УДК 517.5

А. С. Романюк, В. С. Романюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

АПРОКСИМАЦІЙНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ У ПРОСТОРІ $B_{\infty,1}$

We obtain the exact-order estimates of the Kolmogorov widths and entropy numbers for the classes $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ and $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ in the norm of the $B_{\infty,1}$-space.

Встановлено точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників та ентропійних чисел класів $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ і $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ за нормою простору $B_{\infty,1}$.

1. Вступ. У цій статті викладено результати розв'язання задач про точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників і ентропійних чисел класів $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ і $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, а також найкращих наближень класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$ періодичних функцій кількох змінних у просторі $B_{\infty,1}$, норма в якому є більш „сильною", ніж L_∞-норма. Мотивацією до дослідження таких апроксимаційних характеристик саме у просторі $B_{\infty,1}$ стала та обставина, що питання про їхні порядкові значення у просторі L_∞ при $d \geq 3$ на даний час залишається відкритим (див. [1], питання 4.2, 6.3). Принагідно зазначимо, що схожу за змістом задачу (але тільки для класів функцій з однією змінною) розв'язано в [2]: встановлено точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників та ентропійних чисел одиничних куль з так званих двійкових просторів Бєсова dyad $B^{0,\gamma}_{p,\theta}$, компактно вкладених в експоненціальні простори Орліча $\exp L^\nu$, що наділені нормою Люксембурга. Така норма тісно пов'язана з L_p-нормами при $1 \leq p < \infty$.

2. Позначення, означення та допоміжні твердження. Введемо базові позначення й означимо функціональні простори та класи в них, а також відповідні до проведених досліджень апроксимаційні характеристики.

Позначимо через $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ відповідно множини натуральних, дійсних, невід'ємних дійсних, цілих, цілих невід'ємних чисел, а через $A^d = \prod_{i=1}^{d} A$, $d \in \mathbb{N}$, декартів добуток d множин A, де A — одна із множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$.

Означимо простори та класи функцій. Нехай $\mathbb{R}^d$ — d-вимірний евклідів простір з елементами $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$; $\pi_d := \prod_{j=1}^{d} [0, 2\pi) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \colon x_j \in [0, 2\pi),\ j = \overline{1,d}\}$. Через $L_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, позначимо простір вимірних 2π-періодичних за кожною змінною функцій f зі скінченними нормами

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|, \qquad p = \infty.$$

Для $f,\ g \in L_1(\pi_d)$ означимо оператор згортки $*$ формулою

$$(f * g)(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}.$$

Визначимо повний мішаний p-модуль гладкості порядку l функції $f \in L_p(\pi_d)$ таким чином:

$$\omega_l(f, \boldsymbol{t})_p := \sup_{|h_i| \le t_i} \|\Delta^l_{\boldsymbol{h}} f\|_p, \qquad \boldsymbol{t} = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d_+.$$

Тут для $\boldsymbol{h} = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d$ і $l \in \mathbb{N}$

$$\Delta^l_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) := \Delta^l_{h_d} \dots \Delta^l_{h_1} f(x_1, \dots, x_d),$$

де

$$\Delta^l_{h_j} f(\boldsymbol{x}) = \Delta_{h_j} \Delta^{l-1}_{h_j} f(\boldsymbol{x}), \qquad \Delta^0_{h_j} f(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}),$$

$$\Delta_{h_j} f(\boldsymbol{x}) \equiv \Delta^1_{h_j} f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \dots, x_j + h_j, \dots, x_d) - f(\boldsymbol{x}).$$

Відомо, що

$$\Delta^l_{h_j} f(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^{k+l} C^k_l f(x_1, \dots, x_j + k h_j, \dots, x_d).$$

Кажуть, що функція $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, *належить простору* $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, *якщо її напівнорма*

$$|f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} := \begin{cases} \left(\int\limits_{\pi_d} \left(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{-r_j} \omega_l(f, \boldsymbol{t})_p \right)^{\theta} \prod\limits_{j=1}^{d} \dfrac{dt_j}{t_j} \right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{t_j > 0} \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{-r_j} \omega_l(f, \boldsymbol{t})_p \,, & \theta = \infty, \end{cases}$$

де $l > \max\{r_i,\ i = \overline{1, d}\}$, *є скінченною.*

Норму на лінійних просторах $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ задамо формулою $\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} = \|f\|_p + |f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}}$.

