УДК 519.622; 517.5

В. І. Біленко, К. В. Божонок (Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, Київ),
С. Ю. Дзядик (Держ. ун-т телекомунікацій, Київ)

КУСКОВО-ПОЛІНОМІАЛЬНІ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ІМПУЛЬСНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

On the basis of V. Dzyadyk's approximation method, we consider the problems of construction and theoretical substantiation of high-precision numerical-analytic algorithms for the piecewise polynomial approximation of the solutions of problems with pulsed action.

Розглядаються питання конструювання і теоретичного обґрунтування високоточних чисельно-аналітичних алгоритмів кусково-поліноміальної апроксимації розв'язків задач з імпульсним впливом на основі апроксимаційного методу В. К. Дзядика.

1. Вступ. Постановка задачі. Математичною моделлю алгебраїчно нелінійної системи з імпульсним впливом у загальному випадку [1 – 8] є система диференціальних рівнянь

$$A(x,u)\frac{du}{dx} = f(x,u), \qquad x \neq x_i, \quad x \in [0,H], \quad u = (u_1,\ldots,u_r) \in D \subset \mathbb{R}^r, \tag{1}$$

де компоненти матриці $A(x,u)$ і вектора $f(x,u)$ — кусково-поліноміальні функції відповідного числа змінних із фіксованими умовами перемикання типу „interface condition"

$$\Delta u\,|_{x=x_i} = I_i(u) = u(x_i+0) - u(x_i-0).$$

Особливий практичний інтерес становлять задачі з невідомими моментами імпульсної дії.

В роботі розглядається питання побудови, обґрунтування та комп'ютерної реалізації алгоритму кусково-поліноміальної апроксимації розв'язків системи диференціальних рівнянь вигляду (1).

Цей алгоритм ґрунтується на апроксимаційному методі В. К. Дзядика, наведеному в роботах [9 – 11]. Важливими властивостями і перевагами цього алгоритму над іншими методами й алгоритмами є його оптимальність у сенсі найкращих наближень та ненасиченість (алгоритм без насичення точності [12] або алгоритм інтелектуального моделювання [13]). Це особливо важливо при необхідності уникнення явища «вибуху похибок» для імпульсних задач [14].

Актуальність таких питань обумовлена зростаючими вимогами до трьох основних характеристик обчислювальних алгоритмів: точності, швидкодії та інформаційної складності [12]. Насамперед це потрібно у зв'язку з необхідністю забезпечення високої точності та надійності математичного і комп'ютерного моделювання екстремальних динамічних процесів, систем і технологій, пов'язаних із ризиком для життя людей.

Зокрема, імпульсні диференціальні рівняння являють собою математичні моделі різних явищ і процесів в аерокосмонавтиці (оптимальне управління та безпека літальних апаратів), ядерній фізиці, супрамолекулярних структурах, наноелектронних і надпровідних системах, хімічній кінетиці, теорії еволюційних процесів та ін. [13, 15]. Значну роль у розширенні можливостей апроксимаційних методів В. К. Дзядика відіграли відомі відкриття Нобелівських лауреатів у галузі нанофізики [15, 16] зі створення скануючого тунельного і скануючого атомно-силового мікроскопів.

2. Алгоритм. Розглянемо ідею вказаного вище алгоритму, використавши результати робіт [11, 17, 18].

1. Зведемо аналогічно [17–20] задачу (1) (у випадку одного рівняння, матриці $A(x,u) = A(x)$ і компонент вектора $f(x,u)$ з алгебраїчною нелінійністю відносно розв'язку) до еквівалентного інтегрального рівняння типу Вольтерра третього роду

$$A(x)u(x) = u(0) + \int\limits_0^x F(t, u(t))\, dt, \tag{2}$$

де $F(x,u)$ — алгебраїчний многочлен двох змінних, що знаходиться в результаті еквівалентного переходу (див. [17]).

2. Отриманому інтегральному рівнянню поставимо у відповідність на кожному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0,m}$, наближене інтегро-функціональне рівняння

$$A(x)u_{n,i}(x) = u_{n,i-1}(x_i) + \int\limits_{x_i}^x F(t, u_{n,i}(t))\, dt + \varepsilon_{N,i}(x), \tag{3}$$

де $u_{n,i}(x)$ — розв'язок рівняння, що є алгебраїчним многочленом степеня не вищого за n на відрізку $[x_i, x_{i+1}]$, одного з виглядів

$$u_{n,i}(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_{ki} x^k, \qquad u_{n,i}(x) = \sum_{k=0}^n \beta_{ki} T_k\left(\frac{2(x-x_i)}{h_i} - 1\right), \qquad h_i = x_{i+1} - x_i, \tag{4}$$

