К О Р О Т К І П О В І Д О М Л Е Н Н Я

УДК 517.929

Г. П. Пелюх, Д. В. Бельский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЛИНЕЙНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

We establish new properties of the solutions of a differential-functional equation with linearly transformed argument.

Встановлено нові властивості розв'язків диференціально-функціонального рівняння з лінійно перетвореним аргументом.

В данной работе рассматривается скалярное уравнение

$$x'(t) = ax(t) + bx(qt) + cx'(qt) + f(t), \tag{1}$$

где $\{a, b, c\} \subset \mathrm{C},\ 0 < q < 1,\ f \in C(0, +\infty)$, которое при $c = 0$ изучалось в [1], а при $c \neq 0$ — в [2]. В дальнейшем будет показано, что между гладкостью решения уравнения (1) и его асимптотическим поведением существует принципиальная связь. Поскольку в [1,2] применялись методы, для которых необходима достаточно высокая гладкость решений, то данная статья, не содержащая подобных требований, является логическим продолжением начатых там исследований и небольшим уточнением метода оценки решений уравнения (1) через фундаментальное решение, который был разработан в статье [3].

Фундаментальное решение $G(t, t_0)$ — это единственное непрерывное решение начальной задачи

$$x'(t) = ax(t) + bx(qt) + cx'(qt), \quad t \geq t_0 > 0, \tag{2}$$

$$x(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < t_0, \\ 1, & t = t_0. \end{cases} \tag{3}$$

Основываясь на представлении решений уравнения (2) рядами Дирихле в [4], будем искать решение задачи (2), (3) в виде

$$G(t, t_0) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} D_{k,l} e^{q^{-l} a \left(q^k t - t_0\right)}, \quad t \in \left[q^{-n} t_0, q^{-n-1} t_0\right], \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{4}$$

Так как $G(t, t_0) = e^{a(t-t_0)}$ для $t \in [t_0, q^{-1} t_0]$, то $D_{0,0} = 1$. Применяя метод шагов к начальной задаче (2), (3), для коэффициентов в формуле (4) получаем рекуррентные соотношения

$$aD_{k,k} - D_{k,k} a = 0,$$

$$aD_{k,l} - q^{k-l} a D_{k,l} = -bD_{k-1,l} - q^{k-l-1} ac D_{k-1,l}, \quad l = 0, 1, \ldots, k-1,$$

и условие непрерывности функции $G(t,t_0)$ в точках $t=q^{-k}t_0$

$$D_{k,k}=-\sum_{l=0}^{k-1}D_{k,l},\quad k=1,2,\ldots.$$

Теорема [3]. *Если $a\neq 0$, то фундаментальное решение имеет вид*

$$G(t,t_0)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\left(\prod_{j=1}^{k-l}\frac{a^{-1}b+q^{k-l-j}c}{1-q^j}\right)\left(\prod_{j=1}^{l}\frac{c+q^{l-j}a^{-1}b}{1-q^j}\right)e^{q^{-l}a\left(q^kt-t_0\right)},\tag{5}$$
$$t\in\left[q^{-n}t_0,q^{-n-1}t_0\right],\quad n=0,1,\ldots.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи фундаментального решения.

***Пример* 1.** Пусть $a^{-1}b=-1$, $c=q^{-1}$, $a<0$. Тогда для $t\in[q^{-n}t_0,q^{-n-1}t_0]$, $n=0,1,\ldots$, фундаментальное решение имеет вид

$$G(t,t_0)=e^{a(t-t_0)}-\sum_{k=1}^{n}q^{-k}\left\{e^{aqq^{-k}\left(q^kt-t_0\right)}-e^{aq^{-k}\left(q^kt-t_0\right)}\right\}\leq$$
$$\leq 1-q^{-n}\left\{e^{aqq^{-n}(q^nt-t_0)}-e^{aq^{-n}(q^nt-t_0)}\right\}.$$

Аргумент в степени экспоненты в правой части последнего неравенства изменяется в пределах

$$0\leq q^{-n}\left(q^nt-t_0\right)\leq q^{-n}\left(q^{-1}t_0-t_0\right)\to+\infty,\quad n\to+\infty,$$

поэтому найдется такое число $t_n\in[q^{-n}t_0,q^{-n-1}t_0]$, что $q^{-n}\left(q^nt_n-t_0\right)=1$. Отсюда следует неравенство

$$G\left(t_n,t_0\right)\leq 1-q^{-n}\left\{e^{aq}-e^{a}\right\}\leq 1-q\frac{t_n}{t_0}\left\{e^{aq}-e^{a}\right\}.$$

Последнее неравенство означает, что асимптотическое поведение непрерывного, кусочно непрерывно дифференцируемого решения $G(t,t_0)$ отличается от поведения достаточно гладких решений в [2].

