УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Ун-т им. А. Нобеля, Днепр)

ОБ ОЦЕНКАХ ЗНАЧЕНИЙ ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННЫХ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ И МАЖОРАНТ, В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ $L_{2,x}(0,1)$

The upper and lower estimates for the Kolmogorov, linear, Bernstein, Gelfand, projective, and Fourier widths are obtained in the space $L_{2,x}(0,1)$ for the classes of functions $W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi)$, where $r\in\mathbb{Z}_+,\ m\in\mathbb{N},\ \nu\geq 0$, and $\Omega_{m,x}^{(\nu)}$ and Ψ are the mth order generalized modulus of continuity and the majorant, respectively. The upper and lower estimates for the suprema of Fourier – Bessel coefficients were also found on these classes. We also present the conditions for majorants under which it is possible to find the exact values of indicated widths and the suprema of Fourier – Bessel coefficients.

Для класів функцій $W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi)$, де $r\in\mathbb{Z}_+,\ m\in\mathbb{N},\ \nu\geq 0$, а $\Omega_{m,x}^{(\nu)}$ і Ψ — відповідно узагальнений модуль неперервності m-го порядку та мажоранта, отримано оцінки зверху і знизу колмогоровського, лінійного, бернштейнівського, гельфандівського, проекційного поперечників та поперечника Фур'є у просторі $L_{2,x}(0,1)$. Також знайдено оцінки зверху та знизу верхніх меж коефіцієнтів Фур'є – Бесселя на цих класах. Вказано умови для мажорант, при виконанні яких обчислюються точні значення зазначених поперечників та верхніх меж коефіцієнтів Фур'є – Бесселя.

1. Введение. Вопросы нахождения оценок значений различных поперечников функциональных классов продолжают занимать одно из ведущих мест в современной теории аппроксимации. Особый интерес вызывают те случаи, когда удается вычислить точные значения поперечников. По понятным причинам наибольшее количество окончательных результатов получено для различных гильбертовых пространств как в периодическом, так и в непериодическом случаях (см., например, [1 – 20] и [21 – 25] соответственно). При этом достаточно много внимания уделено классам функций, определенным с помощью различных характеристик гладкости и мажорант [4 – 20], когда в определениях классов требуется, чтобы для любого их элемента рассматриваемые характеристики гладкости не превышали мажорант в каждой точке некоторого множества ненулевой меры. Например, независимо от рассматриваемого в каждой из работ [4 – 6, 8 – 16] конкретного случая для получения точных значений поперечников на мажоранты пришлось налагать достаточно жесткие дополнительные условия. Доказательство того, что множества мажорант, удовлетворяющих указанным условиям, не пусты, потребовало определенных усилий. Однако, как выяснилось в [19], в периодическом случае для мажорант существует не настолько обременительное условие, при выполнении которого удается вычислить точные значения различных поперечников в пространстве $L_2([0,2\pi])$. Перечень мажорант, удовлетворяющих ему, оказался достаточно широким. Следует отметить, что работу [19] в определенном смысле можно рассматривать как одно из возможных распространений результата Ю. И. Григоряна [26] (см. теорему 2 и следствие 1 из нее) на более общий случай.

Данная статья является дальнейшим распространением указанного результата из [26] на непериодический случай, когда экстремальные задачи оптимизационного содержания решаются в весовом пространстве $L_{2,x}(0,1)$.

2. Необходимые понятия и определения. Символом $L_{2,x}(0,1)$ обозначим множество функций $f\colon(0,1)\to\mathbb{R}$, для каждой из которых функция $\sqrt{x}f(x)$ суммируема с квадратом на интервале $(0,1)$. Линейное множество функций $L_{2,x}(0,1)$ становится полным гильбертовым пространством с введением в нем скалярного произведения $(f,g) := \int_0^1 xf(x)g(x)dx$, где $f,g \in L_{2,x}(0,1)$, и нормы $\|f\|_{2,x} := \|f\|_{L_{2,x}(0,1)} = \sqrt{(f,f)}$. Определим в $L_{2,x}(0,1)$ ортонормированную систему, построенную с помощью функций Бесселя первого рода. Для этого рассмотрим следующую краевую задачу на собственные значения для уравнения Бесселя (см., например, [27], гл.V, § 23, пп. 5, 7):

$$-(xu^{(1)}(x))^{(1)} + \frac{\nu^2}{x}u(x) = \mu x u(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$u(x) = O(x^{\xi}) \qquad \text{при } x \to 0+, \qquad u(1) = 0, \tag{2}$$

где $\nu \geq 0$, $\xi = \min(\nu, 1)$. Полагают, что функция u является дважды непрерывно дифференцируемой на множестве $(0,1)$. При этом краевая задача (1), (2) имеет собственные значения $\mu_{1,\nu} < \mu_{2,\nu} < \ldots < \mu_{k,\nu} < \ldots$, являющиеся квадратами положительных корней $\eta_{1,\nu} < \eta_{2,\nu} < \ldots < \eta_{k,\nu} < \ldots$ уравнения $J_\nu(x) = 0$, где

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}$$

— функция Бесселя первого рода с индексом ν. Имеет место асимптотическое выражение для функции $J_\nu(x)$, а именно $J_\nu(x) = \sqrt{2/(\pi x)}\cos(x - \pi\nu/2 - \pi/4) + O(x^{-3/2})$ при $x \to \infty$, из которого следует приближенная формула для корней $J_\nu(x)$: $\eta_{k,\nu} \approx 3\pi/4 + \pi\nu/2 + k\pi$ [27] (гл.V, § 23, п. 4).

