DOI: 10.37863/umzh.v72i4.1141

УДК 517.382+517.52

В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, Рівне)

УЗАГАЛЬНЕННЯ ОЗНАК АБЕЛЯ І ДІРІХЛЕ

We obtain vector analogues of Abel and Dirichlet signs.

Отримано векторні аналоги ознак Абеля і Діріхле.

1. Ознаки Абеля та Діріхле. Важливими в математичному аналізі є такі твердження.

Теорема 1 (ознака Абеля). *Нехай*: 1) *функція* $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ *інтегровна на* $[a,+\infty)$; 2) *функція* $g\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ *монотонна й обмежена. Тоді невласний інтеграл*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(t)g(t)\,dt \tag{1}$$

збігається.

Теорема 2 (ознака Діріхле). *Нехай*: 1) *функція* $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ *інтегровна на відрізках* $[a,b],\ b > a,$ *і* $\sup_{b>a}\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| < +\infty$; 2) *функція* $g\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ *монотонно прямує до* 0 *при* $t \to +\infty$. *Тоді невласний інтеграл* (1) *збігається.*

Теорема 3 (ознака Абеля). *Нехай*: 1) *числовий ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *збігається*; 2) *числова послідовність* $(b_n)_{n\geq 1}$ *монотонна й обмежена. Тоді числовий ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n. \tag{2}$$

збігається.

Теорема 4 (ознака Діріхле). *Нехай*: 1) *частинні суми числового ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *обмежені в сукупності*; 2) *числова послідовність* $(b_n)_{n\geq 1}$ *монотонна і* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. *Тоді числовий ряд* (2) *збігається.*

У перших двох ознаках і далі a — довільний елемент множини дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Обґрунтування наведених ознак можна знайти, наприклад, в [1].

2. Основний об'єкт досліджень. Метою статті є отримання загальних тверджень про збіжність векторних невласних інтегралів і рядів, окремими випадками яких є ознаки Абеля і Діріхле. У цих твердженнях розглядаються функції зі значеннями в банахових просторах, що не є упорядкованими просторами. Це не дозволяє використовувати умову монотонності функцій, яка в ознаках Абеля і Діріхле є суттєвою. Замість таких функцій у статті використано функції обмеженої варіації, що розширило множину застосовності тверджень типу теорем із попереднього пункту.

3. Основні позначення, означення та допоміжні результати. Нехай $\mathbb{C}$ — множина всіх комплексних чисел, X, Y і Z — банахові простори над полем дійсних або комплексних чисел з нормами $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ і $\|\cdot\|_Z$ відповідно і $L(X,Y)$ — банаховий простір лінійних неперервних операторів $A\colon X\to Y$ з нормою $\|A\|_{L(X,Y)}=\sup_{\|x\|_X=1}\|Ax\|_Y$.

Упорядковану пару (X,Y) банахових просторів X і Y будемо називати *правильною*, якщо для довільних елементів $x\in X$ і $y\in Y$ визначено правило дії вектора x на вектор y (добуток векторів), що позначатимемо через xy, і кожний добуток xy є елементом деякого банахового простору $\mathfrak{L}$, що залежить від X, Y та операції добутку векторів.

Очевидно, що пара (X,Y) є правильною, якщо виконується хоча б одна з таких вимог:

1) X — множина $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, а Y — дійсний або комплексний лінійний простір відповідно (у цьому випадку визначено добуток xy вектора y на число x);

2) X — банаховий простір $L(Y,Z)$ (у цьому випадку вираз xy є результатом дії оператора $x\in L(Y,Z)$ на вектор $y\in Y$);

3) x і y — лінійні неперервні оператори, для яких множина значень оператора $y\in Y$, $Y=L(Y_1,X_1)$, є підмножиною області визначення оператора $x\in X$, $X=L(X_1,Z)$, де X_1 і Y_1 — банахові простори; у цьому випадку вираз xy є добутком операторів y і x;

4) $X=Y=H$, де H — гільбертів простір і добуток xy є скалярним добутком векторів x та y;

5) $X=Y=\mathbb{R}^3$ і добуток xy є векторним добутком векторів x та y.

Список таких вимог можна було б продовжити.

Очевидно, що, наприклад, $(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $(\mathbb{C},\mathbb{C})$, $(\mathbb{C},\mathbb{R})$, $(\mathbb{R},X)$, $(\mathbb{C},X)$ (тут X — комплексний банаховий простір), $(\mathbb{R},L(X,Y))$, $(\mathbb{C},L(X,Y))$ (тут $L(X,Y)$ — комплексний банаховий простір) і $(L(X,Y),L(Z,X))$ є правильними парами банахових просторів.

Поняття правильної пари просторів нам потрібне для того, щоб дослідити збіжність якомога ширшого класу невласних інтегралів та рядів.

У подальшому для довільної правильної пари (X,Y) наведемо ознаки збіжності невласного інтеграла

$$\int\limits_a^{+\infty} x(t)y(t)\,dt \tag{3}$$

і ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \tag{4}$$

у випадку, коли $x(t)\in X$, $y(t)\in Y$ для всіх $t\in[a,+\infty)$ і $x_n\in X$, $y_n\in Y$ для всіх $n\in\mathbb{N}$, де $\mathbb{N}$ — множина всіх натуральних чисел.