***Пример* 2.** Пусть $a^{-1}b=-1$, $c=q$, $a<0$. Тогда для $t\in[q^{-n}t_0,q^{-n-1}t_0]$, $n=0,1,\ldots$, фундаментальное решение имеет вид

$$G(t,t_0)=e^{a(t-t_0)}+\sum_{k=1}^{n}\left(e^{a\left(q^kt-t_0\right)}-e^{q^{-1}a\left(q^kt-t_0\right)}\right)\geq e^{a(q^nt-t_0)}-e^{q^{-1}a(q^nt-t_0)}.$$

Отсюда следует, что

$$G\left(q^{-n-1}t_0,t_0\right)\geq e^{a\left(q^{-1}t_0-t_0\right)}-e^{aq^{-1}\left(q^{-1}t_0-t_0\right)}>0.$$

Последнее неравенство означает, что при уменьшении коэффициента c по сравнению с предыдущим примером невозможно получить асимптотическую оценку для решения $G(t,t_0)$ меньшую, чем для достаточно гладких решений в [2].

***Пример* 3.** Пусть $a^{-1}b = -1,\ c = 1$. Тогда для $t \in [q^{-n}t_0, q^{-n-1}t_0],\ n = 0, 1, \ldots,$ фундаментальное решение уравнения $x'(t) = ax(t) - ax(qt) + x'(qt)$ имеет вид

$$G(t, t_0) = e^{a(t-t_0)}.$$

Указанное уравнение имеет частное решение $x_1(t) \equiv 1$. Третий пример показывает сложности, которые возникают при выводе аналога формулы вариации произвольных постоянных на основе непрерывного фундаментального решения $G(t, t_0)$.

Докажем следующую лемму. В дальнейшем числа M_j — это неотрицательные постоянные.

Лемма. *Если* $a \neq 0$, *то для фундаментального решения* $G(t, t_0)$ *выполняются оценки*:

1) $\operatorname{Re} a = 0,\ bc \neq 0,\ |c| > |a^{-1}b|,\ |c| = 1 \colon |G(t, t_0)| \leq M_1 \left(\ln\left(\dfrac{t}{t_0}\right) + 1\right),\ t \geq t_0;$

2) $\operatorname{Re} a = 0,\ bc \neq 0,\ |c| > |a^{-1}b|,\ |c| < 1 \colon |G(t, t_0)| \leq M_1,\ t \geq t_0;$

3) $\operatorname{Re} a = 0,\ bc \neq 0,\ |c| > |a^{-1}b|,\ |c| > 1 \colon |G(t, t_0)| \leq M_1 \left(\dfrac{t}{t_0}\right)^{\frac{\ln|c|}{\ln q^{-1}}},\ t \geq t_0;$

4) $\operatorname{Re} a = 0,\ b \neq 0,\ |c| < |a^{-1}b|,\ |a^{-1}b| < 1 \colon |G(t, t_0)| \leq M_1,\ t \geq t_0;$

5) $\operatorname{Re} a = 0,\ b \neq 0,\ |c| < |a^{-1}b|,\ |a^{-1}b| = 1 \colon |G(t, t_0)| \leq M_1 \left(\ln\left(\dfrac{t}{t_0}\right) + 1\right),\ t \geq t_0;$

6) $\operatorname{Re} a = 0,\ b \neq 0,\ |c| < |a^{-1}b|,\ |a^{-1}b| > 1 \colon |G(t, t_0)| \leq M_1 \left(\dfrac{t}{t_0}\right)^{\frac{\ln|a^{-1}b|}{\ln q^{-1}}},\ t \geq t_0;$