з невідомими коефіцієнтами α_{ki} (або β_{ki}). У рівнянні (3) $\varepsilon_{N,i}(x)$ — нев'язка-многочлен степеня N, що залежить від степенів многочленів $u_{n,i}(x)$ та F [11]:

$$\varepsilon_{N,i}(x) = \sum_{k=n+1}^N \tau_{ki} T_k\left(\frac{2(x-x_i)}{h_i} - 1\right), \tag{5}$$

де $T_k(z) = \cos(k \arccos z)$ — многочлен Чебишова першого роду, τ_{ki} — невідомі допоміжні параметри.

3. Для знаходження коефіцієнтів α_{ki} (або β_{ki}) і τ_{ki} можна використати ітераційну схему

$$A(x)u_{n,i,\nu}(x) = u_{n,i-1,\nu}(x_i) + \int\limits_{x_i}^x F\big(t, u_{n,i,\nu-1}(t)\big) dt + \varepsilon_{N,i,\nu}(x), \tag{6}$$

де $\nu = 1, 2, \ldots$ — номер кроку ітераційного процесу; $u_{n,i,\nu}(E)$ і $\varepsilon_{N,i,\nu}(x)$ — многочлени відповідного вигляду (4) і (5) з коефіцієнтами α_{ki} (або β_{ki}) і τ_{ki} на ν-му кроці ітерацій.

Прирівнюючи в (6) при кожному $\nu = 1, 2, \ldots$ коефіцієнти з однаковими степенями, одержуємо для $\alpha_{k\nu}$ (або $\beta_{k\nu}$) і $\tau_{k\nu}$ деяку систему $(N+1)$-го лінійного алгебраїчного рівняння.

3. Теоретичне обґрунтування. Перед тим як перейти до вивчення питання обґрунтування запропонованого алгоритму, введемо необхідні позначення.

Через $C[\cdot]$ і $L_p^2[\cdot]$ будемо позначати відповідно простір неперервних функцій і сумовних із квадратом при чебишовській вазі

$$p_i(x) = 1 \Bigg/ \sqrt{1 - \left(2\frac{x - x_i}{h_i} - 1\right)^2} \tag{7}$$

на відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ функцій з загальновідомими нормами $\|\cdot\|_{C[x_i,x_{i+1}]}$, $\|\cdot\|_{L^2_p[x_i,x_{i+1}]}$. При дослідженні похибок розв'язування рівнянь припустимо, що

$$\min_{x\in[0,H]} A(x) \geq a_* > 0. \tag{8}$$

На основі результатів робіт [11, 17] має місце таке твердження про відхилення наближеного кусково-поліноміального розв'язку $\hat{u}_n(x) = \{u_{n,i}(x),\ i = \overline{0,m}\}$ від точного розв'язку $u(x)$ рівняння (1).

Теорема 1. *Нехай числа $H > 0$ і $n = 1, 2, \ldots$ такі, що в кулі*

$$\sigma(\rho) = \{\psi \in C[0,H] : \|\psi\|_{C[0,H]} \leq \rho\}$$

існують єдиний розв'язок $u(x)$ рівняння (1) *і єдині розв'язки $u_{n,i}(x)$ рівнянь* (3) *на проміжках $[x_i, x_{i+1}]$ такі, що $\|u_{n,i}(x)\|_X \leq \rho$. Тоді для кожного $i = \overline{0,m}$ виконуються нерівності*

$$\|u(x) - \hat{u}_n(x)\|_X \leq \frac{M_1 m}{a_*} \max_{0\leq i\leq m} \|\varepsilon_{N,i}(x)\|_{X[x_i,x_{i+1}]}, \tag{9}$$

$$\|u(x) - \hat{u}_n(x)\|_{L^2_p} \leq \frac{m}{a_*}\left(1 + \frac{h\sqrt{N}}{n+1}M_2\right) \max_{0\leq i\leq m} \|\varepsilon_{N,i}(x)\|_{L^2_p[x_i,x_{i+1}]}. \tag{10}$$

При виконанні нерівності

$$\theta_n(H,p) = \frac{1}{a_*}\left(1 - \frac{\pi h\sqrt{N}}{2(n+1)}M_1\right) \geq 0 \tag{11}$$

