in \in S_+^{d-1}(x)$ така, що $\rho_A(y) > \rho_A(-y)$. Через неперервність ρ_A ми можемо вибрати таке $\delta > > 0$, що $\rho_A(z) > \rho_A(-z)$ для всіх $z \in S_+^{d-1}(x) \cap B^d(y,\delta)$. Число $\varepsilon > 0$ може бути вибране настільки малим, що $\mu\Lambda_\varepsilon \cap S_+^{d-1}(x) \cap B^d(y,\delta) > 0$. Але тоді міру μ^d множини $\mathcal{C}(\Lambda_\varepsilon) \cap A$ можна зробити меншою після заміни всіх точок $z \in \Lambda_\varepsilon \cap S_+^{d-1}(x) \cap B^d(y,\delta)$ точками $-z$. Прийшли до суперечності, отже, умова (7) виконується.

Тепер припустимо, що $y \in S_+^{d-1}(x) \setminus \Pi(x)$ і $z \in \Pi(x) \cap S_+^{d-1}(x)$ такі, що $\rho_A(y) > \rho_A(z)$. Тоді, згідно з лемою 7, $\rho_A(y) > \rho_A(-z)$. Існує таке $\delta > 0$, що для всіх $w \in S^{d-1} \cap B^d(y,\delta)$

і $t \in S^{d-1} \cap \big(B^d(z,\delta) \cup B^d(-z,\delta)\big)$ маємо $\rho_A(w) > \rho_A(t)$; крім того, δ може бути вибране настільки малим, що $S_+^{d-1}(x) \setminus \Pi(x) \supset S^{d-1} \cap B^d(y,\delta)$.

Ми можемо вибрати $\varepsilon > 0$ настільки малим, щоб виконувалися такі умови:

1) $S_+^{d-1}(x_\varepsilon) \supset S^{d-1} \cap B^d(y,\delta)$,

2) $\mu\left(\Lambda_\varepsilon \cap B^d(y,\delta)\right) > 0$,

3) множина $\Pi(x_\varepsilon) \cap S^{d-1}$ містить внутрішні точки $B^d(z,\delta)$.

З умови 2 випливає, що

$$\mu\big(\Lambda_\varepsilon \cap B^d(z,\delta)\big) = \mu\big(S_+^{d-1}(x_\varepsilon) \cap B^d(z,\delta)\big) \tag{9}$$

і

$$\mu\big(\Lambda_\varepsilon \cap B^d(-z,\delta)\big) = \mu\big(S_+^{d-1}(x_\varepsilon) \cap B^d(-z,\delta)\big). \tag{10}$$

Дійсно, у протилежному випадку міру μ^d множини $\mathcal{C}(\Lambda_\varepsilon) \cap A$ можна зробити меншою, замінивши точки з $\Lambda_\varepsilon \cap B^d(y,\delta)$ на точки з $S_+^{d-1}(x_\varepsilon) \cap B^d(z,\delta)$ і $S_+^{d-1}(x_\varepsilon) \cap B^d(-z,\delta)$.

Нехай $z_\varepsilon \in \Pi(x_\varepsilon) \cap S^{d-1}$ — внутрішня точка множини $B^d(z,\delta)$. Тоді $-z_\varepsilon \in \Pi(x_\varepsilon) \cap S^{d-1}$ є внутрішньою точкою $B^d(-z,\delta)$. Застосування леми 6 з $X = \Lambda_\varepsilon$, $y = z_\varepsilon$ призводить до суперечності. Рівності (9) і (10) гарантують, що умови (8) можна задовольнити за рахунок вибору радіуса кулі.

Лему 8 доведено.

***4.3. Доведення теореми* 3.**

Лема 9. *Умови теореми* 3 *є необхідними.*

Доведення. Позначимо через x точку, існування якої стверджується в лемі 8. Доведемо, що ця точка є шуканою. Зауважимо, що з неперервності функції ρ_A та леми 7 випливає, що $\rho_A(z_1) = \rho_A(z_2)$ для всіх $z_1, z_2 \in \Pi(x) \cap S^{d-1}$. Покладемо $R := \rho_A(z)$, де z — довільна точка з $\Pi(x) \cap S^{d-1}$.