При дослідженні збіжності (3) і (4) будемо використовувати допоміжні результати, що наводяться далі.

Розглянемо довільні відрізок $[a,b]$ і число $m\in\mathbb{N}$. *Розбиттям* відрізка $[a,b]$ називається множина $T_m=\{t_0,t_1,\ldots,t_m\}$, для якої $a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_{m-1}<t_m=b$. *Діаметром* цього розбиття називається число $\lambda=\lambda(T_m)=\max_i\Delta t_i$, де $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$.

Функція $y\colon[a,+\infty)\to Y$ називається *функцією з обмеженою зміною на відрізку* $[a,b]$, якщо існує така стала C, що, яке б не було розбиття T_m відрізка $[a,b]$, виконано нерівність

$\sum_{i=1}^{m}\|y(t_i)-y(t_{i-1})\|_Y \leq C$. Точна верхня грань таких сум по різних розбиттях відрізка $[a,b]$ називається *повною зміною функції* y *на відрізку* $[a,b]$ і позначається $V(y,[a,b])$. Функція y називається *функцією з обмеженою зміною на* $[a,+\infty)$, якщо величини $V(y,[a,b])$, $b>a$, обмежені в сукупності. При цьому $\lim_{b\to+\infty}V(y,[a,b])$ називається *повною зміною функції* y *на* $[a,+\infty)$ і позначається $V(y,[a,+\infty))$.

Лема 1. *Нехай* $y\colon [a,+\infty)\to Y$ — *функція з обмеженою зміною на* $[a,+\infty)$. *Тоді:* 1) *для кожної збіжної послідовності* $(\xi_k)_{k\geq 1}$ *чисел з інтервалу* (a,b), $b>a$, *для якої* $\lim_{k\to\infty}\xi_k=b$, *послідовність* $(y(\xi_k))_{k\geq 1}$ *є збіжною*; 2) *якщо* $\alpha,\beta\in(a,b)$, $\alpha<\beta$ *і* $\alpha\to b$, *то* $V(y,[\alpha,\beta])\to 0$.

Доведення. Припустимо, що послідовність $(y(\xi_k))_{k\geq 1}$ розбіжна. Існують підпослідовності $(\eta_k)_{k\geq 1}$ і $(\mu_k)_{k\geq 1}$ послідовності $(\xi_k)_{k\geq 1}$ і число $\varepsilon>0$, для яких $\eta_k<\mu_k<\eta_{k+1}$, $k\in\mathbb{N}$, і $\|y(\eta_k)-y(\mu_k)\|_Y\geq\varepsilon$, $k\in\mathbb{N}$, що суперечить обмеженій зміні функції y на $[a,+\infty)$.

Отже, припущення, що послідовність $(y(\xi_k))_{k\geq 1}$ розбіжна, є хибним.

Припустимо, що $V(y,[\alpha,\beta])\not\to 0$ при $\alpha\to b$. Існують число $\delta>0$ і послідовності $(\alpha_n)_{n\geq 1}$, $(\beta_n)_{n\geq 1}$, для яких $\alpha_n<\beta_n<\alpha_{n+1}<b$, $n\in\mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=b$ і $V(y,[\alpha_n,\beta_n])\geq\delta$, $n\in\mathbb{N}$, що суперечить обмеженій зміні функції $y\colon[a,+\infty)\to Y$ на $[a,+\infty)$.

Отже, припущення, що $V(y,[\alpha,\beta])\not\to 0$ при $\alpha\to b$, є хибним.

Лему 1 доведено.

Далі наведемо означення інтегровної на $[a,+\infty)$ функції $x\colon[a,+\infty)\to X$. Зафіксуємо довільне число $b>a$ і розглянемо довільне розбиття T_m відрізка $[a,b]$. Також розглянемо довільну залежну від T_m множину $\Xi_m=\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m\}$, де $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$, $i=\overline{1,m}$.

Функцію x називають *інтегровною на відрізку* $[a,b]$, якщо існує вектор $A\in X$, для якого $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{m}(\Delta t_i)x(\xi_i)=A$. Тут границя не залежить від вибору множин T_m і Ξ_m.

Границю $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{m}(\Delta t_i)x(\xi_i)$ називають інтегралом Рімана від функції $x(t)$ по відрізку $[a,b]$ і позначають через

$$\int_a^b x(t)\,dt. \tag{5}$$

Функцію $x\colon[a,+\infty)\to X$ називають *інтегровною на* $[a,+\infty)$, якщо ця функція інтегровна на кожному відрізку $[a,b]$, $b>a$, й існує границя $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b x(t)\,dt$. Тоді невласний інтеграл

$$\int_a^{+\infty} x(t)\,dt \tag{6}$$

називають *збіжним*.

Очевидно, що інтегровна на $[a,+\infty)$ функція $x\colon[a,+\infty)\to X$ є інтегровною на кожному відрізку $[c,d]$ і кожному проміжку $[c,+\infty)$, де $c>a$.