справедливою є оцінка

$$\|u(x) - \hat{u}_n(x)\|_X \leq \frac{\lambda_N(X[0,H])}{a_*\theta_n(H,p)}\left(1 + \frac{h\sqrt{N}}{n+1}M_2\right) \max_{0\leq i\leq m} \left(E_{N,i}(u)_{X[x_i,x_{i+1}]}\right), \tag{12}$$

де $h = \max_i h_i$, M_1, M_2 — деякі сталі, що не залежать від n. Простір $X[\cdot]$ є простором $C[\cdot]$ неперервних функцій або простором $L^2_p[\cdot]$ сумовних із квадратом при чебишовській вазі (7) *функцій; $E_n(u)_{X[\cdot]}$ — величина найкращого наближення многочленами функції $u(x)$ в $X[\cdot]$, $\lambda_N(X[\cdot]) = 1$ для простору $L^2_p[\cdot]$ і $\lambda_N(X[\cdot]) = \sqrt{2N}$ для простору $C[\cdot]$.*

Доведення ґрунтується на результатах робіт [9–11]. Розглянемо спочатку похибку на інтервалі $[x_0, x_1]$. Згідно з (8) поділимо обидві частини рівнянь (2) і (3) на $A(x)$ і отримаємо

$$u(x) - u_{n,0}(x) = \frac{1}{A(x)}\int_{x_0}^{x} F(t, y(t)) - F\big(t, u_{n,0}(t)\big)\, dt + \frac{\varepsilon_{N,0}(x)}{A(x)}. \tag{13}$$

З виразу (13), враховуючи вигляд $A(x)$, $f(x,u)$ і $F(t,u(t))$, одержуємо

$$u(x) - u_{n,0}(x) =$$

$$= \frac{1}{A(x)} \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{l=0}^{S} \sum_{j=0}^{J} b_{lj} t^l \mu_{j,n,0}(t) + \sum_{k=1}^{r} k a_k t^{k-1} \right) \big(u(t) - u_{n,0}(t)\big)\, dt + \frac{\varepsilon_{N,0}(x)}{A(x)}, \qquad (14)$$

де

$$\mu_{j,n,0}(t) = \sum_{p=0}^{j-1} u_{n,0}^{p}(t) u^{j-p-1}(t). \qquad (15)$$

Внаслідок лінійності рівняння (15) відносно різниці $u(x) - u_{n,0}(x)$ справджується рівність

$$u(x) - u_{n,0}(x) = \frac{\varepsilon_{N,0}(x)}{A(x)} + \int_{x_0}^{x} R_{n,0}(x,t) \frac{\varepsilon_{N,0}(t)}{A(t)}\, dt, \qquad (16)$$

де $R_{n,0}(x,t)$ — резольвента ядра

$$G_{n,0}(x,t) = \frac{1}{A(x)} \left(\sum_{l=0}^{S} \sum_{j=0}^{J} b_{lj} t^l \mu_{j,n,0}(t) + \sum_{k=1}^{r} k a_k t^{k-1} \right) \qquad (17)$$

рівняння (14).

Звідси, на основі нерівності Гронуолла – Белмана [21, 22], згідно з (8) і (14) з урахуванням того, що $u, \hat{u}_n \in \sigma(\rho)$, отримуємо оцінку (9) для $X[x_0, x_1] = C[x_0, x_1]$.

Якщо застосувати рівність (16) та нерівність Буняковського для оцінювання резольвенти $R_{n,0}(x,t)$ згідно з (17), то можна пересвідчитись у справедливості оцінки (9) при $X[x_0, x_1] = L_{p0}^2[x_0, x_1]$:

$$\big\| u(x) - u_{n,0}(x) \big\|_{L_p^2} \le \left\| \frac{\varepsilon_{N,0}(x)}{A(x)} \right\|_{L_{p0}^2} + \left\| \int_{x_0}^{x} R_{n,0}(x,t) \frac{\varepsilon_{N,0}(t)}{A(t)} dt \right\|_{L_{p0}^2} \le$$

$$\le \left\| \frac{\varepsilon_{N,0}(x)}{A(x)} \right\|_{L_p^2} \left[1 + \left(\int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x} R_{n,0}^2(x,t) \sqrt{\frac{1 - \left(2\frac{t - x_0}{h_0} - 1 \right)^2}{1 - \left(2\frac{x - x_0}{h_0} - 1 \right)^2}}\, dt\, dx \right)^{1/2} \right] \le$$

$$\le \left\| \frac{\varepsilon_{N,0}(x)}{A(x)} \right\|_{L_p^2} \left[1 + \frac{H\pi}{2a_*} M_{1,0}(h_0, \rho) \exp(H M_{1,0}(H, \rho)/a_*) \right]. \qquad (18)$$

Таким чином, на інтервалі $[x_0, x_1]$ у просторі $L_p^2[x_0, x_1]$ нерівність (9) встановлено.