Система собственных функций $\{J_\nu(\eta_{k,\nu}x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ задачи (1), (2) является ортогональной и полной в пространстве $L_{2,x}(0,1)$ и $\|J_\nu(\eta_{k,\nu}(\cdot))\|_{2,x}^2 = (J_\nu^{(1)}(\eta_{k,\nu}))^2/2$. Очевидно, что система функций $\{\widehat{J}_\nu(\eta_{k,\nu}x)\}_{k\in\mathbb{N}}$, где $\widehat{J}_\nu(\eta_{k,\nu}x) := J_\nu(\eta_{k,\nu}x)/\|J_\nu(\eta_{k,\nu}(\cdot))\|_{2,x}$, будет ортонормированной и полной в $L_{2,x}(0,1)$.

Для произвольной функции $f \in L_{2,x}(0,1)$ запишем

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{k,\nu}(f)\widehat{J}_\nu(\eta_{k,\nu}x), \tag{3}$$

где равенство понимается в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,x}(0,1)$. Напомним, что ряд (3) называют рядом Фурье – Бесселя, а величины $c_{k,\nu}(f)$, $k \in \mathbb{N}$, — коэффициентами Фурье – Бесселя функции f. Здесь

$$c_{k,\nu}(f) = \int_0^1 xf(x)\widehat{J}_\nu(\eta_{k,\nu}x)dx. \tag{4}$$

На интервале $(0,1)$ рассмотрим дифференциальный оператор Бесселя с индексом $\nu \geq 0$ [24]:

$$D_\nu := \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{\nu^2}{x^2}. \tag{5}$$

Далее полагаем $D_\nu^0 f \equiv f$, $D_\nu^r f := D_\nu(D_\nu^{r-1} f)$, $r \in \mathbb{N}$. Через $L_{2,x}^r(D_\nu;(0,1))$, $r \in \mathbb{N}$, обозначим множество функций $f \in L_{2,x}(0,1)$, которые имеют абсолютно непрерывные производные до $(2r-1)$-го порядка включительно и для которых $D_\nu^r f \in L_{2,x}(0,1)$. В случае $r=0$ полагаем $L_{2,x}^0(D_\nu;(0,1)) \equiv L_{2,x}(0,1)$.

Для изучения скорости сходимости рядов Фурье – Бесселя в пространстве $L_{2,x}(0,1)$ в работе [24] была введена одна обобщенная характеристика гладкости $\Omega_{m,x}^{(\nu)}$, $m \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 0$, следующим образом. Пусть

$$T_\nu(x,y;t) := \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{J}_\nu(\eta_{k,\nu}x)\widehat{J}(\eta_{k,\nu}y)t^k, \qquad 0<t<1, \quad \nu \geq 0,$$

а сходимость ряда понимается в смысле метрики пространства $L_{2,xy}((0,1)\times(0,1))$, которое является двумерным аналогом пространства $L_{2,x}(0,1)$. В $L_{2,x}(0,1)$ рассмотрим оператор обобщенного сдвига

$$F_{h,\nu}f(x) := \int_0^1 tf(t)T_\nu(x,t;1-h)dt, \qquad 0<h<1, \quad \nu \geq 0,$$

который имеет следующие свойства: данный оператор является линейным и однородным,

$$\|F_{h,\nu}f\|_{2,x} \leq \|f\|_{2,x}, \qquad \|F_{h,\nu}f - f\|_{2,x} \to 0 \ \text{ при } \ h \to 0+,$$

$$F_{h,\nu}\widehat{J}_\nu(\eta_{k,\nu}x) = (1-h)^k \widehat{J}_\nu(\eta_{k,\nu}x), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Следуя [24], для произвольной функции $f \in L_{2,x}(0,1)$ запишем обобщенные конечные разности первого и высших порядков:

$$\Delta_{h,\nu}^1 f(x) := F_{h,\nu}f(x) - f(x) = (F_{h,\nu} - \mathbb{I})f(x),$$

$$\Delta_{h,\nu}^m f(x) := \Delta_{h,\nu}^1(\Delta_{h,\nu}^{m-1} f(x)) = (F_{h,\nu} - \mathbb{I})^m f(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_{h,\nu}^k f(x), \qquad m = 2,3,\ldots,$$

где $F_{h,\nu}^0 f(x) \equiv f(x)$; $F_{h,\nu}^k f(x) := F_{h,\nu}(F_{h,\nu}^{k-1} f(x))$, $k \in \mathbb{N}$; $\mathbb{I}$ — единичный оператор в пространстве $L_{2,x}(0,1)$. Тогда под обобщенным модулем непрерывности m-го порядка понимают следующую характеристику гладкости в пространстве $L_{2,x}(0,1)$:

$$\Omega_{m,x}^{(\nu)}(f,t) := \sup\{\|\Delta_{h,\nu}^m f\|_{2,x} \colon 0 < h \leq t\}, \qquad 0<t<1. \tag{6}$$

Учитывая указанные выше свойства оператора обобщенного сдвига $F_{h,\nu}$ и определение (6), запишем ряд свойств, которые имеет величина $\Omega_{m,x}^{(\nu)}$: $\Omega_{m,x}^{(\nu)}(f,t) \to 0$ при $t \to 0+$; $\Omega_{m,x}^{(\nu)}(f,t)$ является неубывающей функцией от t; если $f_1, f_2 \in L_{2,x}(0,1)$, то $\Omega_{m,x}^{(\nu)}(f_1+f_2,t) \leq$ $\leq \Omega_{m,x}^{(\nu)}(f_1,t) + \Omega_{m,x}^{(\nu)}(f_2,t)$; $\Omega_{m,x}^{(\nu)}(f,t) \leq 2^m\|f\|_{2,x}$.