Зазначимо, що *інтегровна на відрізку* $[a,b]$ *функція* x *є обмеженою на цьому відрізку*. Ця властивість інтегровних на $[a,b]$ функцій зі значеннями в банаховому просторі X випливає з означення інтеграла (5) і встановлюється так само, як і у випадку функцій зі значеннями в $\mathbb{R}$ (див. [1, с. 96, 97]).

Для подальшого важливим є таке твердження.

Лема 2. *Нехай функція* $x\colon [a,+\infty) \to X$ *інтегровна на* $[a,+\infty)$. *Тоді для кожного числа* $b > a$

$$\lim_{\lambda\to 0} \max_{i=\overline{1,m}} \left\| \sum_{k=1}^{i} (\Delta t_k) x(\xi_k) - \int_a^{t_i} x(t)\, dt \right\|_X = 0. \tag{7}$$

Тут $t_0, \ldots, t_m$ — *точки розбиття* T_m *відрізка* $[a,b]$, *а* $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — *точки множини* Ξ_m.

Доведення. Зафіксуємо довільне число $b > a$. На підставі інтегровності функції x на $[a,b]$ існує число $M > 0$, для якого

$$\sup_{t\in[a,b]} \|x(t)\|_X \le M. \tag{8}$$

Розглянемо довільне число $\varepsilon > 0$. Завдяки (8) існує таке розбиття $T_p = \{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_p\}$ відрізка $[a,b]$, що

$$\max_{\nu=\overline{1,p}} (\tau_\nu - \tau_{\nu-1}) < \varepsilon \tag{9}$$

і

$$\sup_{\tau\in[\tau_{\nu-1},\tau_{\nu+1}]} \left\| \int_a^{\tau} x(t)\, dt - \int_a^{\tau_\nu} x(t)\, dt \right\|_X < \varepsilon, \quad \nu = \overline{1, p-1}. \tag{10}$$

Із інтегровності функції x на відрізках $[a, \tau_\nu]$, $\nu = \overline{1, p-1}$, та співвідношення (8) випливає, що

$$\lim_{\lambda\to 0} \left\| \sum_{a<t_k<\tau_\nu} (\Delta t_k) x(\xi_k) - \int_a^{\tau_\nu} x(t)\, dt \right\|_X = 0, \quad \nu = \overline{1, p-1}.$$

Тому існує таке число $\lambda_\varepsilon \in (0, \varepsilon)$, що виконуватимуться нерівності

$$\left\| \sum_{a<t_k<\tau_\nu} (\Delta t_k) x(\xi_k) - \int_a^{\tau_\nu} x(t)\, dt \right\|_X < \varepsilon, \quad \nu = \overline{1, p-1},$$

якщо $0 < \lambda < \lambda_\varepsilon$.

Отже, завдяки (10)

$$\max_{\nu=\overline{1,p-1}} \sup_{\tau\in[\tau_{\nu-1},\tau_{\nu+1}]} \left\| \sum_{a<t_k<\tau_\nu} (\Delta t_k) x(\xi_k) - \int_a^{\tau} x(t)\, dt \right\|_X < 2\varepsilon, \tag{11}$$

якщо $\lambda \in (0, \lambda_\varepsilon)$.

Позначимо через $\tau_{\nu(i)}$ найближчу точку множини $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p\}$ до t_i, для якої $t_i \le \tau_{\nu(i)}$. Очевидно, що

$$\tau_{\nu(i)-1} < t_i \le \tau_{\nu(i)}. \tag{12}$$

Оскільки на підставі (8), (9), (11) і (12)

$$\left\|\sum_{k=1}^{i}(\Delta t_k)x(\xi_k)-\int_a^{t_i}x(t)\,dt\right\|_X \le \left\|\sum_{a<t_k<\tau_\nu(i)}(\Delta t_k)x(\xi_k)-\int_a^{t_i}x(t)\,dt\right\|_X +$$

$$+\left\|\sum_{k=1}^{i}(\Delta t_k)x(\xi_k)-\sum_{a<t_k<\tau_\nu(i)}(\Delta t_k)x(\xi_k)\right\|_X < 2\varepsilon+M\varepsilon,$$

якщо $\lambda\in(0,\lambda_\varepsilon)$, то завдяки довільності вибору числа ε справджується твердження леми.

Лему 2 доведено.

Інтегровність функції $x(t)y(t)$ *на проміжку* $[a,+\infty)$ та відповідно *збіжність* невласного інтеграла (3) визначаються так само, як і для (6).

Оскільки збіжність інтеграла (3) визначається з використанням інтегралів

$$\int_a^b x(t)y(t)\,dt,\quad b>a, \tag{13}$$

то розглянемо їх. Зазначимо, що, як і у випадку інтеграла (5),

$$\int_a^b x(t)y(t)\,dt=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{m}(\Delta t_i)x(\xi_i)y(\xi_i)$$

і границя не залежить від вибору множин T_m і Ξ_m.

Важливим є таке твердження.

