DOI: 10.37863/umzh.v72i5.1127

УДК 517.5

Г. А. Дзюбенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОЦІНКА СТЄЧКІНА ДЛЯ МАЙЖЕ КОПОЗИТИВНОГО НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Under the conditions that a continuous 2π-periodic function f on the real axis changes its sign at $2s$ points $y_i : -\pi \le \le y_{2s} < y_{2s-1} < \ldots < y_1 < \pi,\ s \in \mathbb{N}$, the other points $y_i,\ i \in \mathbb{Z}$, are defined by periodicity, and natural $n > N(k, y_i)$, where $N(k, y_i)$ is a constant that depends only on $k \in \mathbb{N}$ and $\min_{i=1,\ldots,2s}\{y_i - y_{i+1}\}$, we find a trigonometric polynomial P_n of order $\le n$ such that the signs of P_n and f are the same everywhere with the possible exception for small neighborhoods of the points $y_i : (y_i - \pi/n, y_i + \pi/n),\ P_n(y_i) = 0,\ i \in \mathbb{Z}$, and $\|f - P_n\| \le c(k, s)\,\omega_k(f, \pi/n)$, where $c(k, s)$ is a constant that depends only on k and s; $\omega_k(f, \cdot)$ is the kth modulus of smoothness of f, and $\|\cdot\|$ is the max-norm.

Якщо неперервна на дійсній осі 2π-періодична функція f змінює свій знак у $2s,\ s \in \mathbb{N}$, точках $y_i :\ -\pi \le y_{2s} < < y_{2s-1} < \ldots < y_1 < \pi$, а для інших $i \in \mathbb{Z}$ точки y_i визначаються періодично, то для кожного натурального n, більшого за деяку сталу $N(k, y_i)$, що залежить тільки від $k \in \mathbb{N}$ і $\min_{i=1,\ldots,2s}\{y_i - y_{i+1}\}$, знайдено тригонометричний поліном P_n порядку не вищого за n такий, що P_n має скрізь той самий знак, що і f, за винятком, можливо, маленьких околів точок $y_i : (y_i - \pi/n, y_i + \pi/n),\ P_n(y_i) = 0,\ i \in \mathbb{Z}$, і

$$\|f - P_n\| \le c(k, s)\,\omega_k(f, \pi/n),$$

де $c(k, s)$ — стала, що залежить тільки від k і s, $\omega_k(f, \cdot)$ — модуль гладкості k-го порядку функції f і $\|\cdot\|$ — max-норма.

1. Вступ. Нехай $C := C_{\mathbb{R}}$ — простір неперервних 2π-періодичних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із рівномірною нормою $\|f\| := \|f\|_{\mathbb{R}} = \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ і $\mathbb{T}_n$ — простір тригонометричних поліномів $P_n(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n}(a_j \cos jx + b_j \sin jx)$ порядку не вищого за $n,\ n \in \mathbb{N}$, з $a_j, b_j \in \mathbb{R}$.

Відомим є таке твердження.

Якщо функція f належить до C, то для кожних натуральних n і k знайдеться поліном $P_n \in \mathbb{T}_n$ такий, що

$$\|f - P_n\| \le c(k)\,\omega_k\,(f, \pi/n)\,, \tag{1.1}$$

де $c(k)$ — стала, яка залежить лише від k, і $\omega_k\,(f, \cdot)$ — модуль гладкості k-го порядку функції f.

Ця класична рівномірна оцінка наближення неперервних функцій поліномами (без обмежень) належить Джексону (при $k = 1$), Зигмунду (при $k = 2$), Ахієзеру (при $k = 2$) і Стєчкіну (при $k \ge 3$) (детальніше див., наприклад, [1, с. 204 – 212]).

У 1968 р. Lorentz і Zeller [2] отримали дзвоноподібний аналог цієї оцінки при $k = 1$, тобто для наближення дзвоноподібних (парних і незростаючих на $[0, \pi]$) функцій із C дзвоноподібними поліномами з $\mathbb{T}_n$, і тим започаткували пошук інших її аналогів, з іншими обмеженнями на форму функції і поліномів, такими як кускова позитивність, кускова монотонність тощо.