7) $\operatorname{Re} a = 0,\ bc \neq 0,\ |c| = |a^{-1}b|,\ |a^{-1}b| < 1 \colon |G(t, t_0)| \leq M_1,\ t \geq t_0;$

8) $\operatorname{Re} a = 0,\ bc \neq 0,\ |c| = |a^{-1}b|,\ |a^{-1}b| > 1 \colon |G(t, t_0)| \leq M_1 \left(\dfrac{t}{t_0}\right)^{\frac{\ln|a^{-1}b|}{\ln q^{-1}}} \left(\ln\left(\dfrac{t}{t_0}\right) + 1\right),$
$t \geq t_0;$

9) $\operatorname{Re} a = 0,\ bc \neq 0,\ |c| = |a^{-1}b|,\ |a^{-1}b| = 1 \colon |G(t, t_0)| \leq M_1 \left(\ln\left(\dfrac{t}{t_0}\right) + 1\right)^2,\ t \geq t_0;$

10) $\operatorname{Re} a < 0,\ bc \neq 0,\ |c| > |a^{-1}b| \colon |G(t, t_0)| \leq M_1 \left(\dfrac{t}{t_0}\right)^{\frac{\ln|c|}{\ln q^{-1}}},\ t \geq t_0;$

11) $\operatorname{Re} a < 0,\ bc \neq 0,\ |c| = |a^{-1}b| \colon |G(t, t_0)| \leq M_1 \left(\dfrac{t}{t_0}\right)^{\frac{\ln|a^{-1}b|}{\ln q^{-1}}} \left(\ln\left(\frac{t}{t_0}\right) + 1\right),\ t \geq t_0;$

12) $\operatorname{Re} a < 0,\ b \neq 0,\ |c| < |a^{-1}b| \colon |G(t, t_0)| \leq M_1 \left(\dfrac{t}{t_0}\right)^{\frac{\ln|a^{-1}b|}{\ln q^{-1}}},\ t \geq t_0;$

13) $\operatorname{Re} a = 0,\ b = 0,\ |c| < 1 \colon |G(t, t_0)| \leq M_1,\ t \geq t_0;$

14) $\operatorname{Re} a = 0,\ b = 0,\ |c| = 1 \colon |G(t, t_0)| \leq M_1 \left(\ln\left(\dfrac{t}{t_0}\right) + 1\right),\ t \geq t_0;$

15) $\operatorname{Re} a = 0,\ b = 0,\ |c| > 1 \colon |G(t, t_0)| \leq M_1 \left(\dfrac{t}{t_0}\right)^{\frac{\ln|c|}{\ln q^{-1}}},\ t \geq t_0;$

16) $\operatorname{Re} a < 0,\ b = 0,\ c \neq 0 \colon |G(t, t_0)| \leq M_1 \left(\dfrac{t}{t_0}\right)^{\frac{\ln|c|}{\ln q^{-1}}},\ t \geq t_0.$

Доказательство. Применив формулу (5), в случае $\operatorname{Re} a = 0$ необходимо продолжить оценку

$$|G(t,t_0)| \le \left(\prod_{j=1}^{+\infty} \frac{1+q^{j-1}|ab^{-1}c|}{1-q^j}\right)\left(\prod_{j=1}^{+\infty} \frac{1+q^{j-1}|a^{-1}bc^{-1}|}{1-q^j}\right)\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}|a^{-1}b|^{k-l}|c|^l,$$

если $bc \ne 0$, и

$$|G(t,t_0)| \le \left(\prod_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{1-q^j}\right)^2 \sum_{k=0}^{n}|c|^k \sum_{l=0}^{k} q^{\frac{(k-l-1)(k-l)}{2}},$$

если $b=0,\ c\ne 0$.