Из (3), а также из определения обобщенной конечной разности m-го порядка и из свойств оператора обобщенного сдвига для произвольной функции $f \in L_{2,x}(0,1)$ имеем

$$\Delta_{h,\nu}^m f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}((1-h)^k-1)^m c_{k,\nu}(f)\widehat{J}_\nu(\eta_{k,\nu}x), \tag{7}$$

где равенство понимается в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,x}(0,1)$. Учитывая, что $\{\widehat{J}_\nu(\eta_{k,\nu}x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ — ортонормированная система функций в $L_{2,x}(0,1)$, из (6), (7) получаем

$$\Omega_{m,x}^{(\nu)}(f,t) = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-(1-t)^k)^{2m}c_{k,\nu}^2(f)\right\}^{1/2}, \qquad 0<t<1. \tag{8}$$

Пусть $\Psi(t)$, $0\le t\le 1$, является непрерывной возрастающей функцией, такой, что $\Psi(0)=0$. Всюду далее будем называть ее мажорантой. Рассмотрим классы функций

$$W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi) := \{f\in L_{2,x}^r(D_\nu;(0,1))\colon \Omega_{m,x}^{(\nu)}(D_\nu^r f,t)\le\Psi(t)\quad \forall t\in(0,1)\},$$

где $\nu\ge 0$, $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$. В случае, когда $r=0$, полагаем $W_2(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi) := W_2^0(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi)$.

3. Основные результаты. Пусть $\mathcal{T}_{n,\nu} := \{q_{n,\nu}(x) = \sum_{k=1}^n a_k\widehat{J}_\nu(\eta_{k,\nu}x)\colon a_k\in\mathbb{R}, k = \overline{1,n}\}$, где $n\in\mathbb{N}$, $\nu\ge 0$, — подпространство полиномов размерности n. Для произвольной функции $f\in L_{2,x}(0,1)$ через $E_{n,\nu}(f)_{2,x}$, $n\in\mathbb{N}$, $\nu\ge 0$, обозначим ее наилучшее приближение элементами подпространства $\mathcal{T}_{n,\nu}$ в $L_{2,x}(0,1)$, т. е. $E_{n,\nu}(f)_{2,x} := \inf\{\|f-q_{n,\nu}\|_{2,x}\colon q_{n,\nu}\in\mathcal{T}_{n,\nu}\}$. Используя, например, теорему Теплера [28] (гл. 4, § 1) и (3), записываем

$$E_{n,\nu}(f)_{2,x} = \|f-\mathbb{S}_{n,\nu}(f)\|_{2,x} = \left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}c_{k,\nu}^2(f)\right\}^{1/2}, \tag{9}$$

где $\mathbb{S}_{n,\nu}(f,x) := \sum_{k=1}^n c_{k,\nu}(f)\widehat{J}_\nu(\eta_{k,\nu}x)$ — частная сумма n-го порядка ряда Фурье – Бесселя (3). Для произвольного множества $\mathfrak{M}\subset L_{2,x}(0,1)$ полагаем $E_{n,\nu}(\mathfrak{M})_{2,x} := \sup\{E_{n,\nu}(f)_{2,x}\colon f\in\mathfrak{M}\}$.

Пусть X — банахово пространство; $\mathbb{B}$ — единичный шар в X; $\mathfrak{M}\subset X$ — выпуклое центрально-симметричное множество; $\mathcal{L}_n\subset X$ — n-мерное линейное подпространство; $\mathcal{L}^n\subset X$ — подпространство коразмерности n; $\Lambda\colon X\to\mathcal{L}_n$ — линейный непрерывный оператор, отображающий X в $\mathcal{L}_n$; $\Lambda^\perp\colon X\to\mathcal{L}_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования; $\{u_j\}_{k=1}^n\subset X$ — ортонормированная система функций. Величины

$$d_n(\mathfrak{M},X) = \inf\{\sup\{\inf\{\|f-g\|_X\colon g\in\mathcal{L}_n\}\colon f\in\mathfrak{M}\}\colon \mathcal{L}_n\subset X\},$$

$$d^n(\mathfrak{M},X) = \inf\{\sup\{\|f\|_X\colon f\in\mathfrak{M}\cap\mathcal{L}^n\}\colon \mathcal{L}^n\subset X\},$$

$$b_n(\mathfrak{M},X) = \sup\{\sup\{\varepsilon>0\colon \varepsilon\mathbb{B}\cap\mathcal{L}_{n+1}\subset\mathfrak{M}\}\colon \mathcal{L}_{n+1}\subset X\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M},X) = \inf\{\inf\{\sup\{\|f-\Lambda f\|_X\colon f\in\mathfrak{M}\}\colon \Lambda X\subset\mathcal{L}_n\}\colon \mathcal{L}_n\subset X\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M},X) = \inf\{\inf\{\sup\{\|f-\Lambda^\perp f\|_X\colon f\in\mathfrak{M}\}\colon \Lambda^\perp X\subset\mathcal{L}_n\}\colon \mathcal{L}_n\subset X\},$$

$$\varphi_n(\mathfrak{M},X) = \inf\left\{\sup\left\{\Big\|f-\sum_{j=1}^n(f,u_j)u_j\Big\|_X\colon f\in\mathfrak{M}\right\}\colon \{u_j\}_{j=1}^n\subset X\right\}$$