Лема 3. *Нехай*: 1) *пара* (X,Y) *банахових просторів* X *і* Y *є правильною*; 2) *функція* $x\colon[a,+\infty)\to X$ *інтегровна на* $[a,+\infty)$; 3) *функція* $y\colon[a,+\infty)\to Y$ *є функцією з обмеженою зміною на кожному відрізку* $[a,b]$, $b>a$. *Тоді функція* $x(t)y(t)$ *є інтегровною на кожному відрізку* $[a,b]$, $b>a$, *і виконується нерівність*

$$\left\|\int_a^b x(t)y(t)\,dt\right\|_{\mathfrak{L}} \le \left\|\int_a^b x(t)\,dt\right\|_X \|y(b-0)\|_Y+\sup_{a\le s\le b}\left\|\int_a^s x(t)\,dt\right\|_X V(y,[a,b]). \tag{14}$$

Доведення. Зафіксуємо довільне число $b>a$. Використаємо довільні розбиття T_m відрізка $[a,b]$, множину Ξ_m і інтегральну суму

$$\sum_{i=1}^{m}(\Delta t_i)x(\xi_i)y(\xi_i) \tag{15}$$

для функції $x(t)y(t)$ на відрізку $[a,b]$.

Покажемо, що існує границя

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{m}(\Delta t_i)x(\xi_i)y(\xi_i). \tag{16}$$

За допомогою перетворення Абеля (див. [1, с. 305, 306]) запишемо суму (15) у вигляді

$$\sum_{i=1}^{m}(\Delta t_i)x(\xi_i)y(\xi_i)=\sum_{i=1}^{m}(\Delta t_i)x(\xi_i)y(\xi_m)-\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{i}(\Delta t_k)x(\xi_k)\Delta y(\xi_i), \tag{17}$$

де $\Delta y(\xi_i)=y(\xi_{i+1})-y(\xi_i)$. Оскільки обидва доданки у правій частині рівності (17) можуть бути розбіжними при $\lambda\to 0$ (це можливо у випадку розривної в точці b функції $y(t)$), то запишемо цю рівність так, щоб відповідні доданки були збіжними при $\lambda\to 0$. Очевидно, що

$$\sum_{i=1}^{m}(\Delta t_i)x(\xi_i)y(\xi_i)=$$

$$=(\Delta t_m)x(\xi_m)y(\xi_m)+\sum_{i=1}^{m-1}(\Delta t_i)x(\xi_i)y(\xi_{m-1})-\sum_{i=1}^{m-2}\sum_{k=1}^{i}(\Delta t_k)x(\xi_k)\Delta y(\xi_i). \tag{18}$$

Покажемо, що права частина цієї рівності має границю при $\lambda\to 0$.

Очевидно, що на підставі обмеженості функцій $x(t)$ і $y(t)$ на відрізку $[a,b]$

$$\lim_{\lambda\to 0}(\Delta t_m)x(\xi_m)y(\xi_m)=0.$$

Також очевидно, що завдяки інтегровності функції $x(t)$ на $[a,b]$ та твердженню леми 1 для другого доданка правої частини (18) справджується рівність

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{m-1}(\Delta t_i)x(\xi_i)y(\xi_{m-1})=\int_a^b x(t)\,dt\;y(b-0).$$

Покажемо, що третій доданок у правій частині рівності (18) при $\lambda\to 0$ також є збіжним, тобто існує границя

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{m-2}\sum_{k=1}^{i}(\Delta t_k)x(\xi_k)\Delta y(\xi_i). \tag{19}$$

Запишемо $\sum_{i=1}^{m-2}\sum_{k=1}^{i}(\Delta t_k)x(\xi_k)\Delta y(\xi_i)$ у вигляді

$$\sum_{i=1}^{m-2}\sum_{k=1}^{i}(\Delta t_k)x(\xi_k)\Delta y(\xi_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m-2}\left(\sum_{k=1}^{i}(\Delta t_k)x(\xi_k)-\int_a^{t_i}x(t)\,dt\right)\Delta y(\xi_i)+\sum_{i=1}^{m-2}\int_a^{t_i}x(t)\,dt\Delta y(\xi_i). \tag{20}$$

У правій частині рівності (20) перший доданок прямує до 0 при $\lambda\to 0$, оскільки за лемою 2 справджується співвідношення (7) і $V(y,[a,b])<+\infty$ за умовою 3 леми 3.