В случае $\operatorname{Re} a < 0,\ bc \ne 0$ для $n \ge 1$ необходимо продолжить неравенство

$$|G(t,t_0)| \le M_2|a^{-1}b|^n \sum_{l=0}^{n}\left(\frac{|c|}{|a^{-1}b|}\right)^l + M_2\sum_{k=0}^{n-1}|a^{-1}b|^k \sum_{l=0}^{k}\left(\frac{|c|}{|a^{-1}b|}\right)^l e^{q^{-l}\operatorname{Re} a\left(q^k t - t_0\right)},$$

где

$$M_2 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left(\prod_{j=1}^{+\infty} \frac{1+q^{j-1}|ab^{-1}c|}{1-q^j}\right)\left(\prod_{j=1}^{+\infty} \frac{1+q^{j-1}|a^{-1}bc^{-1}|}{1-q^j}\right),$$

использовав оценку

$$e^{q^{-l}\operatorname{Re} a\left(q^k t - t_0\right)} \le e^{\operatorname{Re} a(1-q)t_0 q^{k-n-l}} \le K_m (q^{k-n-l})^{-m} = K_m\,(q^m)^{n-k+l},$$

где $0 \le k \le n-1,\ m \in \mathrm{N},\ K_m$ — некоторая постоянная, и выбрав m так, чтобы выполнялись неравенства $\dfrac{|c|}{|a^{-1}b|}q^m < 1$ и $\dfrac{|a^{-1}b|}{q^m} > 1$.

В случае $\operatorname{Re} a < 0,\ b = 0,\ c \ne 0$ для $n \ge 1$ аналогичным образом необходимо продолжить оценку

$$|G(t,t_0)| \le M_3|c|^n \sum_{l=0}^{n} q^{\frac{(l-1)l}{2}} + M_3 \sum_{k=0}^{n-1}|c|^k \sum_{l=0}^{k} q^{\frac{(l-1)l}{2}} e^{q^{-l}\operatorname{Re} a\left(q^k t - t_0\right)} \le$$

$$\le \left(M_3|c|^n + M_3\sum_{k=0}^{n-1}|c|^k e^{\operatorname{Re} a\left(q^k t - t_0\right)}\right)\sum_{l=0}^{+\infty} q^{\frac{(l-1)l}{2}},$$

где $M_3 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left(\prod_{j=1}^{+\infty}\dfrac{1}{1-q^j}\right)^2$, использовав неравенство

$$e^{\operatorname{Re} a\left(q^k t - t_0\right)} \le e^{\operatorname{Re} a(1-q)t_0 q^{k-n}} \le K_m (q^{k-n})^{-m} = K_m\,(q^m)^{n-k},$$

где $0 \le k \le n-1$, и выбрав m так, чтобы выполнялось условие $\dfrac{|c|}{q^m} > 1$.

Случаи $\operatorname{Re} a = 0,\ b \ne 0,\ c = 0$ и $\operatorname{Re} a < 0,\ b \ne 0,\ c = 0$ проще вышеизложенных и оцениваются аналогично.

Лемма доказана.

Формула вариации произвольных постоянных для уравнения (1) имеет вид

$$x\,(t;t_0,\varphi,f)=\varphi(t_0)Y(t,t_0)+\int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0}\big(b\varphi(qs)+c\varphi'(qs)\big)\sum_{l=0}^{+\infty}\left(\frac{c}{q}\right)^l Y(q^l t,s)\,ds+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\left(f(s)-\varphi(t_0)c\left(q^{-1}-1\right)Y'(qs,t_0)\right)\sum_{l=0}^{+\infty}\left(\frac{c}{q}\right)^l Y(q^l t,s)\,ds, \tag{6}$$

где $Y(t,t_0)$ — непрерывное фундаментальное решение начальной задачи

$$x'(t)=ax(t)+bx(qt)+\frac{c}{q}x'(qt),\quad t\geq t_0>0,$$

$$x(t)=\begin{cases}0, & 0<t<t_0,\\ 1, & t=t_0.\end{cases}$$

Чтобы в этом убедиться, необходимо учесть тождества

$$Y'(t,t_0)=a\sum_{l=0}^{+\infty}\left(\frac{c}{q}\right)^l Y\big(q^l t,t_0\big)+b\sum_{l=0}^{+\infty}\left(\frac{c}{q}\right)^l Y(q^{l+1}t,t_0),$$

$$\frac{d}{dt}\left(Y(t,t_0)-\frac{c}{q^2}Y(qt,t_0)\right)=Y'(t,t_0)-\frac{c}{q}Y'(qt,t_0)=aY(t,t_0)+bY(qt,t_0).$$