Для всіх $r > 0$ покладемо $X(r) := \big\{y \in S_+^{d-1}(x) \colon \rho_A(y) \le r\big\}$. Тоді $X(r) = S_+^{d-1}(x)$ для всіх $r \ge R$ і множина $\mathcal{C}(X(r))$ є опуклою.

Нехай

$$0 < r < R. \tag{11}$$

Доведемо, що множина $\Lambda(\mu X(r))$ з означення 1 з $\lambda = \mu X(r)$ може бути вибрана як підмножина $S_+^{d-1}(x)$. Дійсно, припустимо протилежне. Виберемо множину Λ, що задовольняє означення 1 з $\lambda = \mu X(r)$. Тоді $\Lambda \cap \Pi(x) \ne \varnothing$, оскільки Λ — опукла множина, і з $\Lambda \subset S_-^{d-1}(x) \setminus \Pi(x)$ випливає, що множина $-\Lambda \subset S_+^{d-1}(x)$ також задовольняє означення 1 через умову (7). З неперервності функції ρ_A випливає, що множина $\{y \in \Lambda \colon \rho_A(y) > r\}$ має додатну міру, а отже, $\mu^d\big(\mathcal{C}(\Lambda) \cap A\big) > \mu^d\big(\mathcal{C}(X(r)) \cap A\big)$, що суперечить вибору множини Λ.

Припустимо, що виконується умова (11). Доведемо, що множина $\mathcal{C}(X(r))$ є опуклою. Припустимо протилежне. Тоді існують

$$z \in S_+^{d-1}(x) \setminus X(r), \tag{12}$$

$m \in \mathbb{N}$, $y_1, \ldots, y_m \in X(r)$ і додатні числа $\eta_1, \ldots, \eta_m$ такі, що $z = \sum_{k=1}^m \eta_k y_k$. З (12) випливає, що $\rho_A(z) > r$. Тоді існує таке $\delta > 0$, що $X(r) \cap B(z, 2\delta) = \varnothing$. Виберемо таке $\varepsilon > 0$, що

$X(r+\varepsilon)\cap B(z,\delta)=\varnothing$. З неперервності функції ρ_A випливає існування такого $\epsilon>0$, що $X(r+\varepsilon)\supset B(y_k,\epsilon)\cap S^{d-1}$, $k=1,\ldots,m$. Крім того, ϵ можна вибрати настільки малим, щоб

$$\sum_{k=1}^{m}\eta_k z_k\in B(z,\delta) \tag{13}$$

для всіх $z_k\in B(y_k,\epsilon)\cap S^{d-1}$, $k=1,\ldots,m$. Тому множина $\mathcal{C}(X(r+\varepsilon))$ не є опуклою. Крім того, якщо $\Lambda\subset S^{d-1}$ така, що

$$\mu\left(X(r+\varepsilon)\triangle\Lambda\right)=0, \tag{14}$$

то $\mathcal{C}(\Lambda)$ не є опуклою. Дійсно, з рівності (14) випливає, що $\mu\big(\Lambda\cap B(y_k,\epsilon)\big)>0$, $k=1,\ldots,m$, і $\mu\big(\Lambda\cap B(z,\delta)\big)=0$. Але з (13) випливає, що

$$\mu^d\big(\operatorname{conv}\mathcal{C}(\Lambda)\cap B(z,\delta)\big)>0.$$

Зазначимо, що рівність (14) виконується для кожної множини $\Lambda\subset S^{d-1}_+$, що задовольняє означення 1 з $\lambda=\mu X(r+\varepsilon)$, тому $A\notin\mathfrak{A}$. Прийшли до суперечності.

Лему 9 доведено.