Далі, для простору $L_p^2[x_0, x_1]$ на підставі теореми про диференційовність за параметром, вимоги якої задовольняються, виконуємо заміну $z = \arccos\left(2\frac{t - x_0}{h_0} - 1 \right)$ й інтегруємо частинами інтеграл, що міститься у правій частині (14). Із урахуванням (2) отримуємо

$$\left| \int_{x_0}^{x} R_{n,0}(x,t) \frac{\varepsilon_{N,0}(t)}{A(t)}\, dt \right| =$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} R_{n,0}(x,t) \sum_{k=n+1}^{N} \tau_{k0} T_k \left(2\frac{t-x_0}{h_0} - 1 \right) \frac{1}{A(t)} dt \right| =$$

$$= h_0 \Bigg| \sum_{k=n+1}^{N} \frac{\tau_{k0}}{n+k} \left[\frac{R_{n,0}(x, h_0\cos z) \sin z \sin(n+k)z}{A(h_0 \cos z)} \Bigg|_{\pi/2}^{\arccos\left(2\frac{t-x_0}{h_0}-1\right)} - \right.$$

$$\left. - \int_{\pi/2}^{\arccos(x)} \sin(n+k)z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R_{n,0}(x, h_0 \cos z) \sin z}{A(h_0 \cos z)} \right) dz \right] \Bigg| \leq$$

$$\leq h_0 c_0(h_0,\rho) \sum_{k=n+1}^{N} \frac{|\tau_{k0}|}{n+k} \leq \frac{h_0 \|\tau_0\| \sqrt{N}}{n+1} c_0(h_0,\rho), \tag{19}$$

де

$$\|\tau_0\| = \left(\sum_{l=1}^{N} \tau_{l0}^2 \right). \tag{20}$$

$A_0(h_0,\rho)$ — деяка стала, що не залежить від n.

Якщо тепер скористатися тим, що внаслідок ортогональності поліномів Чебишова $T_k\left(2\dfrac{t-x_0}{h_0}-1\right)$ на $[x_0,x_1]$ із вагою ρ_0 виконуються, аналогічно [11], нерівності

$$\|\tau_0\| = \left[\frac{2}{\pi h_0} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\varepsilon_{N,0}^2(x) dx}{\sqrt{1 - \left(2 \cdot \dfrac{t-x_0}{h_0} - 1\right)^2}} \right]^{1/2} \leq \|A(x)\|_C \left\| \frac{\varepsilon_{N,0}(x)}{A(x)} \right\|_{L_p^2}, \tag{21}$$

то з (16) з урахуванням (17) отримаємо нерівність (9).

Далі, внаслідок лінійності і проекційності поліноміальних операторів Фур'є – Чебишова, при виконанні умови (11) одержимо, аналогічно [11], оцінку

$$\|\tau_0\| \leq \frac{E_n(u)_{L_{p_i}^2}}{\theta_n(h_0,\rho)}.$$

Звідси, врахувавши попередню оцінку та нерівність (18), отримаємо (12).

Теорему на відрізку $[x_0,x_1]$ доведено.

На відрізку $[x_1,x_2]$ вираз (13) набирає вигляду

$$u(x) - u_{n,1}(x) = \frac{u_0 - u_{n,0}(x_1)}{A(x)} +$$

$$+\frac{1}{A(x)}\int\limits_{x_1}^{x}\big[F(t,u(t))-F(t,u_{n,1}(t))\big]dt+\frac{\varepsilon_{N,1}(x)}{A(x)}.$$

За допомогою міркувань, аналогічних попереднім, із використанням резольвенти на відрізку $[x_1, x_2]$ отримаємо

$$u(x)-u_{n,1}(x)=\frac{\varepsilon_{N,1}(x)}{A(x)}+\frac{u_0-u_{n,0}(x_1)}{A(x)}+$$

$$+\int\limits_{x_1}^{x}R_{n,1}(x,t)\left(\frac{\varepsilon_{N,1}(t)}{A(t)}+\frac{u_0-u_{n,0}(x_1)}{A(t)}\right)dt,$$

де $R_{n,1}(x,t)$ — резольвента відповідного ядра $G_{n,1}$, вигляд якого подібний до (17).