Тогда, дифференцируя равенство

$$x(t)-\frac{c}{q}x(qt)=\varphi(t_0)\left(Y(t,t_0)-\frac{c}{q^2}Y(qt,t_0)\right)+\varphi(t_0)\frac{c}{q}\left(\frac{1}{q}-1\right)Y(qt,t_0)+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0}\big(b\varphi(qs)+c\varphi'(qs)\big)\,Y(t,s)\,ds+\int\limits_{t_0}^{t}\big(f(s)-\varphi(t_0)c\big(q^{-1}-1\big)Y'(qs,t_0)\big)\,Y(t,s)\,ds$$

при $t\geq q^{-1}t_0,\ t\neq q^{-k}t_0,\ k=1,2,\ldots,$ получаем

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)-\frac{c}{q}x(qt)\right)=ax(t)+bx(qt)+f(t).$$

На отрезке $t\in\left[t_0,q^{-1}t_0\right]$ выполняется равенство

$$x(t)=\varphi(t_0)e^{a(t-t_0)}+\int\limits_{t_0}^{t}e^{a(t-s)}\big(b\,\varphi(qs)+c\varphi'(qs)+f(s)\big)ds,$$

т. е. функция $x\,(t;t_0,\varphi,f)$ является непрерывным решением уравнения (1) для $t\geq q^{-1}t_0$, $t\neq q^{-k}t_0,\ k=1,2,\ldots,$ и совпадает с решением начальной задачи (1); $x(t)=\varphi(t),\ t\in[qt_0,t_0]$, $\varphi\in C^1[qt_0,t_0]$, на отрезке $t\in[t_0,q^{-1}t_0]$, а значит, и на всей полуоси $t\geq t_0$.

При условии $\varphi(t_0) = 0$ формула вариации произвольных постоянных (6) становится проще. Его можно выполнить, если построить решение уравнения (2), которое в точке $t = t_0$ будет принимать значение 1. Обозначим его символом $x_0(t)$. Тогда разность $y(t) \overset{\mathrm{df}}{=} x\,(t; t_0, \varphi, f) - \varphi(t_0)x_0(t)$ будет решением неоднородного уравнения, которое равно нулю в точке $t = t_0$. Поэтому для него выполняется тождество

$$y(t) = x\,(t; t_0, y, f) = \int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0} \big(by(qs) + cy'(qs)\big) \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{c}{q}\right)^l Y(q^l t, s) ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} f(s) \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{c}{q}\right)^l Y(q^l t, s) ds. \tag{7}$$

При этом $x\,(t; t_0, \varphi, f) = y(t) + \varphi(t_0)x_0(t)$. Следовательно, если решение $x_0(t)$ достаточно гладкое, то информация о его асимптотическом поведении содержится в [2], и для получения асимптотических оценок решения $x\,(t; t_0, \varphi, f)$ можно использовать равенство (7) и лемму.

Продемонстрируем это на следующем примере. Предположим, что $\operatorname{Re} a < 0,\ bc \neq 0,\ \dfrac{|c|}{q} < |a^{-1}b|,\ f(t) \in C^1\,(0, +\infty)\,,\ f^{(m)}(t) = O\,(t^{\alpha - m})\,,\ t \to +\infty,\ m = \overline{0,1}$ и $\alpha = \dfrac{\ln|a^{-1}b|}{\ln q^{-1}}$. Будем считать, что решение начальной задачи имеет необходимую для дальнейших рассуждений гладкость. Применим формулу вариации произвольных постоянных к уравнению

$$x''(t) = ax'(t) + bqx'(qt) + cqx''(qt) + f'(t)$$

или, точнее, к уравнению

$$y'(t) = ay(t) + bqy(qt) + cqy'(qt) + f'(t). \tag{8}$$

Для этого обозначим символом $y_0(t)$ решение уравнения

$$y'(t) = ay(t) + bqy(qt) + cqy'(qt),$$

которое принимает в точке $t = t_0$ значение равное 1. Тогда разность

$$z(t) \overset{\mathrm{df}}{=} x'\,(t; t_0, \varphi, f) - \varphi'(t_0)y_0(t)$$

будет решением неоднородного уравнения (8), которое равно нулю в точке $t = t_0$. Для решения $z(t)$ получаем тождество

$$z(t) = \int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0} \big(bqz(qs) + cqz'(qs)\big) \sum_{l=0}^{+\infty} c^l Y_1\big(q^l t, s\big)\, ds + \int\limits_{t_0}^{t} f'(s) \sum_{l=0}^{+\infty} c^l Y_1\big(q^l t, s\big)\, ds,$$