Простори $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ введено в [3]. З одного боку, вони є узагальненнями відомих ізотропних просторів Бєсова [4] (у випадку $\theta = \infty$ — просторів Нікольського [5]), а з іншого — належать шкалі просторів SB мішаної гладкості, введених Т. І. Амановим у [6].

Зазначимо, що для просторів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ справедливими є такі вкладення по параметру θ:

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p,1} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta_1} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta_2} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty} \equiv H^{\boldsymbol{r}}_p, \tag{1}$$

де $1 \le \theta_1 < \theta_2 \le \infty$.

У [3] простори $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ охарактеризовано в термінах так званого декомпозиційного нормування належних їм функцій на базі розкладу їх у ряд Фур'є за тригонометричною системою $\{e^{i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})}\}_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d}$. Саме таке нормування часто використовується у доведенні належності тієї чи іншої функції простору $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ або деякому класу з цього простору.

Сформулюємо результат із [3] у відповідності з прийнятими нижче означеннями і позначеннями. Для вектора $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1, d}$, покладемо

$$\rho(\boldsymbol{s}) := \{\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : \ [2^{s_j - 1}] \le |k_j| < 2^{s_j}, \ j = \overline{1, d}\}$$

і для $f \in L_p(\pi_d)$ означимо

$$\delta_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) := \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho(\boldsymbol{s})} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,$$

де $\widehat{f}(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{t})} d\boldsymbol{t}$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Позначимо

$$L_p^0(\pi_d) := \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \ \int\limits_0^{2\pi} f(\boldsymbol{x}) dx_j = 0, \ \ j = \overline{1, d} \right\}.$$

Нехай $p \in (1, \infty)$. У [3] доведено, що для напівнорми $|f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}}$ функції $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} \cap L_p^0(\pi_d)$ справджуються співвідношення

$$|f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d_+} 2^{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r})\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}, \qquad 1 \le \theta < \infty, \tag{2}$$

$$|f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}} \asymp \sup_{\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d_+} 2^{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r})} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)\|_p \,, \tag{3}$$

а також показано, що на множині $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} \cap L_p^0(\pi_d)$ напівнорма $| \cdot |_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}}$ насправді є нормою.

Тут і в подальшому $\asymp$ позначає відношення слабкої еквівалентності, тобто для виразів a та b, що визначені деякою сукупністю параметрів, запис $a \asymp b$ означає, що існують такі додатні величини c_1 та c_2, які не залежать від одного істотного параметра, що $c_1 b \le a \le c_2 b$. Також використовуємо символи $\ll$ чи $\gg$ для порядкових нерівностей, тобто $a \ll b$ $(a \gg b)$, якщо існує така додатна стала C, що $a \le Cb$ $(b \le Ca)$.

Так звані порядкові (або точні за порядком) співвідношення (2) і (3) при певній їхній модифікації мають місце і у випадках $p = 1$ і $p = \infty$. Отже, нехай $V_l(u)$, $l \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{R}$ позначає ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_l(u) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{l} \cos ku + 2 \sum_{k=l+1}^{2l} \frac{2l - k}{l} \cos ku.$$

Багатовимірне ядро $V_l(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, $d \ge 2$, означимо формулою $V_l(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^d V_l(x_j)$. На множині $L_p(\pi_d)$ визначимо оператор згортки $\boldsymbol{V}_l : L_p(\pi_d) \longrightarrow L_1(\pi_d)$, що діє згідно з формулою

$$\boldsymbol{V}_l f(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\boldsymbol{y}) V_l(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) d\boldsymbol{y}.$$

Значеннями оператора $\boldsymbol{V}_l$ є так звані кратні середні Валле Пуссена функції $f \in L_p(\pi_d)$

$$V_l(f;\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{V}_l f(\boldsymbol{x}),$$

які у відомий спосіб можна подати і у вигляді тригонометричних поліномів, що породжуються розкладами функцій f у ряд Фур'є за кратною тригонометричною системою.