Покажемо, що другий доданок у правій частині рівності (20) також збігається при $\lambda\to 0$, тобто існує границя

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{m-2}\int_a^{t_i} x(t)\,dt\Delta y(\xi_i). \tag{21}$$

Використаємо критерій Коші [2, с. 78]. Розглянемо довільні розбиття

$$T'_{m_1}=\{t'_0,t'_1,\ldots,t'_{m_1}\}\quad \text{і}\quad T''_{m_2}=\{t''_0,t''_1,\ldots,t''_{m_2}\}$$

відрізка $[a,b]$ і множини

$$\Xi'_{m_1}=\{\xi'_1,\xi'_2,\ldots,\xi'_{m_1}\}\quad \text{і}\quad \Xi''_{m_2}=\{\xi''_1,\xi''_2,\ldots,\xi''_{m_2}\},$$

де ξ'_i і ξ''_i — довільні точки відрізків $[t'_{i-1},t'_i]$ і $[t''_{i-1},t''_i]$ відповідно. Нехай

$$\lambda'=\max_i\left|t'_i-t'_{i-1}\right|\quad \text{і}\quad \lambda''=\max_i\left|t''_i-t''_{i-1}\right|.$$

Покажемо, що

$$\lim_{\lambda'\to 0,\ \lambda''\to 0}\left\|\sum_{i=1}^{m_1-2}\int_a^{t'_i} x(t)\,dt\Delta y(\xi'_i)-\sum_{i=1}^{m_2-2}\int_a^{t''_i} x(t)\,dt\Delta y(\xi''_i)\right\|_{\mathfrak{L}}=0. \tag{22}$$

Тоді за критерієм Коші буде існувати границя (21).

Використаємо множину $\Xi_{m_3}=\Xi'_{m_1}\cup\Xi''_{m_2}$, де m_3 — число елементів цієї множини. Елементи множини Ξ_{m_3} будемо позначати через η_l, де $l=\overline{1,m_3}$.

Визначимо відображення $D'_{m_3}\colon\left(\Xi'_{m_3}\setminus\{\eta_{m_3}\}\right)\to T'_{m_1}$ і $D''_{m_3}\colon\left(\Xi''_{m_3}\setminus\{\eta_{m_3}\}\right)\to T''_{m_2}$ за допомогою рівностей

$$D'_{m_3}\eta_l=t'_i \tag{23}$$

і

$$D''_{m_3}\eta_l=t''_i, \tag{24}$$

де t'_i — такий елемент множини T'_{m_1}, що відрізок $[t'_{i-1},t'_i]$ містить точку η_l, і, аналогічно, t''_i — такий елемент множини T''_{m_2}, що відрізок $[t''_{i-1},t''_i]$ містить точку η_l.

Очевидно, що

$$\lim_{\lambda'\to 0,\ \lambda''\to 0}\ \max_{l=\overline{1,m_3-1}}\left|D'_{m_3}\eta_l-D''_{m_3}\eta_l\right|=0. \tag{25}$$

Розглянемо випадок

$$\xi'_{m_1-1}=\xi''_{m_2-1}. \tag{26}$$

Завдяки (23) і (24) справджуються рівності

$$\sum_{i=1}^{m_1-2}\int_a^{t'_i} x(t)\,dt\Delta y(\xi'_i)=\sum_{l\in\left\{l\,:\,D'_{m_3}\eta_l\le t'_{m_1-2}\right\}}\ \int_a^{D'_{m_3}\eta_l} x(t)\,dt\Delta y(\eta_l) \tag{27}$$

і

$$\sum_{i=1}^{m_2-2} \int\limits_a^{t_i''} x(t)\,dt\Delta y(\xi_i'') = \sum_{l \in \left\{ l\,:\, D_{m_3}''\eta_l \le t_{m_2-2}'' \right\}} \int\limits_a^{D_{m_3}''\eta_l} x(t)\,dt\Delta y(\eta_l). \tag{28}$$

Зазначимо, що

$$\left\{ l : D_{m_3}'\eta_l \le t_{m_1-2}' \right\} = \left\{ l : D_{m_3}''\eta_l \le t_{m_2-2}'' \right\}.$$

Тому завдяки (8), (27) і (28)

$$\left\| \sum_{i=1}^{m_1-2} \int\limits_a^{t_i'} x(t)\,dt\Delta y(\xi_i') - \sum_{i=1}^{m_2-2} \int\limits_a^{t_i''} x(t)\,dt\Delta y(\xi_i'') \right\|_{\mathfrak{L}} =$$

$$= \left\| \sum_{l \in \left\{ l\,:\, D_{m_3}'\eta_l \le t_{m_1-2}' \right\}} \int\limits_{D_{m_3}''\eta_l}^{D_{m_3}'\eta_l} x(t)\,dt\Delta y(\eta_l) \right\|_{\mathfrak{L}} \le \sum_{l=1}^{m_3-2} \left\| \int\limits_{D_{m_3}''\eta_l}^{D_{m_3}'\eta_l} x(t)\,dt \right\|_X \|\Delta y(\eta_l)\|_Y \le$$

$$\le \max_{l=\overline{1,m_3-1}} \left| D_{m_3}'\eta_l - D_{m_3}''\eta_l \right| MV(y,[a,b]).$$

Звідси на підставі (25) у випадку виконання (26) випливає (22).