Лема 10. *Умови теореми* 3 *є достатніми.*

Доведення. Для $r>0$ покладемо $X(r):=\big\{y\in S^{d-1}_+(x)\colon\rho_A(y)\le r\big\}$ і $\lambda(r):=\mu X(r)$. Тоді для всіх $r>0$ множина $\Lambda(\lambda(r))=X(r)$ задовольняє умови означення 1 з $\lambda=\lambda(r)$. Якщо $\mu\big\{y\in S^{d-1}_+(x)\colon\rho_A(y)=r\big\}=0$ для всіх $r>0$, то $\lambda(r)$ є неперервною функцією змінної r і, отже, набуває всіх значень від 0 до $\dfrac{\mu S^{d-1}}{2}$. Тому A задовольняє означення 1 для всіх $\lambda\in\left(0,\dfrac{\mu S^{d-1}}{2}\right]$, а отже, $A\in\mathfrak{A}$.

Тепер припустимо, що $\mu\big\{y\in S^{d-1}_+(x)\colon\rho_A(y)=r\big\}>0$ для деякого $r>0$. Для завершення доведення леми достатньо побудувати множину $\Lambda(l)$, яка задовольняє умови означення 1 з $\lambda=l$ для всіх $l\in\big[\lim_{\varrho\to r-0}\lambda(\varrho),\lambda(r)\big)$.

Покладемо $Y(r)=\bigcup\limits_{0<\varrho<r}X(\varrho)$. Тоді $\mu(Y(r))=\lim_{\varrho\to r-0}\lambda(\varrho)$ і

$$\mathcal{C}(Y(r))=\mathcal{C}\left(\bigcup_{0<\varrho<r}X(\varrho)\right)=\bigcup_{0<\varrho<r}\mathcal{C}\left(X(\varrho)\right).$$

З умови леми випливає, що всі множини $\mathcal{C}(X(\varrho))$, $\varrho>0$, є опуклими. Крім того, $X(r_1)\subset X(r_2)$ $\big($а отже, $\mathcal{C}(X(r_1))\subset\mathcal{C}(X(r_2))\big)$ для всіх $r_1<r_2$. З цього випливає, що множина $\mathcal{C}(Y(r))$ також є опуклою. З побудови множини $Y(r)$ випливає, що множина $\Lambda\big(\lim_{\varrho\to r-0}\lambda(\varrho)\big):=Y(r)$ задовольняє умови означення 1 з $\lambda=\lim_{\varrho\to r-0}\lambda(\varrho)$. Крім того, ми можемо припустити, що $Y(r)\cap\Pi(x)=\varnothing$, оскільки віднімання множини $S^{d-1}\cap\Pi(x)$ (або її підмножини) з $Y(r)$ не змінює міри $Y(r)$ і $\mathcal{C}(Y(r))$ і не впливає на опуклість $\mathcal{C}(Y(r))$.

Розглянемо деяку гіперплощину $\Pi\subset\Pi_+(x)$, паралельну гіперплощині $\Pi(x)$. Покладемо $Z:=\mathcal{C}(Y(r))\cap\Pi$. Тоді Z — опукла множина і $\mu^{d-1}Z\ne0$. Виберемо деяку внутрішню (відносно $(d-1)$-вимірної топології Π) точку $z\in Z$. Для кожного $\eta\ge0$ розглянемо множину Z_η, яка отримується з Z шляхом розтягування відносно точки z у $1+\eta$ разів. Тоді множина

Z_η є опуклою. Покладемо $Y_\eta := X(r) \cap \mathcal{C}(Z_\eta)$. Тоді μY_η — неперервна функція змінної $\eta \geq 0$, $\mu Y_0 = \mu Y(r)$ і $\lim_{\eta\to\infty} \mu Y_\eta = \mu X(r)$. Крім того, для кожного $\eta \geq 0$ множина $\mathcal{C}(Y_\eta)$ є опуклою, а множина $\Lambda(\mu Y_\eta) := Y_\eta$ задовольняє умови означення 1 з $\lambda = \mu Y_\eta$.