называют соответственно колмогоровским, гельфандовским, бернштейновским, линейным, проекционным поперечниками и поперечником Фурье множества $\mathfrak{M}$ в X (см., например, [29–31]). Если X — гильбертово пространство, то между указанными аппроксимативными характеристиками имеют место следующие соотношения:

$$b_n(\mathfrak{M},X)\le d^n(\mathfrak{M},X)\le d_n(\mathfrak{M},X)=\Pi_n(\mathfrak{M},X)=\delta_n(\mathfrak{M},X)=\varphi_n(\mathfrak{M},X). \tag{10}$$

Теорема 1. *Пусть* $n,\ m\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ \nu\ge 0$ *и функция* Ψ *является мажорантой. Тогда имеют место неравенства*

$$\frac{1}{\eta_{n+1,\nu}^{2r}}\inf_{0<t<1}\frac{\Psi(t)}{(1-(1-t)^{n+1})^m}\le p_n(W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi),L_{2,x}(0,1))\le$$

$$\le E_{n,\nu}(W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi))_{2,x}\le\frac{1}{\eta_{n+1,\nu}^{2r}}\overline{\lim_{t\to 0+}}\frac{\Psi(t)}{(1-(1-t)^{n+1})^m}, \tag{11}$$

где $p_n(W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi),L_{2,x}(0,1))$ *— любой из поперечников, указанных выше.*

***Следствие* 1.** *Пусть* $n,\ m\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ \nu\ge 0$ *и мажоранта* Ψ *удовлетворяет условию*

$$\inf_{0<t<1}\frac{\Psi(t)}{(1-(1-t)^{n+1})^m}=\overline{\lim_{t\to 0+}}\frac{\Psi(t)}{(1-(1-t)^{n+1})^m}. \tag{12}$$

Тогда справедливы равенства

$$p_n(W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi),L_{2,x}(0,1))=E_{n,\nu}(W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi))_{2,x}=\frac{1}{\eta_{n+1,\nu}^{2r}}\overline{\lim_{t\to 0+}}\frac{\Psi(t)}{(1-(1-t)^{n+1})^m}, \tag{13}$$

где $p_n(W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi),L_{2,x}(0,1))$ *— любой из рассмотренных ранее поперечников.*

При выполнении условия (12), в частности, имеем

$$d_n(W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi),L_{2,x}(0,1))=\frac{1}{\eta_{n+1,\nu}^{2r}}\overline{\lim_{t\to 0+}}\frac{\Psi(t)}{(1-(1-t)^{n+1})^m}.$$

Сравним это результат с теоремой 6, полученной В. А. Абиловым, Ф. В. Абиловой и М. К. Керимовым в работе [24]. Для удобства воспользуемся системой обозначений, принятых в данной статье. Из доказательства теоремы 6 из [24] (см. получение оценки снизу для d_n) следует, что в ней, по сути, рассматриваются не классы функций $W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi),\ r\in\mathbb{Z}_+,\ m\in\mathbb{N},\ \nu\ge 0$, а более широкие классы $W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi,t):=\{f\in L_{2,x}^r(D_\nu;(0,1))\colon \Omega_{m,x}^{(\nu)}(D_\nu^r f,t)\le\Psi(t)\}$, где $t\in(0,1)$ — фиксированное значение, $r\in\mathbb{Z}_+,\ m\in\mathbb{N},\ \nu\ge 0$. Иными словами, для каждой функции $f\in W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi,t)$ выполнение неравенства $\Omega_{m,x}^{(\nu)}(D_\nu^r f,t)\le\Psi(t)$ требуется лишь в произвольно выбранной фиксированной точке $t\in(0,1)$, а не в каждой точке интервала $(0,1)$, как это имеет место в рассматриваемом здесь случае для любого элемента из класса $W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi)$. За счет этого авторам [24] при вычислении точного значения колмогоровского поперечника

$$d_n(W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi,t),L_{2,x}(0,1))=\frac{\Psi(t)}{\eta_{n+1,\nu}^{2r}(1-(1-t)^{n+1})^m}$$

не пришлось налагать дополнительных условий на мажоранту Ψ.

Важная роль в теории рядов Фурье принадлежит получению оценок коэффициентов Фурье на различных классах функций. Это позволяет сформулировать наиболее важные признаки сходимости и некоторые свойства рядов Фурье как в периодическом, так и в непериодическом случаях. Для рядов Фурье – Бесселя указанные вопросы рассматривались, например, в монографии [32] (гл. IX, § 4, 7, 8). Сформулированные далее утверждения можно рассматривать как дальнейшее развитие данной тематики для классов функций $W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi)$, $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $\nu\ge 0$.