Нехай на $[-\pi, \pi)$ є $2s,\ s \in \mathbb{N}$, точки

$$y_i :\ -\pi \le y_{2s} < y_{2s-1} < \ldots < y_1 < \pi$$

є фіксованими, а для решти $i \in \mathbb{Z}$ точки y_i визначаються рівністю $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$ (тобто $y_0 = y_{2s} + 2\pi, \ldots, y_{2s+1} = y_1 - 2\pi, \ldots$) і $Y := Y_{2s} = \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$.

Через $\Delta^{(0)}(Y)$ позначимо множину всіх $f \in C$, які невід'ємні на $[y_1, y_0]$, недодатні на $[y_2, y_1]$, невід'ємні на $[y_3, y_2]$ і т. д. Отже,

$$f \in \Delta^{(0)}(Y) \Leftrightarrow f(x)\Pi(x) \geq 0, \ x \in \mathbb{R}, \quad \text{де} \quad \Pi(x) := \Pi(x, Y) := \prod_{i=1}^{2s} \sin \frac{1}{2}(x - y_i)$$

$(\Pi(x) > 0, \ x \in (y_1, y_0), \ \Pi \in \mathbb{T}_s)$. Функції з $\Delta^{(0)}(Y)$ називають *кусково-позитивними,* або *копозитивними* (між собою), а наближення їх поліномами теж з $\Delta^{(0)}(Y)$ — копозитивним, або знакозберігаючим наближенням.

У статті [3] доведено наступне.

Якщо функція f належить до множини $\Delta^{(0)}(Y)$, то для кожного $n \in \mathbb{N}$, що більше за деяку сталу $N(Y)$, яка залежить лише від $\min_{i=1,\ldots,2s}\{y_i - y_{i+1}\}$, знайдеться поліном $P_n \in \mathbb{T}_n$ такий, що

$$P_n \in \Delta^{(0)}(Y),$$

$$\|f - P_n\| \leq c(s)\, \omega_3(f, \pi/n), \tag{1.2}$$

де $c(s)$ — стала, яка залежить лише від s.

Раніше М. Г. Плєшаков і П. А. Попов [4] довели те саме, тільки з ω_1 замість ω_3 в (1.2), а П. А. Попов [5] довів, що оцінка (1.2) стає хибною, якщо ω_3 замінити на ω_k з $k > 3$, побудувавши функцію $f \in \Delta^{(0)}(Y_2)$ таку, що

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\inf_{P_n \in \mathbb{T}_n \cap \Delta^{(0)}(Y_2)} \|f - P_n\|}{\omega_4(f, \pi/n)} = \infty. \tag{1.3}$$

Однак з 1998 р. з *комонотонного* наближення на відрізку алгебраїчними многочленами (де (1.2) тільки з ω_2 замість ω_3 встановлено у [6], а (1.3) тільки з ω_3, $\mathbb{P}_n$ і $\Delta^{(1)}$ замість ω_4, $\mathbb{T}_n$ і $\Delta^{(0)}$ — у [7]) відомо, що *якщо для многочленів послабити умову комонотонності в маленьких околах точок зміни монотонності функції, то можна збільшити порядок комонотонного наближення на одиницю* (*див.* [8]) *і не більше ніж на одиницю* (*див.* [9]).

І дійсно, саме у комонотонному і коопуклому наближеннях алгебраїчними многочленами (див. [8] і [10] відповідно) і тригонометричними поліномами (див. [11] і [12] відповідно) порядки наближень було збільшено на одиницю у кожному випадку.

Слід зазначити, що отримання оцінок як у чисто, так і у майже формозберігаючих наближеннях алгебраїчними многочленами і тригонометричними поліномами відрізняється технічно і частково ідейно. Це пов'язано з необхідністю в тригонометричному випадку „боротися" з алгебраїчними доданками, що виникають після інтегрувань ядер, які формують контрольовані похідні наближаючих поліномів.

Досить несподіваним виявилось те, що у копозитивному наближенні на відрізку, при послабленні умови зберігання знака для многочлена у маленьких околах точок зміни знака функції, можна покращити наближення не на один порядок, а як завгодно (див. [13]), тобто так само, як і при наближенні без обмежень (1.1).

У цій статті ми поширюємо це твердження з алгебраїчного на тригонометричний випадок, а саме, доводимо таку теорему.