Далі розглянемо випадок

$$\xi_{m_1-1}' \ne \xi_{m_2-1}''. \tag{29}$$

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $\xi_{m_1-1}' > \xi_{m_2-1}''$. У цьому випадку позначимо через l_0 натуральне число, для якого $\eta_{l_0} = \xi_{m_2-1}'' < \eta_{l_0+1} \le \xi_{m_1-1}'$. Тоді

$$\left\| \sum_{i=1}^{m_1-2} \int\limits_a^{t_i'} x(t)\,dt\Delta y(\xi_i') - \sum_{i=1}^{m_2-2} \int\limits_a^{t_i''} x(t)\,dt\Delta y(\xi_i'') \right\|_{\mathfrak{L}} =$$

$$= \left\| \sum_{l \in \left\{ l\,:\, D_{m_3}'\eta_l \le t_{m_1-2}' \right\}} \int\limits_a^{D_{m_3}'\eta_l} x(t)\,dt\Delta y(\eta_l) - \sum_{l \in \left\{ l\,:\, D_{m_3}'\eta_l \le t_{m_1-2}' \right\}} \int\limits_a^{D_{m_3}''\eta_l} x(t)\,dt\Delta y(\eta_l) \right\|_{\mathfrak{L}} \le$$

$$\le \left\| \sum_{l=1}^{l_0} \int\limits_{D_{m_3}''\eta_l}^{D_{m_3}'\eta_l} x(t)\,dt\Delta y(\eta_l) \right\|_{\mathfrak{L}} + \left\| \sum_{l=l_0}^{m_3-1} \int\limits_a^{D_{m_3}'\eta_l} x(t)\,dt\Delta y(\eta_l) \right\|_{\mathfrak{L}}.$$

Аналогічно, як і у випадку виконання рівності (26),

$$\lim_{\lambda'\to 0,\ \lambda''\to 0} \left\| \sum_{l=1}^{l_0} \int\limits_{D_{m_3}''\eta_l}^{D_{m_3}'\eta_l} x(t)\,dt\Delta y(\eta_l) \right\|_{\mathfrak{L}} = 0.$$

Також справджується рівність

$$\lim_{\lambda' \to 0,\ \lambda'' \to 0} \left\| \sum_{l=l_0}^{m_3-1} \int_a^{D'_{m_3}\eta_l} x(t)\,dt\Delta y(\eta_l) \right\|_{\mathfrak{L}} = 0,$$

оскільки

$$\left\| \sum_{l=l_0}^{m_3-1} \int_a^{D'_{m_3}\eta_l} x(t)\,dt\Delta y(\eta_l) \right\|_{\mathfrak{L}} \le (b-a)MV(y, [D'_{m_3}\eta_{l_0}, \eta_{m_3-1}])$$

і на підставі леми 1 $\lim_{\lambda' \to 0,\ \lambda'' \to 0} V(y, [D'_{m_3}\eta_{l_0}, \eta_{m_3-1}]) = 0$.

Отже, співвідношення (22) справджується й у випадку виконання нерівності (29).

Таким чином, границя (19), а отже, і границя (16) існують. Це означає, що функція $x(t)y(t)$ інтегровна на кожному відрізку $[a,b]$, $b > a$.

Нерівність (14) випливає із співвідношення (17), означень інтегралів (5) і (13), означення повної зміни функції на відрізку та леми 1.

Лему 3 доведено.

4. Аналоги ознак Абеля і Діріхле для невласного інтеграла (3). Справджуються такі твердження.

Теорема 5. *Нехай*: 1) *пара* (X,Y) *банахових просторів* X *і* Y *є правильною*; 2) *функція* $x\colon [a,+\infty) \to X$ *інтегровна на* $[a,+\infty)$; 3) *функція* $y\colon [a,+\infty) \to Y$ *є функцією з обмеженою зміною на* $[a,+\infty)$. *Тоді невласний інтеграл* (3) *збігається.*

Теорема 6. *Нехай*: 1) *пара* (X,Y) *банахових просторів* X *і* Y *є правильною*; 2) *функція* $x\colon [a,+\infty) \to X$ *інтегровна на відрізках* $[a,b]$, $b > a$, *і* $\sup_{b>a} \left\| \int_a^b x(t)\,dt \right\|_X < +\infty$; 3) *функція* $y\colon [a,+\infty) \to Y$ *є функцією з обмеженою зміною на* $[a,+\infty)$ *і прямує до* 0 *при* $t \to +\infty$. *Тоді невласний інтеграл* (3) *збігається.*

Очевидно, що теореми 1 і 2 є окремими випадками теорем 5 і 6 відповідно.

***Доведення теореми* 6.** За лемою 3 та умовами теореми функція $x(t)y(t)$ інтегровна на кожному відрізку $[a,b]$, $b > a$. Покажемо, що існує границя $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b x(t)y(t)\,dt$, тобто невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} x(t)y(t)\,dt$ збігається.

Для збіжності цього інтеграла достатньо показати (за критерієм Коші), що

$$\lim_{c\to+\infty,\ d\to+\infty} \int_c^d x(t)y(t)\,dt = 0. \tag{30}$$

Використовуючи нерівність (14), отримуємо

$$\left\| \int_c^d x(t)y(t)\,dt \right\|_{\mathfrak{L}} \le \left\| \int_c^d x(t)\,dt \right\|_X \|y(d-0)\|_Y + \sup_{c\le s\le d} \left\| \int_c^s x(t)\,dt \right\|_X V(y,[c,d]).$$

Оскільки на підставі умови 2 теореми існує таке число $L > 0$, що для всіх $\alpha, \beta \in [a,+\infty)$

$$\left\| \int\limits_{\alpha}^{\beta} x(t)\,dt \right\|_X \leq L,$$

то

$$\left\| \int\limits_{c}^{d} x(t)y(t)\,dt \right\|_{\mathfrak{L}} \leq L\|y(d-0)\|_Y + LV(y,[c,d]).$$

Звідси випливає співвідношення (30), оскільки за умовою 3 теореми $\lim_{d\to+\infty}\|y(d-0)\|_Y = 0$ і $\lim_{c\to+\infty,\ d\to+\infty} V(y,[c,d]) = 0$.