Отже, для всіх $l \in \big[\lim_{\varrho\to r-0} \lambda(\varrho), \lambda(r)\big)$ ми побудували множину $\Lambda(l)$, що задовольняє умови означення 1 з $\lambda = l$.

Лему 10 доведено.

5. Нерівності типу Островського. У цьому пункті ми доведемо основні результати статті — теореми 1 і 2. Лема 14 є основним інструментом при доведенні цих теорем. Зазначимо, що ми суттєво використовуємо ідеї зі статті [5] у доведенні результатів цього пункту. Для повноти викладу ми наводимо доведення всіх тверджень.

5.1. Допоміжний результат.

Лема 11. *Нехай* $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $r \in \mathbb{P}^{d-1}$ *і задано вимірну множину* $F \subset B^d(x, \varepsilon)$. *Для кожного* $A \in (0,1)$ *існує* $\alpha = \alpha(A) \in (0,1)$, *яке не залежить від* ε, x, r *і таке, що*

$$\mu^{d-1}\big\{\beta \in \Pi^{d-1}(r) : F \cap l(r,\beta) \neq \varnothing\big\} > A\mu^{d-1}B^{d-1}(\varepsilon),$$

як тільки $\mu^d F > \alpha\mu^d B^d(\varepsilon)$.

Доведення. Той факт, що α не залежить від ε, випливає з того, що

$$\frac{\mu^d F}{\mu^d B^d(\varepsilon)} = \frac{\mu^d\left(\dfrac{1}{\varepsilon}F\right)}{\mu^d B^d}$$

і

$$\frac{\mu^{d-1}\big\{\beta \in \Pi^{d-1}(r) : F \cap l(r,\beta) \neq \varnothing\big\}}{\mu^{d-1}B^{d-1}(\varepsilon)} = \frac{\mu^{d-1}\left\{\beta \in \Pi^{d-1}(r) : \dfrac{1}{\varepsilon}F \cap l(r,\beta) \neq \varnothing\right\}}{\mu^{d-1}B^{d-1}}.$$

Те, що α не залежить від x і r, є очевидним. Існування числа α випливає з рівності

$$\mu^d F = \int\limits_{\Pi^{d-1}(r)\cap B^d(y,\varepsilon)} \mu^1\big(l(r,\beta) \cap F\big)\mu^{d-1}(d\beta), \tag{15}$$

де $y \in \Pi^{d-1}(r)$ вибрано так, що пряма $l(r, y)$ містить x, а також рівності

$$\mu^{d-1}(\Pi^{d-1}(r) \cap B^d(y,\varepsilon)) = \mu^{d-1}B^{d-1}.$$

Лему 11 доведено.

5.2. Узгоджені множини і деякі їхні властивості.

Означення 7. *Нехай задано опуклу компактну множину* A *з* $\theta \in \operatorname{int} A$. *Будемо називати множини* $F, W \subset A$ *узгодженими, якщо виконуються такі умови*:

1) F *є вимірною і* $\theta \notin \overline{F}$,
2) W *є замкненою і* $\theta \notin W$,
3) *якщо* $x \in F$ *і* $y \in A \setminus F$, *то* $xy \cap W \neq \varnothing$.

Означення 8. *Для вимірної множини* $F \subset \mathbb{R}^d$ *позначимо через* $\tilde{F}$ *множину всіх точок* $x \in F$ *таких, що* $\lim_{\delta \to +0} \dfrac{\mu^d(F \cap B^d(x,\delta))}{\mu^d B^d(\delta)} = 1$.

За теоремою Лебега

$$\mu^d \tilde{F} = \mu^d F. \tag{16}$$

Лема 12. *Нехай задано опуклу компактну множину* A *з* $\theta \in \operatorname{int} A$ *й узгоджені множини* $F, W \subset A$. *Якщо пряма* $r \in \mathbb{P}^{d-1}$ *така, що* $v(W,r) = 0$, *то* $\tilde{F} \supset \operatorname{int} A \cap l(r,\beta)$ *або* $\tilde{F} \cap l(r,\beta) = \varnothing$ *для довільного* $\beta \in \Pi^{d-1}(r)$.