Теорема 1. *Якщо функція f належить до множини $\Delta^{(0)}(Y)$, то для кожного $n \in \mathbb{N}$, що більше за деяку сталу $N(k, Y)$, яка залежить лише від $k \in \mathbb{N}$ і $\min_{i=1,\ldots,2s}\{y_i - y_{i+1}\}$, знайдеться поліном $P_n \in \mathbb{T}_n$ такий, що*

$$P_n(x)\Pi(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{Z}}(y_i - \pi/n, y_i + \pi/n), \tag{1.4}$$

$P_n(y_i) = 0,\ i \in \mathbb{Z}$, і

$$\|f - P_n\| \leq c(k,s)\,\omega_k(f, \pi/n), \tag{1.5}$$

де $c(k,s)$ — стала, яка залежить лише від k і s.

Зауважимо, що з нерівності Уітні [14] $\|f - f(y_i)\| \leq 3\,\omega_k(f, k\pi)$ (0 інтерполює f, а сталу 3 отримано в роботі [15]) випливає, що в теоремі 1 сталі $N(k,Y)$ і $c(k,s)$ можна замінити на 1 і $C(k,Y)$ відповідно. Зробити обидві сталі незалежними від $\min_{i=1,\ldots,2s}\{y_i - y_{i+1}\}$ одночасно (а залежними лише від s) швидше за все теж можливо (на відміну від „чисто" формозберігаючого наближення), але ми не будемо приділяти цьому увагу, щоб не обтяжувати доведення випадками, коли відстань між сусідніми точками y_i менша за крок розбиття.

Доведення теореми 1 не складне і подібне до доведення її алгебраїчного аналога [13] (теорема 1.1) (навіть простіше, оскільки в алгебраїчному випадку встановлено поточкову, а не рівномірну оцінку). Це теж досить несподівано, оскільки, як вже зазначалося, перенесення результатів з алгебраїчного випадку на тригонометричний у формозберігаючому наближенні — складна задача. Це доведення ґрунтується на „виправленні" полінома Стєчкіна наближення без обмежень, що задовольняє оцінку (1.1).

(Щодо копозитивного і комонотонного наближень диференційовних періодичних функцій див. [16] і [17, 18] відповідно, а коопукле наближення таких функцій ще не досліджено.)

2. Допоміжні факти. Нехай $\varphi(t)$ — k-мажоранта, тобто неперервна і неспадна на $[0,\infty)$ функція така, що $\varphi(0) = 0$ і $t^{-k}\varphi(t)$ не зростає при $t > 0$, а Φ^k — множина всіх φ. Відомо (див., наприклад, [19], теорема 2.1), що для будь-якого k-го модуля неперервності $\omega_k(g,t)$ функції $g \in C$ існує $\varphi \in \Phi^k$ така, що

$$\omega_k(g,t) \leq \varphi(t) \leq 2^k\,\omega_k(g,t), \quad t \geq 0. \tag{2.1}$$

Нехай $n \in \mathbb{N}$,

$$\widetilde{J}_{n,l}(x) := \left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^{2l} \Bigg/ \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^{2l} dx$$

— парне і невід'ємне ядро типу Джексона, $l \in \mathbb{N}$,

$$\sigma_n(x) := \sigma_{n,l}(f,x) = (-1)^{k+1}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \widetilde{J}_{n,l}(t)\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i} f(x+it)dt$$

— поліном з $\mathbb{T}_{l(n-1)}$, запропонований Стєчкіним [20] для доведення (1.1),

$$h := h_n = \pi/n, \quad x_j := x_{j,n} = -j\,h, \quad I_j := I_{j,n} = [x_j, x_{j-1}], \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Для фіксованих $Y = \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}},$ n та $m = 10 \vee 30$ позначимо

$$O_{i,m} := O_i(Y, n, m) := (x_{j+m+1}, x_{j-m}), \quad \text{якщо} \quad y_i \in [x_j, x_{j-1}) =: [x_{j_i}, x_{j_i-1}),$$

$$O_m := O(Y, n, m) := \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} O_{i,m}.$$