Теорема 2. *Пусть* $m\in\mathbb{N}$, $n=2,3,\ldots$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $\nu\ge 0$ *и функция* Ψ *является мажорантой. Тогда имеют место следующие неравенства*:

$$\frac{1}{\eta_{n,\nu}^{2r}}\inf_{0<t<1}\frac{\Psi(t)}{(1-(1-t)^n)^m}\le\sup_{f\in W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi)}c_{n,\nu}(f)\le\frac{1}{\eta_{n,\nu}^{2r}}\overline{\lim_{t\to 0+}}\frac{\Psi(t)}{(1-(1-t)^n)^m}. \tag{14}$$

Следствие 2. *Если* $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $\nu\ge 0$ *и мажоранта* Ψ *для любого* $k\in\mathbb{N}$ *удовлетворяет условию*

$$\inf_{0<t<1}\frac{\Psi(t)}{(1-(1-t)^k)^m}=\overline{\lim_{t\to 0+}}\frac{\Psi(t)}{(1-(1-t)^k)^m}, \tag{15}$$

то для всех $n=2,3,\ldots$ *справедливы равенства*

$$\sup_{f\in W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi)}c_{n,\nu}(f)=\frac{1}{\eta_{n,\nu}^{2r}}\overline{\lim_{t\to 0+}}\frac{\Psi(t)}{(1-(1-t)^n)^m}. \tag{16}$$

В качестве одного из возможных приложений, например следствия 2, отметим, что для произвольной функции $f\in W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi)$, где $m,r\in\mathbb{N}$, $\nu\ge 0$, из [31] (гл. IX, § 4) следует, что ее ряд Фурье – Бесселя (3) будет сходиться абсолютно и равномерно на множестве $(0,1)$.

Покажем далее, что существует семейство мажорант, для каждой из которых выполнено условие (15), а значит и (12). Пусть, например, $\Psi_{\beta;a,m}(t):=(a^t-1)^m\beta(t)$, где $a\in(1,\infty)$ — произвольное число, β — любая непрерывная неубывающая на $[0,1]$ функция такая, что $\beta(0)>0$, $m\in\mathbb{N}$. Поскольку для $0\le b\le 1$ справедлива формула $1-b^n=(1-b)(1+b+\ldots$ $\ldots+b^{n-2}+b^{n-1})$ (см., например, [33], гл. III, § 4, п. 1), то

$$(1-(1-t)^k)^m=t^m\varphi_k^m(t),\qquad 0\le t\le 1,$$

где

$$\varphi_k(t):=\left\{1,\ \text{если } k=1;\ 2-t,\ \text{если } k=2;\sum_{j=0}^{k-1}(1-t)^j,\ \text{если } k=3,4,\ldots\right\}.$$

С учетом этого можно убедиться в справедливости соотношения

$$\inf_{0<t<1}\frac{\Psi_{\beta;a,m}(t)}{(1-(1-t)^k)^m}=\overline{\lim_{t\to 0+}}\frac{\Psi_{\beta;a,m}(t)}{(1-(1-t)^k)^m}=\left(\frac{\ln a}{k}\right)^m\beta(0),\qquad k\in\mathbb{N}.$$

Тогда из следствий 1, 2 на основании равенств (13) и (16) получаем соответственно

$$p_n(W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi_{\beta;a,m}),L_{2,x}(0,1))=E_{n,\nu}(W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi_{\beta;a,m}))_{2,x}=\left(\frac{\ln a}{n+1}\right)^m\frac{\beta(0)}{\eta_{n+1,\nu}^{2r}},\quad n\in\mathbb{N},$$

и

$$\sup_{f\in W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi_{\beta;a,m})} c_{n,\nu}(f)=\left(\frac{\ln a}{n}\right)^m\frac{\beta(0)}{\eta_{n,\nu}^{2r}}$$

для всех $n=2,3,\ldots$. Здесь $p_n(W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi_{\beta;a,m}),L_{2,x}(0,1))$ — любой из указанных ранее поперечников.

4. Доказательство теоремы 1. Пусть $r\in\mathbb{N}$. В работе [24] было показано, что для произвольной функции $f\in L_{2,x}^r(0,1)$ имеют место равенства

$$c_{k,\nu}(f)=(-1)^r\frac{1}{\eta_{k,\nu}^{2r}}c_{k,\nu}(D_\nu^r f),\qquad k\in\mathbb{N}. \tag{17}$$

Используя формулы (8), (17), получаем

$$\Omega_{m,x}^{(\nu)}(D_\nu^r f,t)=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-(1-t)^k)^{2m}c_{k,\nu}^2(D_\nu^r f)\right\}^{1/2}=$$

$$=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-(1-t)^k)^{2m}\eta_{k,\nu}^{4r}c_{k,\nu}^2(f)\right\}^{1/2},\qquad 0<t<1. \tag{18}$$

Исходя из (9), (17) и того факта, что $\{\eta_{k,\nu}\}_{k\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность положительных чисел, для любой функции $f\in L_{2,x}^r(D_\nu;(0,1))$ записываем

$$E_{n,\nu}(f)_{2,x}=\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{c_{k,\nu}^2(D_\nu^r f)}{\eta_{k,\nu}^{4r}}\right\}^{1/2}\le\frac{1}{\eta_{n+1,\nu}^{2r}}E_{n,\nu}(D_\nu^r f)_{2,x}. \tag{19}$$

Рассмотрим произвольную функцию $f\in L_{2,x}^r(0,1)$. Если f не является полиномом, т. е. $f\notin$ $\notin\mathcal{T}_{m,\nu}$, где $m\in\mathbb{N}$ — любое число, то согласно (9) получаем $E_{n,\nu}^2(D_\nu^r f)_{2,x}=\sum_{k=n+1}^{\infty}c_{k,\nu}^2(D_\nu^r f)$. Если же f является полиномом, т. е. при некотором натуральном числе $m>n$ имеем $f(x)=$ $=\sum_{k=1}^{m}c_{k,\nu}(f)\widehat{J}_\nu(\eta_{k,\nu}x)$, то из (17) следует, что функция $D_\nu^r f$ также будет элементом подпространства $\mathcal{T}_{m,\nu}$ и в этом случае $E_{n,\nu}^2(D_\nu^r f)_{2,x}=\sum_{k=n+1}^{m}c_{k,\nu}^2(D_\nu^r f)$. Рассмотрим произвольное значение $i\in\mathbb{Z}_+$ и величину $E_{n,\nu}^2(D_\nu^r f)_{2,x}$ представим следующим образом:

$$E_{n,\nu}^2(D_\nu^r f)_{2,x}=\sum_{k=n+1}^{n+i+1}c_{k,\nu}^2(D_\nu^r f)+\sigma_{i,f,r}^{(\nu)}. \tag{20}$$