Доведення. Припустимо, що для деякого $\beta \in \Pi^{d-1}(r)$ існують $x \in \tilde{F} \cap l(r,\beta)$ і $y \in \big(\operatorname{int} A \cap l(r,\beta)\big) \setminus \tilde{F}$. З означення $\tilde{F}$ випливає, що існують $c > 0$ і послідовність чисел $\rho_n \to 0$ при $n \to \infty$ такі, що $\mu^d\big(B^d(y,\rho_n) \setminus F\big) \geq c\mu^d B^d(\rho_n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Із (15) (де F замінено на $B^d(y,\rho_n) \setminus F$) випливає існування такого $C > 0$, що

$$\mu^{d-1}\Omega_1(\rho_n) > C\mu^{d-1}B^{d-1}(\rho_n) \tag{17}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$, де

$$\Omega_1(\rho_n) = \big\{\beta \in \Pi^{d-1}(r) \colon (B^d(y,\rho_n) \setminus F) \cap l(r,\beta) \neq \varnothing\big\}.$$

Оскільки $x \in \tilde{F}$, то існує таке $\delta > 0$, що для всіх $\rho < \delta$ маємо $\mu^d(B^d(x,\rho) \cap F) \geq \alpha(1-C) \times \mu^d B^d(\rho)$, де число $\alpha(1-C)$ визначено в лемі 11. З леми 11 випливає, що

$$\mu^{d-1}\Omega_2(\rho) > (1-C)\mu^{d-1}B^{d-1}(\rho) \tag{18}$$

для всіх $\rho \leq \delta$, де

$$\Omega_2(\rho) = \big\{\beta \in \Pi^{d-1}(r) \colon B^d(x,\rho) \cap F \cap l(r,\beta) \neq \varnothing\big\}.$$

Виберемо n настільки великим, щоб $\rho_n < \delta$. Тоді

$$\mu^{d-1}\Omega_1(\rho_n) + \mu^{d-1}\Omega_2(\rho_n) > \mu^{d-1}B^{d-1}(\rho_n), \tag{19}$$

згідно з (17) і (18). Крім того, оскільки $x, y \in l(r,\beta)$, то

$$\Omega_1(\rho_n), \Omega_2(\rho_n) \subset \Pi^{d-1}(r) \cap B^d(\beta,\rho_n) \tag{20}$$

і

$$\mu^{d-1}(\Pi^{d-1}(r) \cap B^d(\beta,\rho_n)) = \mu^{d-1}(B^{d-1}(\rho_n)). \tag{21}$$

Покладемо $\Omega = \Omega_1(\rho_n) \cap \Omega_2(\rho_n)$. Тоді з (19)–(21) випливає, що $\mu^{d-1}\Omega > 0$. Але кожна пряма $l(r,\beta)$, $\beta \in \Omega$, містить точку з W, згідно з умовою 3 означення 7 і означеннями множин $\Omega_1(\rho_n)$, $\Omega_2(\rho_n)$. Це суперечить умові $v(W,r) = 0$ леми.

Лему 12 доведено.

Лема 13. *Нехай задано опуклу компактну множину* A *з* $\theta \in \operatorname{int} A$ *й узгоджені множини* $F, W \subset A$. *Нехай* $R \subset \mathbb{P}^{d-1}$ *така, що* $v(W,r) = 0$ *для всіх* $r \in R$. *Якщо* R *містить* d *прямих, що не містяться в жодній* $(d-1)$*-вимірній гіперплощині, то* $\mu^d(F) = 0$.

Доведення. З огляду на (16) достатньо довести, що $\tilde{F} = \varnothing$. Нехай $r_1, \ldots, r_d$ — це прямі з умови леми, а $\rho_1, \ldots, \rho_d$ — одиничні направляючі вектори цих прямих. Покладемо $P :=$ $:= \Big\{ \sum_{k=1}^{d} t_k \rho_k : t_k \in (-1, 1),\ \ k = 1, \ldots, d \Big\}$, тоді P — відкрита в $\mathbb{R}^d$ множина.