Оцінка (9) на даному інтервалі матиме вигляд

$$\|u(x)-u_{1,0}(x)\|_{L^2_p}\leq\left\|\frac{\varepsilon_{N,1}(x)}{A(x)}+\frac{u_0-u_{n,0}(x_1)}{A(x)}\right\|_{L^2_p}+$$

$$+\left\|\int\limits_{x_1}^{x}R_{n,1}(x,t)\left(\frac{\varepsilon_{N,1}(t)}{A(t)}+\frac{u_0-u_{n,0}(x_1)}{A(t)}\right)dt\right\|_{L^2_p}\leq$$

$$\leq\frac{\|\varepsilon_{N,0}(x)\|_{L^2_p}+\|\varepsilon_{N,1}(x)\|_{L^2_p}}{a_*}\left[1+\frac{h_1\pi}{2a_*}M_{1,1}(h_1,\rho)\exp(HM_{1,1}(h_1,\rho)/a_*)\right].$$

Оцінки (10), (12) на цьому інтервалі одержимо у вигляді

$$\big\|u(x)-\hat{u}_n(x)\big\|_{X[0,H]}\leq\frac{2}{a_*}\max_{0\leq i\leq m}\left(\|\varepsilon_{N,0}(x)\|_{X[x_0,x_1]},\|\varepsilon_{N,1}(x)\|_{X[x_1,x_2]}\right),$$

$$\big\|u(x)-u_{n,1}(x)\big\|_{L^2_p[0,H]}\leq$$

$$\leq\frac{2}{a_*}\left(1+\frac{h_1\sqrt{N}}{n+1}M_{2,1}\right)\max_{0\leq i\leq m}\left(\|\varepsilon_{N,0}(x)\|_{L^2_p[x_0,x_1]},\|\varepsilon_{N,1}(x)\|_{L^2_p[x_1,x_2]}\right),$$

$$\big\|u(x)-u_{n,1}(x)\big\|_{X[0,H]}\leq\left(\frac{\lambda_N(X[0,H])}{a_*\theta_n(h_1,\rho)}\right)\left(1+\frac{h_1\sqrt{N}}{n+1}M_{2,1}\right)\times$$

$$\times\max_{0\leq i\leq m}\left(\|E_{N,0}(u)\|_{X[x_0,x_1]},\|E_{N,1}(u)\|_{X[x_1,x_2]}\right).$$

Звідси методом індукції легко переконатись у виконанні нерівностей (9), (10), (12) для $i = 1,\ldots,m$, якщо покласти

$$M_1=\max_{0\leq i\leq m}M_{1,i},\qquad M_2=\max_{0\leq i\leq m}M_{2,i}.$$

Теорему доведено.

Таким чином, із нерівностей (9) – (12) можна зробити висновок, що алгоритм буде оптимальним за порядком у сенсі найкращих наближень, ненасичуваним за точністю, а отже, ефективним у випадку задач з імпульсним впливом за неповної інформації щодо гладкості початкових функцій.

4. Обчислювальний експеримент. Для реалізації запропонованого алгоритму було вибрано такі імпульсні диференціальні рівняння.

***Приклад* 1:**

$$y' = y, \qquad y(0) = 1,$$
$$y(\xi) = \sqrt{e}, \quad x \in [0;1].$$

Наближений розв'язок можна шукати у вигляді полінома:

$$y_1(x) = \begin{cases} C_0 + C_1 x, & \text{якщо} \quad 0 \le x \le \xi, \\ C_2 + C_3 x, & \text{якщо} \quad \xi \le x \le 1. \end{cases}$$

Розглянемо два випадки: 1) $\xi = \dfrac{1}{2}$ — фіксований момент, 2) ξ — невідомий момент імпульсної дії.

Наближені рівняння для знаходження C_0, C_1 і C_2, C_3 згідно з алгоритмом матимуть вигляд

$$C_0 + C_1 x = 1 + \int\limits_0^x (C_0 + C_1 t)\,dt + \tau_1 T_2\left(\frac{2x-\xi}{\xi}\right),$$

$$C_2 + C_3 x = \sqrt{e} + \int\limits_\xi^x (C_2 + C_3 t)\,dt + \tau_2 T_2\left(\frac{2x-(1+\xi)}{1-\xi}\right),$$

де τ_1, τ_2 — невідомі допоміжні параметри, $T_2\left(\dfrac{2x-\xi}{\xi}\right)$ і $T_2\left(\dfrac{2x-(1+\xi)}{1-\xi}\right)$ — многочлени Чебишова другого степеня, зміщені з відрізка $[-1;1]$ на відрізки $[0;\xi]$ і $[\xi;1]$ відповідно.