Из (20) следует, что для каждого i существует единственное число $\sigma_{i,f,r}^{(\nu)}\ge 0$, зависящее от i,f,r и от рассматриваемой ортонормированной системы бесселевых функций. При этом если $f\in L_{2,x}^r(0,1)$ не является полиномом, то $\{\sigma_{i,f,r}^{(\nu)}\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел, такая, что $\sigma_{i,f,r}^{(\nu)}\to 0$ при $i\to\infty$. Если же $f\in\mathcal{T}_{m,\nu}$, где $m>n$ и $c_{m,\nu}(f)\ne 0$, то невозрастающая последовательность неотрицательных чисел $\{\sigma_{i,f,r}^{(\nu)}\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ будет иметь нулевые элементы $\sigma_{i,f,r}^{(\nu)}=0$ для всех $i\in\mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих соотношению

$m-n-1\le i$. В ходе дальнейших рассуждений два указанных случая разделять не будем, поскольку каждый из них не влияет на общий ход доказательства.

Далее произвольным образом построим числовую последовательность $\{v_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ так, чтобы ее элементы удовлетворяли таким требованиям: $v_i\in(0,1/(n+i+1)]$, $i\in\mathbb{Z}_+$; последовательность является убывающей и $v_i\to 0$ при $i\to\infty$. Учитывая изложенное и (18), получаем

$$\sum_{k=n+1}^{n+i+1} c_{k,\nu}^2(D_\nu^r f)\le\frac{1}{(1-(1-v_i)^{n+1})^{2m}}\sum_{k=n+1}^{n+i+1}(1-(1-v_i)^k)^{2m}c_{k,\nu}^2(D_\nu^r f)\le$$

$$\le\left(\frac{\Omega_{m,x}^{(\nu)}(D_\nu^r f,v_i)}{(1-(1-v_i)^{n+1})^m}\right)^2. \tag{21}$$

Тогда с учетом (19) – (21) для $f\in L_{2,x}^r(0,1)$ имеем

$$E_{n,\nu}^2(f)_{2,x}\le\frac{1}{\eta_{n+1,\nu}^{4r}}\left\{\left(\frac{\Omega_{m,x}^{(\nu)}(D_\nu^r f,v_i)}{(1-(1-v_i)^{n+1})^m}\right)^2+\sigma_{i,f,r}^{(\nu)}\right\}.$$

Переходя в правой части последнего неравенства к верхнему пределу при $i\to\infty$ и используя определение класса функций $W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi)$, получаем

$$E_{n,\nu}(f)_{2,x}\le\frac{1}{\eta_{n+1,\nu}^{2r}}\overline{\lim_{i\to\infty}}\frac{\Psi(v_i)}{(1-(1-v_i)^{n+1})^m}\le\frac{1}{\eta_{n+1,\nu}^{2r}}\overline{\lim_{t\to 0+}}\frac{\Psi(t)}{(1-(1-t)^{n+1})^m}. \tag{22}$$

Исходя из определения колмогоровского поперечника, которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$d_n(W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi),L_{2,x}(0,1))=$$

$$=\inf\{\sup\{\inf\{\|f-g\|_{2,x}: g\in\mathcal{L}_n\}: f\in W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi)\}:\mathcal{L}_n\subset L_{2,x}(0,1)\},$$

и используя соотношения (10), (22), записываем оценки сверху для указанных ранее поперечников

$$p_n(W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi),L_{2,x}(0,1))\le d_n(W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi),L_{2,x}(0,1))\le E_{n,\nu}(W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi))_{2,x}\le$$

$$\le\frac{1}{\eta_{n+1,\nu}^{2r}}\overline{\lim_{t\to 0+}}\frac{\Psi(t)}{(1-(1-t)^{n+1})^m}. \tag{23}$$

Перейдем к установлению оценок снизу изучаемых экстремальных характеристик класса $W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi)$. С этой целью воспользуемся бернштейновским поперечником, который в рассматриваемом здесь случае имеет вид

$$b_n(W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi),L_{2,x}(0,1))=$$

$$=\sup\big\{\sup\{\varepsilon>0:\varepsilon\mathbb{B}\cap\mathcal{L}_{n+1}\subset W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi)\}:\mathcal{L}_{n+1}\subset L_{2,x}(0,1)\big\}. \tag{24}$$

Пусть $q_{n+1,\nu}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \widehat{J}_\nu(\eta_{k,\nu}x)$, где $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n+1}$, — любой полином из подпространства $\mathcal{T}_{n+1,\nu}$. Исходя из (24), в $L_{2,x}(0,1)$ рассмотрим множество функций

$$\mathcal{B}_{n+1}(\widetilde{\varepsilon}_{n+1,\nu}) := \widetilde{\varepsilon}_{n+1,\nu}\mathbb{B} \cap \mathcal{T}_{n+1,\nu} = \{q_{n+1,\nu} \in \mathcal{T}_{n+1,\nu} : \|q_{n+1,\nu}\|_{2,x} \le \widetilde{\varepsilon}_{n+1,\nu}\},$$

где

$$\widetilde{\varepsilon}_{n+1,\nu} := \frac{1}{\eta_{n+1,\nu}^{2r}} \inf_{0<t<1} \frac{\Psi(t)}{(1-(1-t)^{n+1})^m}, \tag{25}$$

и покажем, что оно принадлежит классу $W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi)$.