Розглянемо довільну точку $x \in \operatorname{int} A$. Виберемо $\varepsilon > 0$ так, щоб $tx + \varepsilon P \subset A$ для всіх $t \in [0, 1]$. Таке $\varepsilon > 0$ існує, оскільки відстань до межі A є неперервною функцією точки з відрізка θx, а відрізок θx — компактна множина. Тоді $P_y := y + \varepsilon P \subset A$ для всіх точок y з відрізка θx. $\bigcup\limits_{y \in \theta x} P_y$ є відкритим покриттям компактної множини θx, а отже, існує її скінченне підпокриття $P_1, P_2, \ldots, P_m,\ m \in \mathbb{N}$. З леми 12 випливає, що для кожного $s = 1, \ldots, m$ або $P_s \subset \tilde{F}$, або

$$P_s \cap \tilde{F} = \varnothing. \tag{22}$$

Оскільки $\theta \notin \tilde{F}$, то (22) виконується для кожного $s = 1, \ldots, m$, а отже, $x \notin \tilde{F}$.

Лему 13 доведено.

5.3. Основна лема.

Лема 14. *Нехай $A \in \mathfrak{A}$ й задано узгоджені множини $F, W \subset A$. Тоді для всіх $p \in [1, \infty]$*

$$\mu^d F \le C_p(A) v_p(W), \tag{23}$$

де $C_p(A)$ визначено в (3).

Нерівність точна в тому сенсі, що для кожного $\varepsilon > 0$ існують узгоджені множини F і W, для яких

$$\mu^d F > (C_p(A) - \varepsilon)\, v_p(W).$$

Якщо нерівність (23) *перетворюється на рівність, то $\mu^d F = 0$.*

Доведення. Якщо існує множина $R \subset \mathbb{P}^{d-1}$ з додатною мірою, для якої $v(W, r) = 0$ для всіх $r \in R$, то з леми 13 випливає, що $\mu^d F = 0$, а отже, виконується нерівність (23).

Доведення нерівності (23) у випадку $p < \infty$. Якщо $v(W, r) \ge 2$ для майже всіх $r \in \mathbb{P}^{d-1}$, то $v_p(W) \ge 2$ і нерівність (23) виконується, оскільки для $p < \infty$

$$C_p(A) \ge \frac{\mu^d A - C(A, 0)}{2} = \frac{\mu^d A}{2}.$$

Нерівність є строгою, оскільки виконується умова 1 з означення 7.

Припустимо, що існує $R \subset \mathbb{P}^{d-1}$, $\mu R > 0$, така, що $v(W, r) = 1$ для всіх $r \in R$ і $v(W, r) \ge 2$ для майже всіх $r \in \mathbb{P}^{d-1} \setminus R$. Тоді

$$v_p(W) \ge \left(\frac{1}{\mu S^{d-1}} \left(1 \cdot \mu R + 2^p \cdot (\mu S^{d-1} - \mu R) \right) \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{(1 - 2^p)\mu R}{\mu S^{d-1}} + 2^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{24}$$

З умов 1 і 2 означення 7 випливає, що існує таке $\varepsilon > 0$, що $B^d(\varepsilon) \cap W = \varnothing$ і $B^d(\varepsilon) \cap F = \varnothing$. Покладемо $\Lambda := \bigcup\limits_{r \in R} (r \cap A)$. Доведемо, що

$$\mu^d(\Lambda \cap F) < \frac{\mu^d \Lambda}{2}. \tag{25}$$

Для цього, враховуючи (16), достатньо довести, що

$$\mu^d(\Lambda \cap \tilde{F}) < \frac{\mu^d \Lambda}{2}. \qquad (26)$$

Розглянемо довільну пряму $r \in R$. Тоді всі точки перетину $r \cap \tilde{F}$ знаходяться по один бік від $r \cap B^d(\varepsilon)$. Цей факт можна довести, використавши міркування з доведення леми 12. Позначимо через χ характеристичну функцію множини $\Lambda \cap \tilde{F}$. Тоді $\chi(x) = 0$ для всіх $|x| < \varepsilon$ і $\chi(x) + \chi(-x) \le 1$ для всіх $x \in \Lambda$. З цього випливає (26).