Будемо писати $j \in H(Y, n, m),$ якщо $x_j \subset \mathbb{R} \setminus O_m$. Нехай

$$H_m := \{j : j \in H(Y, n, m),\ |j| \le n\}.$$

Візьмемо $N_Y \in \mathbb{N}$ достатньо великим, щоб

$$O_{i,30} \cap O_{i-1,30} = \varnothing$$

для всіх $n \ge N_Y$ і всіх $i = 1, \ldots, 2s$ (отже, N_Y залежить лише від $\min_{i=1,\ldots,2s}\{y_i - y_{i+1}\}$). Далі $n > N_Y$. Позначимо

$$\chi(x, a) := \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le a, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > a, \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}, \quad \chi_j(x) := \chi(x, x_j),$$

$$\Gamma_j(x) := \Gamma_{j,n}(x) := \min\left\{1, \frac{1}{n\left|\sin\dfrac{x - (x_j + h/2)}{2}\right|}\right\}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N},$$

і зауважимо, що (детальніше див. [21])

$$\left\|\sum_{j=1-n}^{n} \Gamma_j^2\right\| < 6. \tag{2.2}$$

Для кожних $j \in \mathbb{Z}$ і $b \in \mathbb{N}$ візьмемо строго додатний поліном

$$J_j(x) := J_{j,n}(x) = \left(\frac{\sin\dfrac{n(x - x_j)}{2}}{\sin\dfrac{x - x_j}{2}}\right)^{2b} + \left(\frac{\sin\dfrac{n(x - x_{j-1})}{2}}{\sin\dfrac{x - x_{j-1}}{2}}\right)^{2b} \in \mathbb{T}_{b(n-1)}$$

(суму двох „сусідніх” ядер типу Джексона) і для $j \in H_{10}$ позначимо функцію

$$t_j(x) := t_{j,n}(x, b, Y) = \frac{\displaystyle\int_{x_j-\pi}^{x} J_j(u)\Pi(u)du}{\displaystyle\int_{x_j-\pi}^{x_j+\pi} J_j(u)\Pi(u)du}.$$

Далі $c_i = c_i(s, b) > 0,$ $i = 1, \ldots, 9,$ — сталі, які можуть залежати лише від s і b.

Лема 1 ([22], лема 1). *Якщо* $j \in H_{10}$ *і* $b \geq s+2$, *то*

$$t_j'(x)\,\Pi(x)\,\Pi(x_j) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

$$|\chi_j(x) - t_j(x)| \leq c_1 \left(\Gamma_j(x)\right)^{2b-2s-1}, \quad x \in [x_j - \pi, x_j + \pi], \tag{2.4}$$

$$\left|t_j'(x)\right| \leq c_2 \frac{1}{h}\, \left(\Gamma_j(x)\right)^{2b-2s}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

$$\left|t_j'(x)\right| \geq c_3 \frac{1}{h}\, \left(\Gamma_j(x)\right)^{2b+2s}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus O_{10}, \tag{2.6}$$

$$\left|t_j'(x)\right| \geq c_3 \frac{1}{h}\, \left(\Gamma_j(x)\right)^{2b+2s} \left|\frac{x-y_i}{x_j-y_i}\right|, \quad x \in O_{i,10}, \quad i \in \mathbb{Z}. \tag{2.7}$$

Зауважимо, що лема 1 доводиться за допомогою нерівностей

$$\frac{1}{c_4 h}\Gamma_j^{2b}(x)\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right| \leq \left|t_j'(x)\right| \ \leq\ \frac{c_4}{h}\Gamma_j^{2b}(x)\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right|,$$

$$\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right| \ \leq 2^{2s}\Gamma_j^{-2s}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad j \in H_m, \quad m \geq 10,$$

$$\left|\int\limits_x^{x_j+\pi} \Gamma_j^b(u)du\right| \leq c_5\, h\, \Gamma_j^{b-1}(x), \quad b \in \mathbb{N}, \quad x \in [x_j, x_j + 2\pi],$$

$$\left|\int\limits_x^{x_j-\pi} \Gamma_j^b(u)du\right| \leq c_5\, h\, \Gamma_j^{b-1}(x), \quad b \in \mathbb{N}, \quad x \in [x_j - 2\pi, x_j],$$

аналоги яких доведено в [23] (лема 5.3) і [21] відповідно.

3. Доведення теореми 1. Для спрощення викладу без втрати загальності будемо вважати, що $y_1 = x_{30}$ (тобто точки з Y далекі від $-\pi$ і π).