Пусть $0 < u < 1$. Для произвольного полинома $q_{n+1,\nu} \in \mathcal{B}_{n+1}(\widetilde{\varepsilon}_{n+1,\nu})$, исходя из (18) и (25), записываем

$$\Omega_{m,x}^{(\nu)}(D_\nu^r q_{n+1,\nu}; u) = \left\{\sum_{k=1}^{n+1}(1-(1-u)^k)^{2m}\eta_{k,\nu}^{4r}c_{k,\nu}^2(q_{n+1,\nu})\right\}^{1/2} \le$$

$$\le (1-(1-u)^{n+1})^m \eta_{n+1,\nu}^{2r}\|q_{n+1,\nu}\|_{2,x} \le (1-(1-u)^{n+1})^m \eta_{n+1,\nu}^{2r}\widetilde{\varepsilon}_{n+1,\nu} =$$

$$= (1-(1-u)^{n+1})^m \inf_{0<t<1} \frac{\Psi(t)}{(1-(1-t)^{n+1})^m}. \tag{26}$$

Полагая в правой части соотношения (26) $t = u$, получаем $\Omega_{m,x}^{(\nu)}(D_\nu^r q_{n+1,\nu}; u) \le \Psi(u)$ для любого $u \in (0,1)$. Следовательно, $\mathcal{B}_{n+1}(\widetilde{\varepsilon}_{n+1,\nu}) \subset W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi)$.

Исходя из (24), (25), имеем

$$b_n(W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi), L_{2,x}(0,1)) \ge b_n(\mathcal{B}_{n+1}(\widetilde{\varepsilon}_{n+1,\nu}), L_{2,x}(0,1)) \ge$$

$$\ge \frac{1}{\eta_{n+1,\nu}^{2r}} \inf_{0<t<1} \frac{\Psi(t)}{(1-(1-t)^{n+1})^m}. \tag{27}$$

Требуемое соотношение (11) следует из формул (23) и (27) в случае $r \in \mathbb{N}$. Рассуждения, когда $r = 0$, не приводим по той причине, что они практически полностью повторяют приведенные выше, но без привлечения формул (17) и (19).

Теорема 1 доказана.

5. Доказательство теоремы 2. Для коэффициентов Фурье – Бесселя (4) при $n = 2, 3, \ldots$ из соотношения (9) имеем

$$c_{n,\nu}(f) \le E_{n-1,\nu}(f)_{2,x}. \tag{28}$$

Используя (11), где n заменено на $n-1$, и соотношение (28), для $n = 2, 3, \ldots$ получаем оценки сверху

$$\sup_{f \in W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi)} c_{n,\nu}(f) \le E_{n-1,\nu}(W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi))_{2,x} \le \frac{1}{\eta_{n,\nu}^{2r}} \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{\Psi(t)}{(1-(1-t)^n)^m}. \tag{29}$$

Чтобы установить оценку снизу, рассмотрим функцию $f_{1,\nu}(x) := \widetilde{\varepsilon}_{n,\nu}\widehat{J}_\nu(\eta_{n,\nu}x)$, где величина $\widetilde{\varepsilon}_{n,\nu}$ определяется формулой (25) после замены в ней n на $n-1$. Поскольку $f_{1,\nu} \in \mathcal{T}_{n,\nu}$

и $\|f_{1,\nu}\|_{2,x} = \widetilde{\varepsilon}_{n,\nu}$, то очевидно, что функция $f_{1,\nu}$ является элементом множества $\mathcal{B}_{n,\nu}(\widetilde{\varepsilon}_{n,\nu}) = \widetilde{\varepsilon}_{n,\nu}\mathbb{B} \cap \mathcal{T}_{n,\nu}$. Используя соответствующую часть доказательства теоремы 1, несложно убедиться в том, что $\mathcal{B}_{n,\nu}(\widetilde{\varepsilon}_{n,\nu}) \subset W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi)$. Следовательно, для $n = 2, 3, \ldots$ имеем

$$\sup_{f \in W_2^r(\Omega_{m,x}^{(\nu)};\Psi)} c_{n,\nu}(f) \geq c_{n,\nu}(f_{1,\nu}) = \widetilde{\varepsilon}_{n,\nu} = \frac{1}{\eta_{n,\nu}^{2r}} \inf_{0<t<1} \frac{\Psi(t)}{(1-(1-t)^n)^m}. \tag{30}$$

Тогда неравенства (14) следуют из соотношений (29), (30).

Теорема 2 доказана.