Нарешті, використовуючи (25), можемо записати

$$\mu^d F \le \mu^d(F \cap \Lambda) + \mu^d(A \setminus \Lambda) < \mu^d A - \frac{1}{2}\mu^d \Lambda \le \mu^d A - C\left(A, \frac{\mu R}{2}\right).$$

Остання нерівність разом з (24) доводять (23).

Доведення нерівності (23) у випадку $p = \infty$. Якщо $v(W, r) = 1$ для майже всіх $r \in \mathbb{P}^{d-1}$, то, як і у випадку $p < \infty$, можна показати, що $\mu^d F < \dfrac{\mu^d A}{2}$, а отже, нерівність (23) виконується і є строгою.

Якщо $v(W, r) \ge 2$ на множині $r \in \mathbb{P}^{d-1}$ з додатною мірою, то $v_\infty(W) \ge 2$ і, отже, нерівність (23) виконується. Вона є строгою, оскільки виконується умова 1 означення 7.

Доведення точності нерівності (23) у випадку $p = \infty$. Для довільного $\varepsilon > 0$ розглянемо множини $W_\varepsilon = F_\varepsilon := \{x \in A \colon |x| \ge \varepsilon\}$. Для всіх $p \in [1, \infty]$ $v_p(W_\varepsilon) = 2$, $\mu^d F_\varepsilon \to \mu^d A$ при $\varepsilon \to 0$. Тому нерівність (23) у цьому випадку є точною.

Доведення точності нерівності (23) у випадку $p < \infty$. Позначимо через λ число, на якому досягається точна верхня грань у (3). Якщо $\lambda = 0$, то приклад із випадку $p = \infty$ доводить точність нерівності.

Нехай тепер $\lambda > 0$ і $\Lambda = \Lambda\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)$ — множина, що реалізує точну нижню грань у (1), причому множина $\mathcal{C}(\Lambda)$ є опуклою. Нехай $x \in \operatorname{int} \mathcal{C}(\Lambda) \cap A$ є такою, що $-x \in A$. Покладемо $\Lambda_x := -x + \operatorname{int} \mathcal{C}(\Lambda)$ і $W_x = F_x := A \setminus \Lambda_x$. Тоді множини W_x і F_x є узгодженими, і, згідно з лемою 2, маємо $v_p(W_x) = \left(\dfrac{(1-2^p)\lambda}{\mu S^{d-1}} + 2^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $\mu^d(F_x) = \mu A - \mu\Lambda_x = \mu A - \mu\Lambda + o(1)$, $|x| \to 0$. З цього випливає точність нерівності (23).

Лему 14 доведено.

***5.4. Доведення теорем* 1 *і* 2.** Спочатку доведемо теорему 1. З означення 6 випливає, що $v_p(f) = v_p(f + c)$ для всіх $c \in \mathbb{R}$. Тому можна припустити, що $f(\theta) = 0$, і достатньо довести, що

$$\int\limits_A f(x)dx \le C_p(A) v_p(f). \qquad (27)$$

Покладемо $\Gamma := \big\{(x, t) \in A \times [0, \infty) : f(x) \ge t\big\}$ і для кожного фіксованого $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^{d+1}_t := \big\{(x_1, \ldots, x_d, t) \in \mathbb{R}^{d+1} : x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R}\big\}.$$

Тоді

$$\int\limits_A f(x)dx \le \mu^{d+1}\Gamma = \int\limits_{t\ge 0} \mu^d\big(\Gamma\cap\mathbb{R}^{d+1}_t\big)\, dt. \tag{28}$$

Для всіх $t>0$ розглянемо множини $F:=\Gamma\cap\mathbb{R}^{d+1}_t$ і

$$W:=\big\{(x,s)\in A\times[0,\infty)\colon f(x)=s\big\}\cap\mathbb{R}^{d+1}_t.$$