Після підстановки виразів для многочленів Чебишова у наближені рівняння отримуємо системи

$$C_0 - \tau_1 = 1,$$
$$-\xi C_0 + \xi C_1 + 8\tau_1 = 0,$$
$$\frac{\xi^2}{2} C_1 + 8\tau_1 = 0$$

і

$$(1+\xi)C_2 + \frac{\xi^2}{2}C_3 - \frac{\xi^2 + 6\xi + 1}{(1-\xi)^2}\tau_2 = \sqrt{e},$$
$$-C_2 + C_3 + \frac{8(1+\xi)}{(1-\xi)^2}\tau_2 = 0,$$
$$\frac{C_3}{2} + \frac{8}{(1-\xi)^2}\tau_2 = 0$$

для знаходження невідомих C_0, C_1, τ_1 і C_2, C_3, τ_2 у першому випадку. У другому випадку до першої з систем додається умова для пошуку невідомого моменту $C_0 + \xi C_1 = \sqrt{e}$.

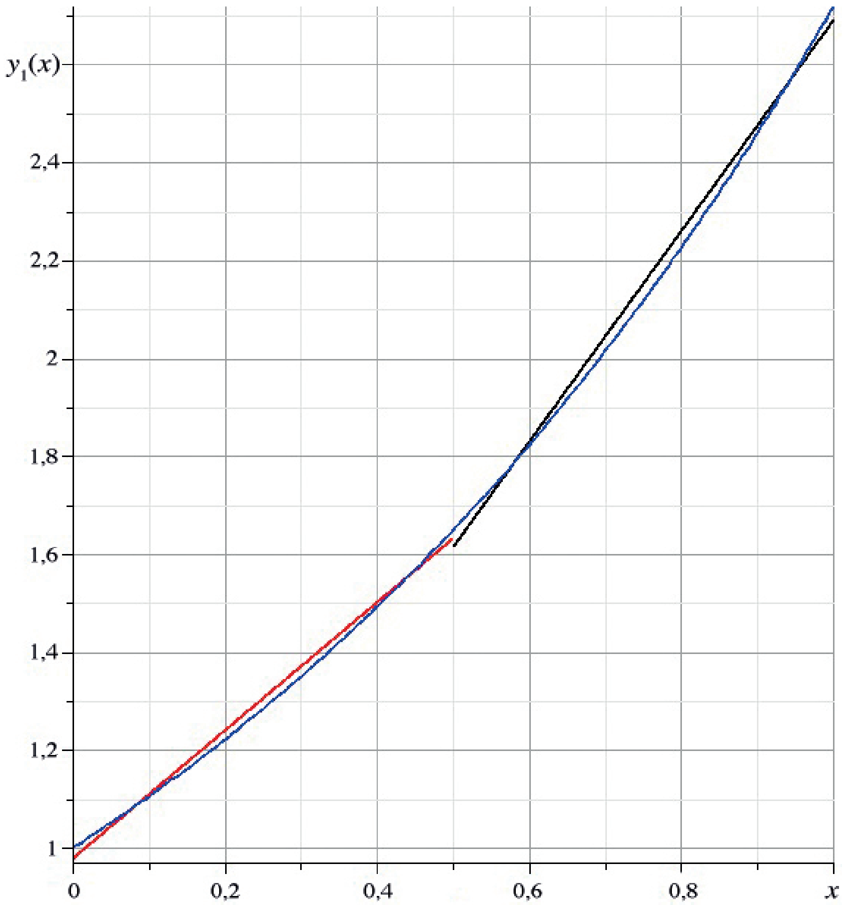

Рис. 1

В результаті розв'язання цих систем було отримано:

у першому випадку, коли $\xi = \dfrac{1}{2}$ — фіксований момент імпульсної дії (рис. 1),

$$y_1(x) = \begin{cases} 48/49 + (64/49)x, & 0 \le x \le 1/2, \\ (16/49)e^{1/2} + (64/49)e^{1/2}x, & 1/2 \le x \le 1, \\ \tau_1 = -1/49, & \tau_2 = -(1/49)e^{1/2}, \end{cases}$$

або

$$y_1(x) = \begin{cases} 0{,}9795918367 + 1{,}306122449x, & \text{якщо} \quad 0 \le x \le 1/2, \\ 0{,}5383579660 + 2{,}53431864x, & \text{якщо} \quad 1/2 \le x \le 1, \\ \varepsilon \approx 0{,}367435460; \end{cases}$$