Якщо $f \in L_p(\pi_d)$, а

$$A_s(\boldsymbol{x}) := 2^d \prod_{j=1}^{d} (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)),$$

$\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1,d}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ (при $s_j = 0$ вважаємо, що $V_{2^{s_j-1}}(x_j) = 0$), то покладемо

$$\mathbb{A}_{\boldsymbol{s}} f(\boldsymbol{x}) = (f * A_{\boldsymbol{s}})(\boldsymbol{x}).$$

Для кожного $\boldsymbol{s}$ за допомогою оператора $\mathbb{A}_{\boldsymbol{s}}$ визначаються деякі кратні середні $A_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}) := := \mathbb{A}_{\boldsymbol{s}} f(\boldsymbol{x})$ функції $f \in L_p(\pi_d)$, які на підставі відомих властивостей оператора згортки можна подати у вигляді тригонометричного полінома з певними коефіцієнтами, залежними від f. Зазначимо, що розмірність таких поліномів для всіх $f \in L_p(\pi_d)$ дорівнює $2^{|\boldsymbol{s}|_1}$. Тут $|\boldsymbol{s}|_1 := |s_1| + \ldots + |s_d|$ для $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d$.

Таким чином, для $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} \cap L^0_p(\pi_d)$ справджуються співвідношення (див. зауваження 2.1 в [3], а також [6])

$$|f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d_+} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}, \qquad 1 \le \theta < \infty, \tag{4}$$

$$|f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}} \asymp \sup_{\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d_+} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p \,. \tag{5}$$

Зауважимо, що співвідношення (4), (5) справджуються і при $1 < p < \infty$.

Оскільки у результатах фігурують також відомі функціональні простори $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ і класи $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$, то нагадаємо також і їхні означення. Нехай $F_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d)$, — багатовимірні аналоги ядер Бернуллі, тобто

$$F_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}) = 2^d \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^d} \prod_{j=1}^{d} k_j^{-r_j} \cos\left(k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2}\right), \qquad r_j > 0, \qquad \alpha_j \in \mathbb{R}.$$

Позначимо через $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ лінійний простір функцій f, які можна записати у вигляді

$$f(\boldsymbol{x}) = \varphi(\cdot) * F_{\boldsymbol{r}}(\cdot,\boldsymbol{\alpha}) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} \varphi(\boldsymbol{y}) F_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{y}, \tag{6}$$

де $\varphi \in L_p(\pi_d)$. Для $f \in W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ покладемо $\|f\|_{W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}} := \|\varphi\|_p$. Якщо в (6) функція $\varphi \in L_p(\pi_d)$ така, що $\|\varphi\|_p \le 1$, то відповідний клас у просторі $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ позначимо через $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$.

Детальну інформацію щодо самих просторів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, $H^{\boldsymbol{r}}_p$ і $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$, а також щодо історії їхніх досліджень з точки зору апроксимації можна почерпнути з монографій [7 – 10] і робіт [1, 3]. Нагадаємо лише, що для введених вище просторів справджуються такі вкладення:

$$
\begin{aligned}
&B^{\boldsymbol{r}}_{p,p} \subset W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,2}, \qquad 1 < p \leq 2,\\
&B^{\boldsymbol{r}}_{p,2} \subset W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,p}, \qquad 2 \leq p < \infty,\\
&W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty} \equiv H^{\boldsymbol{r}}_{p}, \qquad 1 \leq p \leq \infty.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Зокрема, при $p = \theta = 2$

$$W^{\boldsymbol{r}}_{2,\boldsymbol{\alpha}} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{2,2} \subset W^{\boldsymbol{r}}_{2,\boldsymbol{\alpha}}.$$

Далі вважаємо, що координати вектора $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d)$, як параметра в означених просторах і класах, впорядковано так, що $0 < r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \ldots \leq r_d$, а також $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ — вектор з координатами $\gamma_j = \dfrac{r_j}{r_1}$, $j = \overline{1,d}$, і $\boldsymbol{\gamma}' = ({\gamma'}_1, \ldots, {\gamma'}_d)$, де ${\gamma'}_j = \gamma_j$, при $j = \overline{1,\nu}$ і $1 < {\gamma'}_j < \gamma_j$ при $j = \overline{\nu+1,d}$. Також зазначимо, що через $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ позначається одинична куля у просторі $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, а точніше,

$$\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} := \{f \in L^0_p(\pi_d) \colon \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} \leq 1\}.$$

Замість $L_p(\pi_d)$ і $L^0_p(\pi_d)$ у подальшому використовуються спрощені позначення L_p і L^0_p відповідно.