Обидві множини F і W є замкненими множинами, що не містять θ, оскільки $f(\theta)=0$. Якщо $x\in F$ і $y\in A\setminus F$, то $f(x)\ge t$ і $f(y)<t$, а отже, відрізок xy містить точку z з $f(z)=t$, тобто $xy\cap W\ne\varnothing$. Тому виконуються всі умови леми 14, а отже,

$$\mu^d\big(\Gamma\cap\mathbb{R}^{d+1}_t\big)=\mu^d(F)\le C_p(A)v_p(W)=C_p(A)v_p(L(f;t)),$$

причому рівність можлива лише у випадку, коли $\mu^dF=0$. Враховуючи (28), отримуємо

$$\mu^{d+1}\Gamma\le C_p(A)\int\limits_{t\ge0} v_p(L(f;t))\,dt\le C_p(A)\int\limits_{t\in\mathbb{R}} v_p(L(f;t))\,dt, = C_p(A)v_p(f),$$

і нерівність (27) доведено. Крім того, з неперервності f випливає, що рівність у (27) може бути лише у випадку, коли $f\equiv 0$. Отже, нерівність (2) доведено.

Доведемо, що нерівність (2) є точною.

Якщо $p=\infty$ або точна верхня грань у (3) досягається при $\lambda=0$, то розглянемо таку конструкцію екстремальних функцій.

Для кожного $\varepsilon>0$ розглянемо неперервну функцію $\varphi_\varepsilon\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $\varphi_\varepsilon(t)=1$ для $t\ge\varepsilon$, $\varphi_\varepsilon(0)=0$ і φ_ε є лінійною на $[0,\varepsilon]$. Покладемо $f_\varepsilon(x)=\varphi_\varepsilon(|x|)$, $x\in A$. Легко бачити, що $v_p(L(f_\varepsilon;t))=2$ для всіх $t\in(0,1]$ і $v_p(L(f_\varepsilon;t))=0$ для всіх $t\notin(0,1]$. Тому $v_p(f_\varepsilon)=2$. Отже,

$$\frac{\int_A f_\varepsilon(x)\,dx}{v_p(f_\varepsilon)}\to\frac{\mu^dA}{2}=C_p(A),\quad \varepsilon\to0,$$

і точність нерівності (2) у цьому випадку доведено.

Нехай тепер $p<\infty$ і точна верхня грань у (3) досягається при $\lambda>0$. Нехай $\Lambda=\Lambda\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)$ — множина, на якій досягається точна нижня грань в (1) і така, що множина $\mathcal{C}(\Lambda)$ є опуклою. Для доведення точності нерівності (2) достатньо розглянути функції з леми 5 з $X=\Lambda$ і $x\to\theta$.

Теорему1 доведено.

Для доведення теореми 2 достатньо застосувати лему 14 з $W=F$.

Література

1. A. Ostrowski, *Über die Absolutabweichung einer differentiierbaren Funktion von ihrem Integralmittelwert*, Comment. Math. Helv., **10**, № 1, 226 – 227 (1937).
2. G. A. Anastassiou, *Advanced inequalities*, Vol. 11, World Sci. (2011).
3. S. S. Dragomir, E. Rassias, Th. M. Ostrowski, *Type inequalities and applications in numerical integration*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht etc. (2002).
4. S. S. Dragomir, *Operator inequalities of Ostrowski and trapezoidal type*, Springer Sci. & Business Media (2011).
5. O. V. Kovalenko, *Ostrowski type inequalities for sets and functions of bounded variation*, J. Inequal. and Appl., **151**, № 1 (2017).
6. А. С. Кронрод, *О функциях двух переменных*, Успехи мат. наук, **5**, № 1, 24 – 134 (1950).
7. А. Г. Витушкин, *О многомерных вариациях*, Гостехтеориздат, Москва (1955).
8. Л. Д. Иванов, *Вариации множеств и функций*, Наука, Москва (1975).

Одержано 09.11.19