у першому випадку, коли ξ — невідомий момент імпульсної дії (рис. 2),

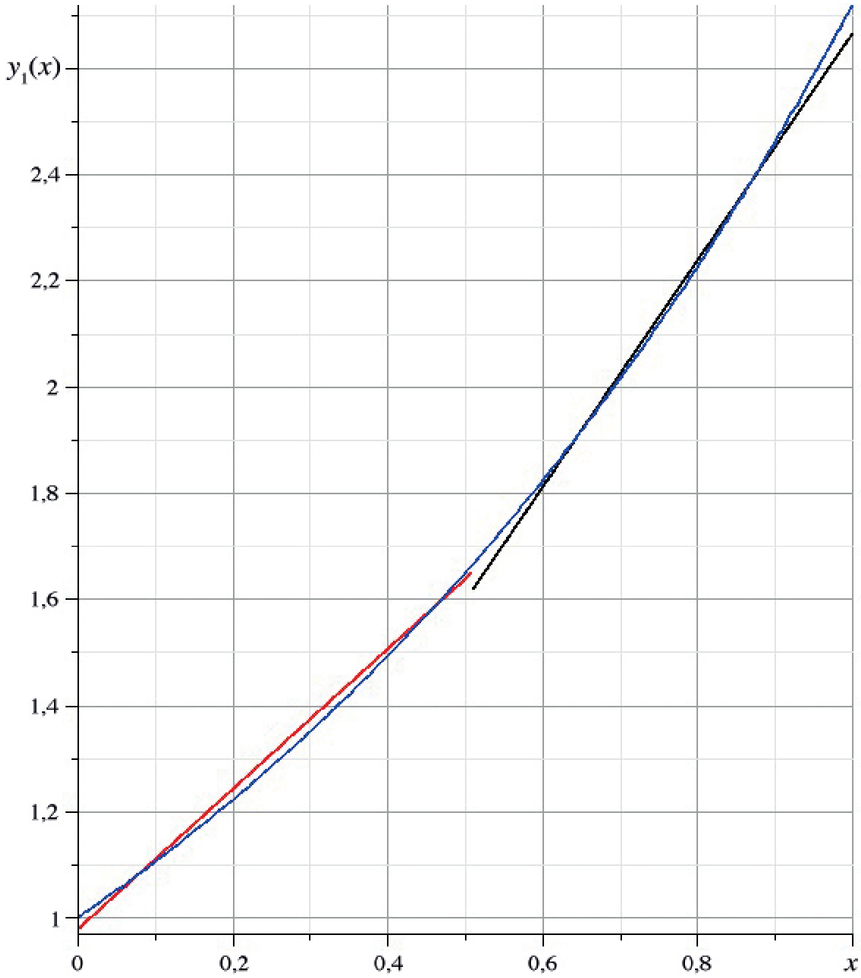

Рис. 2

$$y_1(x) = \begin{cases} 0{,}786376715 + 1{,}13679471x, & \text{якщо} \quad 0 \le x \le \xi, \\ 0{,}237555411 + 2{,}38134182x, & \text{якщо} \quad \xi \le x \le 1, \\ \xi \approx 0{,}100815032, & \\ \tau_1 = -0{,}21362328, \quad \tau_2 = -0{,}3207470482, & \\ \varepsilon \approx 0{,}5639210366. & \end{cases}$$

***Приклад* 2:**

$$y' = \frac{1}{1+x}, \qquad y(0) = 0,$$
$$y(\xi) = \ln(3/2), \quad x \in [0; 1].$$

За допомогою міркувань, аналогічних наведеним у прикладі 1, було отримано:
у першому випадку, коли $\xi = \dfrac{1}{2}$ — фіксований момент імпульсної дії,

$$y_1(x) = \begin{cases} 1/80 + (4/5)x, & 0 \le x \le 1/2, \\ (-47/168) + \ln(3/2) + (4/7)x, & 1/2 \le x \le 1, \\ \tau_1 = 1/80, & \tau_2 = 1/112, \end{cases}$$

або

$$y_1(x) = \begin{cases} 0{,}125 + 0{,}x, & \text{якщо} \quad 0 \le x \le 1/2, \\ 0{,}257032033 + 0{,}714285714x, & \text{якщо} \quad 1/2 \le x \le 1, \\ \varepsilon \approx 0{,}125; \end{cases}$$

у другому випадку, коли ξ — невідомий момент імпульсної дії,

$$y_1(x) = \begin{cases} 0{,}120427671 + 0{,}032888300x, & \text{якщо} \quad 0 \le x \le \xi, \\ 0{,}310383111 + 0{,}731045773x, & \text{якщо} \quad \xi \le x \le 1, \\ \xi \approx 0{,}89764485, \\ \tau_1 = 0{,}120427671, \quad \tau_2 = 0{,}09325137835, \\ \varepsilon \approx 0{,}1212549162. \end{cases}$$

Проведені обчислювальні експерименти на тестових задачах ілюструють теоретично прогнозовані властивості ненасичуваності й оптимальності в сенсі найкращих наближень побудованого алгоритму. Зазначимо також, що вже при малих степенях многочлена алгоритм дає достатньо високу точність як для наближеного розв'язку рівняння, так і для наближених невідомих моментів імпульсної дії.