где $Y_1(t, t_0)$ — непрерывное решение начальной задачи

$$y'(t) = ay(t) + bqy(qt) + cy'(qt), \quad t \geq t_0 > 0,$$

$$y(t)=\begin{cases}0, & 0<t<t_0,\\ 1, & t=t_0.\end{cases}$$

Поскольку по предположению $|c|<|a^{-1}bq|$, то согласно лемме

$$|Y_1(t,t_0)|\leq M_4\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{\ln|a^{-1}b|}{\ln q^{-1}}-1},\quad t\geq t_0.$$

Поэтому

$$|z(t)|\leq\int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0}\big|bqz(qs)+cqz'(qs)\big|\sum_{l=0}^{+\infty}|c|^lM_4\left(\frac{q^lt}{s}\right)^{\frac{\ln|a^{-1}bq|}{\ln q^{-1}}}ds+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}|f'(s)|\sum_{l=0}^{+\infty}|c|^lM_4\left(\frac{q^lt}{s}\right)^{\frac{\ln|a^{-1}bq|}{\ln q^{-1}}}ds=$$

$$=\sum_{l=0}^{+\infty}|c|^lM_4\left(q^lt\right)^{\frac{\ln|a^{-1}bq|}{\ln q^{-1}}}\left(\int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0}|bqz(qs)+\right.$$

$$\left.+cqz'(qs)|s^{-\frac{\ln|a^{-1}bq|}{\ln q^{-1}}}ds+\int\limits_{t_0}^{t}|f'(s)|s^{-\frac{\ln|a^{-1}bq|}{\ln q^{-1}}}ds\right)\leq$$

$$\leq M_4t^{\frac{\ln|a^{-1}bq|}{\ln q^{-1}}}\sum_{l=0}^{+\infty}\left(\frac{|c|}{|a^{-1}bq|}\right)^l\left(\int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0}|bqz(qs)+\right.$$

$$\left.+cqz'(qs)|s^{-\frac{\ln|a^{-1}bq|}{\ln q^{-1}}}ds+M_5\int\limits_{t_0}^{t}s^{\alpha-1-\frac{\ln|a^{-1}bq|}{\ln q^{-1}}}ds\right)=$$

$$=M_4t^{\frac{\ln|a^{-1}bq|}{\ln q^{-1}}}\left(1-\frac{|c|}{|a^{-1}bq|}\right)^{-1}\left(q\int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0}|bz(qs)+\right.$$

$$\left.+cz'(qs)|s^{-\frac{\ln|a^{-1}bq|}{\ln q^{-1}}}ds+M_5\,(t-t_0)\right)\leq M_6t^{\frac{\ln|a^{-1}b|}{\ln q^{-1}}}.$$

Если решение $y_0(t)$ достаточно гладкое, то согласно [2] для него выполняется оценка $y_0(t)=$ $=O\left(t^{\frac{\ln|a^{-1}b|}{\ln q^{-1}}-1}\right)$, $t\to+\infty$, т. е.

$$x'(t;t_0,\varphi,f) = z(t) + \varphi'(t_0)y_0(t) = O\left(t^{\frac{\ln|a^{-1}b|}{\ln q^{-1}}}\right), \quad t \to +\infty.$$

Запишем уравнение (1) следующим образом:

$$x(t) + a^{-1}bx(qt) = a^{-1}\left(x'(t) - cx'(qt) - f(t)\right).$$

Определим параметр v из уравнения $a^{-1}bq^v = -1$ и выполним замену переменных $x(t) = t^v h(t)$:

$$h(t) - h(qt) = a^{-1}t^{-v}\left(x'(t) - cx'(qt) - f(t)\right).$$

Функция $g(t) \overset{\mathrm{df}}{=} a^{-1}t^{-v}\left(x'(t) - cx'(qt) - f(t)\right)$ ограничена. Выполним замену независимой переменной $h(t) = w\left(\dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)$, $\dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}} = \tau$:

$$w(\tau) - w(\tau - 1) = g\left(e^{\tau \ln q^{-1}}\right).$$

Отсюда получаем оценку $w\left(\dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) = O(\ln t)$, $t \to +\infty$, т. е. $x(t) = O\left(t^{\frac{\ln|a^{-1}b|}{\ln q^{-1}}} \ln t\right)$, $t \to +\infty$.