Зафіксуємо $b = 2ks + 2$ і покладемо

$$\mathcal{T}_i(x) := t_{j_i,n}'\left(x, b, (Y \setminus \{y_i\}) \cup \{x_{j_i+10}\}\right), \quad i = 1, \ldots, 2s,$$

де j_i позначає індекс j, для якого $y_i \in I_j$ (якщо таких індексів два, то нехай j_i — менший із них).

Лема 2 (0-зберігаюче наближення). *Якщо функція* f *належить до* C *і* $f(y_i) = 0$, $i \in \mathbb{Z}$, *то поліном*

$$\mathcal{Q}_n(x) := \mathcal{Q}_n(x, f, Y) = \sigma_{n,b}(f, x) - \sum_{i=1}^{2s} \frac{\sigma_{n,b}(f, y_i)}{\mathcal{T}_i(y_i)}\mathcal{T}_i(x) \in \mathbb{T}_{b(n-1)}$$

задовольняє нерівність

$$\|f - \mathcal{Q}_n\| \leq c_6\, \varphi(h), \tag{3.1}$$

і $\mathcal{Q}_n(y_i) = 0$, $i \in \mathbb{Z}$.

Доведення. Для кожного $i = 1, \ldots, 2s$, згідно з (1.1), для σ_n і (2.6) виконується

$$\left|\sigma_{n,b}(f, y_i)\right| = \left|f(y_i) - \sigma_n(y_i)\right| \le c(k)\,\varphi(h)$$

і

$$\left|\mathcal{T}_i(y_i)\right| \ge \frac{c_3}{h}\,(\Gamma_{j_i}(y_i))^{2b+2s} = \frac{c_3}{h},$$

тому з урахуванням (2.5) і (2.2) знаходимо (3.1):

$$\left|f(x) - \mathcal{Q}_n(x)\right| \le c(k)\varphi(h) + \sum_{i=1}^{2s} \frac{c(k)\varphi(h)}{c_3} h c_2 \frac{1}{h}\,(\Gamma_{j_i}(x))^{2b-2s} \le$$

$$\le c_7\varphi(h)\left(1 + \sum_{j=1-n}^{n} (\Gamma_j(x))^{2ks+2-2s}\right) \le c_6\varphi(h), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Лему 2 доведено.

Зауважимо, що якщо f належить до множини $\Delta^{(0)}(Y)$, то з (3.1) випливає нерівність

$$\mathcal{Q}_n(x)\Pi(x) = \big(f(x) + \mathcal{Q}_n(x) - f(x)\big)\Pi(x) \ge -c_6\,\varphi(h)\,|\,\Pi(x)|, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Лема 3 („виправляючий” поліном**).** *Поліном*

$$\mathcal{U}_n(x) := \mathcal{U}_n(x, Y) = h\,\varphi(h) \sum_{j \in H_{10}} t'_{j,n}(x, b, Y)\,\mathrm{sign}\,\Pi(x_j) \in \mathbb{T}_{b(n-1)}$$

задовольняє нерівності

$$\mathcal{U}_n(x)\Pi(x) \ge 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

$$\|\mathcal{U}_n\| \le c_8\,\varphi(h), \tag{3.4}$$

$$|\mathcal{U}_n(x)| \ge c_9\,\varphi(h), \quad x \in \mathbb{R} \setminus O_{10}. \tag{3.5}$$

Доведення. З (2.3) випливає (3.3). Нерівність (3.4) є наслідком (2.5) і (2.2), а саме, для $x \in \mathbb{R}$ отримуємо

$$|\,\mathcal{U}_n(x)| \le c_{10}\,\varphi(h) \sum_{j \in H_{10}} (\Gamma_j(x))^{2ks+2-2s} \le c_{10}\,\varphi(h) \sum_{j=1-n}^{n} \Gamma_j^2(x) \le c_8\,\varphi(h).$$

Аналогічно з (2.6) знаходимо (3.5) для кожного фіксованого $x^* \in \mathbb{R} \setminus O_{10}$.

Лему 3 доведено.

З лем 2 і 3 випливає, що поліном

$$P_n(x) := \mathcal{Q}_n(x) + \frac{c_6}{c_9}\,\mathcal{U}_n(x) \in \mathbb{T}_{(2ks+2)(n-1)} \tag{3.6}$$

задовольняє нерівності (1.4) і (1.5). Дійсно, оцінка (1.5) з $c(k, s) = c_6 + c_8c_6/c_9$ випливає з (3.6), (3.1), (3.4) і (2.1), а нерівність (1.4) – з (3.6), (3.2), (3.5) і (3.3).