Література

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* К вопросу обоснования метода усреднения для уравнения 2-го порядка с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 6. – С. 750 – 762.
2. *Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V.* Differential equations with impulse effects, multivalued right-hand sides with discontinuities. – Berlin; Boston: Walter de Gruyter, 2011. – 307 p.
3. *Perestyuk M. O., Chernikova O. S.* Some modern aspects of the theory of impulsive differential equations // Ukr. Math. J. – 2008. – **60**, № 1. – P. 91 – 107.
4. *Капустян О. В., Перестюк М. О., Романюк І. В.* Стійкість глобальних атракторів імпульсних нескінченновимірних систем // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 1. – С. 29 – 39.
5. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1989. – 520 p.
6. *Фекета П. В., Перестюк Ю. М.* Теореми про збурення для многочастотної системи з імпульсами // Нелінійні коливання. – 2015. – **18**, № 2. – С. 280 – 289.
7. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Бифуркация решений импульсной краевой задачи // Нелінійні коливання. – 2008. – **11**, № 1. – С. 21 – 31.
8. *Schwabik S.* Differential equations with interface conditions // Cas. pestov. mat. – 1980. – **105**. – P. 391 – 410.
9. *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1988. – 304 с.
10. *Биленко В. И.* О погрешности a-метода решения интегральных уравнений Вольтерра с полиномиальными нелинейностями // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 4. – С. 537 – 543.

11. *Біленко В. І., Дерієнко А. І., Кирилаха Н. Г.* Кусково-поліноміальні наближення розв'язків жорстких задач на основі апроксимаційного методу В. К. Дзядика // Журн. обчислюв. та прикл. математики. – 2013. – № 2. – С. 68 – 77.

12. *Гаврилюк И. П., Макаров В. Л.* Сильно позитивные операторы и численные алгоритмы без насыщения точности. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2004. – 500 с.

13. *Гладкий С. Л., Степанов Н. А., Ясницкий Л. Н.* Интеллектуальное моделирование физических проблем. – М.; Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотичная динамика”, 2006. – 200 с.

14. *Бабенко К. И.* О явлении насыщения в численном анализе // Докл. АН СССР. – 1978. – **241**, № 3. – С. 505 – 508.

15. *Еленин Г. Г.* Нанотехнологии и вычислительная математика // Мат. моделирование в нанотехнологиях и структурах: Тр. науч. сем. – М.: МИФИ, 2001. – 116 с.

16. *Физико-химия* наноматериалов и супрамолекулярных структур: В 2 т. / Под ред. А. П. Шпака, П. П. Горбика. – Киев: Наук. думка, 2007. – Т. 2. – 440 с.

17. *Біленко В. І., Божонок К. В., Дзядик С. Ю., Стеля О. Б.* Наближення поліномами розв'язків алгебраїчно нелінійних рівнянь математичної фізики // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2016. – **13**, № 3. – С. 7 – 27.

18. *Bilenko V. I., Bozhonok K. V., Dzyadyk S. Y., Stelya O. B.* Piecewise polynomial algorithms for the analysis of processes in inhomogeneous media // Cybernet. and Systems Anal. – 2018. – **54**, № 4. – P. 636 – 642.

19. *Bozhonok E. V.* Some existence conditions for the compact extrema of variational functionals of several variables in Sobolev space $W^{1,2}$ // Oper. Theory: Adv. and Appl. – 2009. – **190**. – P. 141 – 155.

20. *Дзядык С. Ю.* О поведении решения неоднородных дифференциальных уравнений с точкой поворота и малым параметром при производной // Укр. мат. журн. – 1973. – **25**, № 2. – С. 657 – 662.

21. *Романюк А. С.* Тригонометрические и линейные поперечники классов периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, № 5. – С. 670 – 681.

22. *Галан В. Д., Шевчук И. О.* Точна стала в нерівності Дзядика для похідної від алгебраїчного полінома // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, № 5. – С. 624 – 630.

Одержано 27.09.18