Далее рассмотрим уравнение

$$x'(t) = -u(t)x(t) + bx(qt), \quad t \in \mathrm{R}, \tag{9}$$

где b — ненулевая комплексная постоянная, $q \in (0,1)$ и u — решение уравнения

$$u'(t) + q^2u'(qt) + u^2(t) - q^2u^2(qt) = \mu, \quad t \in \mathrm{R}. \tag{10}$$

Здесь μ — положительная постоянная. Уравнение (9) появилось в [5], где описан класс автомодельных потенциалов в уравнении Шредингера и частично изучены собственные функции операторов симметрии, называемые когерентными состояниями. Некоторые из этих когерентных состояний (например, состояния Юрке – Столера) имеют практическое применение. Замена переменных $u(t) = \sqrt{\dfrac{\mu}{1-q^2}} + y(t)$ позволяет записать уравнение (10) в виде

$$y'(t) = -2\sqrt{\frac{\mu}{1-q^2}}y(t) + 2q^2\sqrt{\frac{\mu}{1-q^2}}y(qt) - q^2y'(qt) - y^2(t) + q^2y^2(qt). \tag{11}$$

Последнее уравнение как частный случай более общих уравнений изучалось в [6], где для него получен следующий результат: для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие константы $j \in \mathrm{N}$ и $0 < \delta < \sigma < +\infty$, что для j раз непрерывно дифференцируемых решений $y(t)$ уравнения (11), удовлетворяющих условию $|y^{(m)}(\theta)| \le \delta$, $\theta \in [qt_0, t_0]$, $m = \overline{0, j}$, имеет место оценка

$$\max\left\{|y(t)|, |y'(t)|, \ldots, |y^{(j)}(t)|\right\} \le \sigma t^{-2+\varepsilon} \quad \text{при} \quad t \in [qt_0, +\infty).$$

Предположим, что $y(t)$ — одно из таких решений. Тогда уравнение (9) примет вид

$$x'(t) = -\left(\sqrt{\frac{\mu}{1-q^2}} + y(t)\right)x(t) + bx(qt). \tag{12}$$

Для краткости обозначим $a_1 \overset{\mathrm{df}}{=} \sqrt{\dfrac{\mu}{1-q^2}}$ и выполним замену $x(t) = t^v z(t),\ v \in \mathrm{R}$:

$$z'(t) = -a_1 z(t) + bq^v z(qt) - \left(y(t) + vt^{-1}\right) z(t).$$

Запишем последнее уравнение в интегральной форме

$$z(t) = e^{-a_1(t-t_1)} z(t_1) + bq^v \int\limits_{t_1}^{t} e^{-a_1(t-s)} z(qs)ds - \int\limits_{t_1}^{t} e^{-a_1(t-s)} \left(y(s) + vs^{-1}\right) z(s)ds.$$

Отсюда для $t \geq t_1$ получаем

$$|z(t)| \leq |z(t_1)| + |bq^v| \int\limits_{t_1}^{t} e^{-a_1(t-s)} |z(qs)|ds + \int\limits_{t_1}^{t} e^{-a_1(t-s)} |y(s) + vs^{-1}||z(s)|ds,$$

$$|z(t)| \leq \max_{s\in[qt_1,t_1]} |z(s)| + \left|\frac{b}{a_1} q^v\right| \max_{s\in[qt_1,t]} |z(s)| + \frac{M_7}{a_1} t_1^{-1} \max_{s\in[qt_1,t]} |z(s)|,$$

причем функция в правой части неубывающая, поэтому

$$\max_{s\in[qt_1,t]} |z(s)| \leq \max_{s\in[qt_1,t_1]} |z(s)| + \left(\left|\frac{b}{a_1} q^v\right| + \frac{M_7}{a_1} t_1^{-1}\right) \max_{s\in[qt_1,t]} |z(s)|.$$