Теорему 6 доведено.

***Доведення теореми* 5.** Завдяки умові 3 теореми 5 функцію $y\colon [a,+\infty) \to Y$ можна записати у вигляді

$$y(t) = C + z(t),\ t \geq a, \tag{31}$$

де $C \in Y$ і $z\colon [a,+\infty) \to Y$ — функція з обмеженою зміною на $[a,+\infty)$, що прямує до 0 при $t \to +\infty$ (таке зображення єдине), і $V(y,[a,+\infty)) = V(z,[a,+\infty))$. На підставі (31) $x(t)y(t) = x(t)C + x(t)z(t)$. Тому

$$\int\limits_{a}^{+\infty} x(t)y(t)\,dt = \int\limits_{a}^{+\infty} x(t)C\,dt + \int\limits_{a}^{+\infty} x(t)z(t)\,dt.$$

Тут інтеграл $\int_a^{+\infty} x(t)C\,dt$ збігається завдяки умові 1 теореми 5, а інтеграл $\int_a^{+\infty} x(t)z(t)\,dt$ — завдяки теоремі 6. Отже, інтеграл (3) є збіжним.

Теорему 5 доведено.

***Зауваження* 1.** Твердження теорем 5 і 6 не зміняться, якщо в умовах цих теорем $x(t)$ і $y(t)$ поміняти місцями.

***Зауваження* 2.** У випадку $X = Y = \mathbb{R}$ теореми 5 і 6 рівносильні теоремам 1 і 2 відповідно, оскільки функція $y(t)$ обмеженої зміни на $[a,+\infty)$ є різницею $y_1(t) - y_2(t)$ обмежених і монотонних на $[a,+\infty)$ функцій $y_1(t)$ і $y_2(t)$ [3], для яких $\lim_{t\to+\infty} y_1(t) = \lim_{t\to+\infty} y_2(t) = 0$, якщо $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$, і

$$\int\limits_{a}^{+\infty} x(t)y(t)\,dt = \int\limits_{a}^{+\infty} x(t)y_1(t)\,dt - \int\limits_{a}^{+\infty} x(t)y_2(t)\,dt.$$

Наведемо приклади невласних інтегралів, до дослідження збіжності яких застосовні теореми 5 і 6.

***Приклад* 1.** Розглянемо інтеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,(A + g(t)B)\;dt, \tag{32}$$

де A і B — лінійні неперервні оператори, що діють у банаховому просторі E, і g — функція обмеженої зміни на $[1,+\infty)$.

Оскільки невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ збігається за теоремою 2 (див. [1]) і функція $G(t) = A + g(t)B$ є функцією обмеженої зміни на $[1, +\infty)$, то на підставі теореми 5 невласний інтеграл (32) збігається.

***Приклад* 2.** Розглянемо майже періодичну функцію

$$F(t) = \sum_n \exp\{i\lambda_n t\} A_n, \tag{33}$$

де $\lambda_n \in \mathbb{R}$ і $A_n \in L(E, E)$. Вважаємо, що

$$\sup_{t\geq 1} \left\| \int\limits_0^t F(s)\, ds \right\|_{L(E,E)} < +\infty.$$

Це співвідношення виконується, якщо, наприклад, число доданків у правій частині (33) скінченне і $\lambda_n \neq 0$ для всіх n.

Також розглянемо функцію $G(t) = \frac{\sin\sqrt{t}}{t^2} I$, де I — одиничний елемент алгебри $L(E, E)$. Легко перевірити, що $G(t)$ — функція обмеженої зміни на $[1, +\infty)$ і $\lim_{t\to+\infty} G(t) = O$. На підставі теореми 6 невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} F(t)G(t)\, dt$ збігається.

5. Аналоги ознак Абеля і Діріхле для ряду (4). Справджуються такі твердження.

Теорема 7. *Нехай*: 1) *пара* (X, Y) *банахових просторів* X *і* Y *є правильною*; 2) *ряди* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *і* $\sum_{n=2}^{\infty} \|y_n - y_{n-1}\|_Y$, *де* $x_n \in X$, $y_n \in Y$, $n \in \mathbb{N}$, *збігаються. Тоді ряд* (4) *збігається.*

Теорема 8. *Нехай*: 1) *пара* (X, Y) *банахових просторів* X *і* Y *є правильною*; 2) *для ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, *де* $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, *частинні суми обмежені в сукупності, тобто* $\sup_{m\geq 1} \left\| \sum\limits_{n=1}^{m} x_n \right\|_X < +\infty$; 3) *ряд* $\sum_{n=2}^{\infty} \|y_n - y_{n-1}\|_Y$, *де* $y_n \in Y$, $n \in \mathbb{N}$, *збігається і* $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. *Тоді ряд* (4) *збігається.*

Очевидно, що теореми 7 і 8 узагальнюють теореми 3 і 4 відповідно.