Литература

1. *Kolmogorov A. N.* Uber die besste Annaherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen // Ann. Math. – 1936. – **37**. – S. 107 – 110.
2. *Tikhomirov V. M.* Diameters of sets in function spaces and the theory of best approximations // Russ. Math. Surv. – 1960. – **15**, № 3. – P. 75 – 111.
3. *Ismagilov R. S.* Diameters of set in normed linear spaces and the approximation of functions by trigonometric polynomials // Russ. Math. Surv. – 1974. – **29**, № 3. – P. 169 – 186.
4. *Taikov L. V.* Inequalities containing best approximations and the modulus of continuity of functions in L_2 // Math. Notes. – 1976. – **20**, № 3. – P. 797 – 800.
5. *Taikov L. V.* Best approximation of differentiable functions in the metric of the space L_2 // Math. Notes. – 1977. – **22**, № 4. – P. 789 – 794.
6. *Taikov L. V.* Structural and constructive characteristics of functions in L_2 // Math. Notes. – 1979. – **25**, № 2. – P. 113 – 116.
7. *Vakarchuk S. B.* K-functionals and exact values of n-widths for several classes from L_2 // Math. Notes. – 1999. – **66**, № 4. – P. 404 – 408.
8. *Vakarchuk S. B.* On best polynomial approximations in L_2 // Math. Notes. – 2001. – **70**, № 3-4. – P. 300 – 310.
9. *Vakarchuk S. B.* Jackson-type inequalities and exact values of widths of classes of functions in the space S^p, $1 \leq p < \infty$ // Ukr. Math. J. – 2004. – **56**, № 5. – P. 718 – 729.
10. *Vakarchuk S. B., Schitov A. N.* Best polynomial approximations in L_2 and widths of certain classes of functions // Ukr. Math. J. – 2004. – **56**, № 11. – P. 1738 – 1748.
11. *Vakarchuk S. B.* Jackson-type inequalities and widths of functions classes in L_2 // Math. Notes. – 2006. – **80**, № 1-2. – P. 11 – 18.
12. *Vakarchuk S. B., Zabutnaya V. I.* A sharp inequality of Jackson – Stechkin type in L_2 and the widths of functional classes // Math. Notes. – 2009. – **86**, № 3. – P. 306 – 313.
13. *Shabozov M. Sh.* Widths of classes of periodic differentiable functions in the space $L_2[0, 2\pi]$ // Math. Notes. – 2010. – **87**, № 3-4. – P. 575 – 581.
14. *Shabozov M. Sh., Yusupov G. A.* Exact constants of Jackson-type inequalities and exact value of the widths of some classes of functions in L_2 // Sib. Math. J. – 2011. – **52**, № 6. – P. 1124 – 1136.
15. *Шабозов М. Ш., Вакарчук С. Б.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Anal. Math. – 2012. – **38**, № 2. – P. 147 – 159.
16. *Vakarchuk S. B.* Generalized smothness characteristics in Jackson-type inequalities and widths of classes of functions in L_2 // Math. Notes. – 2015. – **98**, № 3-4. – P. 572 – 588.
17. *Vacarchuk S. B.* Jackson-type inequalities with generalized modulus of continuity and exact values of the n-widths for the classes of (ψ, β)-differentiable functions in L_2. II // Ukr. Math. J. – 2017. – **68**, № 8. – P. 1165 – 1183.
18. *Vacarchuk S. B.* Jackson-type inequalities with generalized modulus of continuity and exact values of the n-widths for the classes of (ψ, β)-differentiable functions in L_2. III // Ukr. Math. J. – 2017. – **68**, № 10. – P. 1495 – 1518.
19. *Vakarchuk S. B.* Widths of some classes of functions difined by the generalized moduli of continuity ω_γ in the space L_2 // J. Math. Sci. – 2017. – **227**, № 1. – P. 105 – 115.

20. *Vakarchuk S. B.* Best polynomial approximations and widths of classes of functions in the space L_2 // Math. Notes. – 2018. – **103**, № 1-2. – P. 308 – 312.
21. *Abilov V. A., Abilova F. V.* Approximation of functions by Fourier – Bessel sums // Russ. Math. – 2001. – **45**, № 8. – P. 1 – 7.
22. *Vakarchuk S. B.* Mean approximation of functions on the real axis by algebraic polynomials with Chebyshev – Hermite weight and widths of function classes // Math. Notes. – 2014. – **95**, № 5-6. – P. 599 – 614.
23. *Vakarchuk S. B., Shvachko A. V.* On the best approximation in the mean by algebraic polynomials with weight and exact values of widths for the classes of functions // Ukr. Math. J. – 2014. – **65**, № 12. – P. 1774 – 1792.
24. *Abilov V. A., Abilova F. V., Kerimov M. K.* Sharp estimates for the convergence rate of Fourier – Bessel series // Comput. Math. and Math. Phys. – 2015. – **55**, № 6. – P. 907 – 916.
25. *Тухлиев К.* Среднеквадратическое приближение функций рядами Фурье – Бесселя и значения поперечников некоторых функциональных классов // Чебышев. сб. – 2017. – **17**, № 4. – С. 141 – 156.
26. *Григорян Ю. И.* Поперечники некоторых множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. – 1975. – **30**, №3. – С. 161 – 162.
27. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – 3-е изд. – М.: Наука, 1976. – 528 с.
28. *Даугавет И. К.* Введение в теорию приближения функций. – Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1977. – 184 с.
29. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1976. – 304 с.
30. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. – New York: Nova Sci. Publ., 1993. – 272 p.
31. *Pinkus A.* n-Widths in approximation theory. – New York: Springer-Verlag, 1985. – 290 p.
32. *Толстов Г. П.* Ряды Фурье. – 3-е изд. – М.: Наука, 1980. – 382 с.
33. *Сачков В. Н.* Ведение в комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука, 1982. – 384 с.

Получено 15.10.18