Если $\left|\dfrac{b}{a_1} q^v\right| < 1$, то для достаточно большого t_1 выполняется неравенство

$$\max_{s\in[qt_1,t]} |z(s)| \leq \left(1 - \left|\frac{b}{a_1} q^v\right| - \frac{M_7}{a_1} t_1^{-1}\right)^{-1} \max_{s\in[qt_1,t_1]} |z(s)|,$$

т. е. $x(t) = O\left(t^{\frac{\ln|a_1^{-1}b|}{\ln q^{-1}} + \varepsilon}\right),\ t \to +\infty,\ \varepsilon > 0$. Обозначим $f(t) \overset{\mathrm{df}}{=} -y(t)x(t)$ и запишем уравнение (12) следующим образом:

$$x'(t) = -a_1 x(t) + bx(qt) + f(t).$$

Поскольку $f(t) = O\left(t^{\frac{\ln|a_1^{-1}b|}{\ln q^{-1}} - 2 + 2\varepsilon}\right),\ t \to +\infty$, то, применяя лемму и формулу вариации произвольных постоянных (6), получаем оценку $x(t) = O\left(t^{\frac{\ln|a_1^{-1}b|}{\ln q^{-1}}}\right),\ t \to +\infty$.

Если в уравнении (10) выполнить замену переменных $u(t) = -\sqrt{\dfrac{\mu}{1-q^2}} + y(t)$, то можно повторить вышеизложенные рассуждения в случае $t \to -\infty$ и получить оценку

$$x(t) = O\left(|t|^{\frac{\ln\left|\sqrt{\frac{1-q^2}{\mu}}\, b\right|}{\ln q^{-1}}}\right), \quad t \to -\infty.$$

Указанные результаты для уравнения (9) были получены в [5] нестрогими математическими методами.

В [5] также появляется уравнение

$$x'(t) = bx(qt),$$

для которого при $0 < q < 1$ в [7] найдена асимптотическая формула аналитического решения, а при $q > 1$ в [8] найдено счетное множество решений (сопряженного уравнения) и указан метод для исследования их асимптотического поведения. Полученный там асимптотический ряд уточнен в [9]. Отметим, что все решения $G_n\left(\dfrac{\ln t}{\ln q}\right)$ указанного семейства при $t \to 0$ стремятся к 1. Последнее становится очевидным, если учесть, что решение $G_0\left(\dfrac{\ln t}{\ln q}\right)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с решением (2.11) из [10].

Литература

1. *Lim Eng-Bin.* Asymptotic bounds of solutions of the functional differential equation // SIAM J. Math. Anal. – 1978. – **9**, № 5. – P. 915 – 920.
2. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Асимптотические границы решений дифференциально-функционального уравнения с линейно преобразованным аргументом // Нелiнiйнi коливання. – 2017. – **20**, № 4. – С. 458 – 464.
3. *Lehninger H., Liu Y.* The functional-differential equation $y'(t) = Ay(t) + By(qt) + Cy'(qt) + f(t)$ // Eur. J. Appl. Math. – 1998. – **9**. – P. 81 – 91.
4. *Iserles A.* On the generalized pantograph functional-differential equation // Eur. J. Appl. Math. – 1993. – **4**. – P. 1 – 38.
5. *Spiridonov V.* Universal superpositions of coherent states and self-similar potentials // Phys. Rev. A. – 1995. – **52**. – P. 1909 – 1935.
6. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений некоторых дифференциально-функциональных уравнений // Нелiнiйнi коливання. – 2016. – **19**, № 3. – С. 311 – 348.
7. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений одного дифференциально-функционального уравнения с линейно преобразованным аргументом // Нелiнiйнi коливання. – 2013. – **16**, № 3. – С. 291 – 313.
8. *de Bruijn N. G.* The difference-differential equation $F'(x) = e^{\alpha x+\beta}F(x-1)$, I, II // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 56-Indag. Math. – 1953. – **15**. – P. 449 – 464.
9. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений неоднородного дифференциально-функционального уравнения с линейно преобразованным аргументом // Нелiнiйнi коливання. – 2018. – **21**, № 4. – С. 537 – 553.
10. *Heard M. L.* A family of solutions of the initial value problem for the equation $x'(t) = ax(\lambda t)$, $\lambda > 1$ // Aequat. Math. – 1973. – **9**, № 2-3. – P. 273 – 280.

Получено 03.08.18