Теореми 7 і 8 — це окремі випадки теорем 5 і 6 відповідно. Справді, розглянемо функції $u\colon [1, +\infty) \to X$ і $v\colon [1, +\infty) \to Y$, що визначаються рівностями

$$u(t) = x_{[t]} \quad \text{і} \quad v(t) = y_{[t]}, \quad t \geq 1,$$

де $[t]$ — ціла частина числа t.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \tag{34}$$

і невласний інтеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} x_{[t]} y_{[t]}\, dt \tag{35}$$

одночасно збігаються або розбігаються. Справді, якщо ряд (34) збігається, то

$$\lim_{k,\ l\to\infty}\sum_{n=k}^{l} x_n y_n = 0 \tag{36}$$

і, отже, $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$. Тому

$$\lim_{c,\ d\to+\infty}\int\limits_{c}^{d} x_{[t]}y_{[t]}\,dt = 0. \tag{37}$$

Звідси випливає збіжність інтеграла (35). Якщо збігається інтеграл (35), то виконуються співвідношення (37), а отже, і співвідношення $\lim_{c,\ d\to+\infty}\int_{[c]}^{[d]} x_{[t]}y_{[t]}\,dt = 0$, що рівносильне (36). Тому збігається ряд (34).

З умов теорем 7 і 8, очевидних рівностей

$$V(v,[1,+\infty)) = \sum_{n=2}^{\infty}\|y_n - y_{n-1}\|_Y,$$

$$\left\|\int\limits_{1}^{m} u(t)\,dt\right\|_X = \left\|\sum_{n=1}^{m} x_n\right\|_X$$

та з того, що $\lim_{b\to+\infty}\left\|\int_{[b]}^{b} u(t)\,dt\right\|_X = 0$ внаслідок збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, випливає, що функції $u(t) = x_{[t]}$ і $v(t) = y_{[t]}$ задовольняють умови теорем 5 і 6 відповідно. Тому теореми 7 і 8 випливають із теорем 5 і 6.

***Зауваження* 3.** У випадку числових рядів теореми 7 і 8 розглянуто в [4].

***Зауваження* 4.** Твердження теорем 7 і 8 не зміняться, якщо в умовах цих теорем x_n і y_n поміняти місцями.

Наведемо приклади рядів, до дослідження збіжності яких застосовні теореми 7 і 8.

***Приклад* 3.** Нехай $A\colon E\to E$ — лінійний неперервний оператор, $\sigma(A)$ — його спектр, $a_n,\ n\in\mathbb{N}$, — довільні числа, для яких $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n| < +\infty$, і u — ненульовий елемент банахового простору E. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-A} a_n u. \tag{38}$$

Будемо вважати, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-A}$ збігається (у [5] показано, що цей ряд збігається лише у випадку $\sigma(A)\subset\{\lambda\in\mathbb{C}\colon \mathrm{Re}\lambda > 1\}$). За теоремою 7 ряд (38) збігається.

***Приклад* 4.** Нехай $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_p$ — довільні додатні числа, $A_1,A_2,\ldots,A_p$ — лінійні неперервні оператори, що діють у банаховому просторі E, і $b_n,\ n\in\mathbb{N}$, — числа, для яких $\sum_{n=1}^{\infty}|b_{n+1}-b_n| < +\infty$ і $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\sum_{k=1}^{p}(\sin\omega_k n)A_k\right). \tag{39}$$

Оскільки

$$\sin\omega_k + \sin 2\omega_k + \ldots + \sin m\omega_k = \frac{\sin\dfrac{m+1}{2}\omega_k \sin\dfrac{m\omega_k}{2}}{\sin\dfrac{\omega_k}{2}}$$

(див. [6]), то

$$\sup_{m\geq 1}\left\|\sum_{n=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{p}(\sin\omega_k n)A_k\right)\right\|_{L(E,E)} < +\infty.$$

Тому завдяки теоремі 8 та вимогам до чисел $b_n,\ n\in\mathbb{N}$, ряд (39) збігається.

Література

1. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. 2, Наука, Москва (1968).
2. А. Я. Дороговцев, *Математический анализ. Краткий курс в современном изложении*, Факт, Киев (2004).
3. И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Наука, Москва (1974).
4. В. Ю. Слюсарчук, *Загальні теореми про збіжність числових рядів*, Вид-во Рівнен. техн. ун-ту, Рівне (2001).
5. В. Ю. Слюсарчук, *Умови збіжності операторного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-A}$, Наук. вісн. Чернів. ун-ту, Математика, вип. 485, 113 – 117 (2009).
6. Г. Б. Двайт, *Таблицы интегралов и другие математические формулы*, Наука, Москва (1973).

Одержано 22.11.19