Теорему 1 доведено $(N(k, Y) = (2ks + 2)N(Y))$.

Література

1. В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*, Наука, Москва (1977).
2. G. G. Lorentz, K. L. Zeller, *Degree of approximation by monotone polynomials I*, J. Approxim. Theory, **1**, 501 – 504 (1968).
3. G. A. Dzyubenko, J. Gilewicz, *Copositive approximation of periodic functions*, Acta Math. Hungar., **120**, № 4, 301 – 314 (2006).
4. М. Г. Плешаков, П. А. Попов, *Знакосохраняющее приближение периодических функций*, Укр. мат. журн., **55**, № 8, 1087 – 1098 (2003).
5. П. А. Попов, *Один контрприклад у знакозберігаючому наближенні періодичних функцій*, Проблеми теорії наближення функцій: Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **2**, № 2, 176 – 185 (2005).
6. Г. А. Дзюбенко, *Поточечная оценка комонотонного приближения*, Укр. мат. журн., **46**, № 11, 1467 – 1472 (1994).
7. X. Wu, S. P. Zhou, *A counterexample in comonotone approximation in L^p space*, Colloq. Math., **64**, 265 – 274 (1993).
8. D. Leviatan, I. A. Shevchuk, *Nearly comonotone approximation*, J. Approxim. Theory, **95**, 53 – 81 (1998).
9. R. A. DeVore, D. Leviatan, I. A. Shevchuk, *Approximation of monotone functions: A counter example*, Proc. Curves and Surfaces with Applications in CAGD (Chamonix-Mont-Blanc, 1996), Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN (1997), p. 95 – 102.
10. D. Leviatan, I. A. Shevchuk, *Coconvex polynomial approximation*, J. Approxim. Theory, **121**, № 1, 100 – 118 (2003).
11. G. A. Dzyubenko, *Nearly comonotone approximation of periodic functions*, Anal. Theory and Appl., **33**, № 1, 74 – 92 (2017).
12. Г. А. Дзюбенко, *Майже коопукле наближення неперервних періодичних функцій*, Укр. мат. журн., **71**, № 3, 353 – 367 (2019).
13. Г. А. Дзюбенко, *Поточкова оцінка майже копозитивного наближення неперервних функцій алгебраїчними многочленами*, Укр. мат. журн., **69**, № 5, 641 – 649 (2017).
14. H. Whitney, *On functions with bouded n-th differences*, J. Math. Pures et Appl., **36**, № 9, 67 – 95 (1957).
15. J. Gilewicz, Yu. V. Kryakin, I. A. Shevchuk, *Boundedness by 3 of the Whitney interpolation constant*, J. Approxim. Theory, **119**, 271 – 290 (2002).
16. М. Г. Плешаков, П. А. Попов, *Второе неравенство Джексона в знакосохраняющем приближении периодических функций*, Укр. мат. журн., **56**, № 1, 123 – 128 (2004).
17. Г. А. Дзюбенко, *Комонотонне наближення двічі диференційовних періодичних функцій*, Укр. мат. журн., **61**, № 4, 1435 – 1451 (2009).
18. Г. А. Дзюбенко, *Порядки комонотонного наближення періодичних функцій*, Теорія функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **10**, № 1, 110 – 125 (2013).
19. И. А. Шевчук, *Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций*, Наук. думка, Киев (1992).
20. С. Б. Стечкин, *О порядке наилучших приближений непрерывных функций*, Изв. АН СССР, сер. мат., **15**, № 3, 219 – 242 (1951).
21. M. G. Pleshakov, *Comonotone Jackson's inequality*, J. Approxim. Theory, **99**, 409 – 421 (1999).
22. Г. А. Дзюбенко, М. Г. Плешаков, *Комонотонное приближение периодических функций*, Мат. заметки, **83**, вып. 2, 199 – 209 (2008).
23. G. A. Dzyubenko, J. Gilewicz, I. A. Shevchuk, *Piecewise monotone pointwise approximation*, Constr. Approxim., **14**, 311 – 348 (1998).

Одержано 14.11.19