Тепер наведемо означення норми $\|\cdot\|_{B_{p,1}}$ у підпросторах $B_{p,1}$, $p \in \{1, \infty\}$, функцій $f \in L_p$. Така норма схожа на декомпозиційну норму функцій із просторів Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$. Для тригонометричних поліномів t за кратною тригонометричною системою $\{e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ норма $\|t\|_{B_{p,1}}$, $p \in \{1, \infty\}$, визначається формулою

$$\|t\|_{B_{p,1}} := \sum_{\boldsymbol{s}} \|A_{\boldsymbol{s}}(t, \cdot)\|_p.$$

Аналогічно означується норма $\|f\|_{B_{p,1}}$, $p \in \{1, \infty\}$, для будь-якої функції $f \in L_p$ такої, що ряд $\sum_{\boldsymbol{s}} \|A_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)\|_p$ збігається.

Отже, простори $B_{p,1}$, $p \in \{1, \infty\}$, фактично можна „вписати" в шкалу просторів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, якщо з огляду на співвідношення (4), (5) вважати, що $\boldsymbol{r} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^d_+$. Зазначимо, що для $f \in B_{p,1}$, $p \in \{1, \infty\}$, очевидно, $\|f\|_p \ll \|f\|_{B_{p,1}}$ і $\|f\|_{B_{1,1}} \ll \|f\|_{B_{\infty,1}}$.

Перейдемо до означень апроксимаційних характеристик, зазначивши, що деякі з них, а також деякі інші, на класах $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ і $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ у просторах $B_{1,1}$ досліджувались у роботах [11, 12].

Нехай $\mathscr{X}$ — банахів простір із нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$, $\mathscr{A} \subset \mathscr{X}$ і для $y \in \mathscr{X}$ та $r > 0$ позначимо $B_{\mathscr{X}}(y, r) := \{x \in \mathscr{X} : \|x - y\|_{\mathscr{X}} \leq r\}$, тобто $B_{\mathscr{X}}(y, r)$— куля в $\mathscr{X}$ з центром у точці y радіуса r.

Для $k \in \mathbb{N}$ величина (див., наприклад, [13])

$$\varepsilon_k(\mathscr{A}, \mathscr{X}) := \inf \left\{ \varepsilon \colon \ \exists\, y^1, \ldots, y^{2^k} \in \mathscr{X} \mid \mathscr{A} \subseteq \bigcup_{j=1}^{2^k} B_{\mathscr{X}}(y^j, \varepsilon) \right\}$$

називається *ентропійним числом* множини $\mathscr{A}$ у просторі $\mathscr{X}$.

Нехай $\mathscr{Y}$ — нормований простір з нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{Y}}$, $\mathcal{L}_M(\mathscr{Y})$ — сукупність підпросторів у просторі $\mathscr{Y}$ вимірності, що не перевищує M, і W — центрально-симетрична множина в $\mathscr{Y}$.

Величина

$$d_M(W,\mathscr{Y}) := \inf_{L_M\in\mathcal{L}_M(\mathscr{Y})} \sup_{w\in W} \inf_{u\in L_M} \|w-u\|_{\mathscr{Y}}$$

називається *колмогоровським M-поперечником* множини W у просторі $\mathscr{Y}$.

Поперечник $d_M(W,\mathscr{Y})$ увів у 1936 р. А. М. Колмогоров [14].

Нехай $\mathscr{Y}$ і $\mathscr{Z}$ — нормовані простори і $L(\mathscr{Y},\mathscr{Z})$ — сукупність лінійних неперервних відображень $\mathscr{Y}$ в $\mathscr{Z}$. Величина

$$\lambda_M(W,\mathscr{Y}) := \inf_{\substack{L_M\in\mathcal{L}_M(\mathscr{Y})\\ \Lambda\in L(\mathscr{Y},L_M)}} \sup_{w\in W} \|w-\Lambda\, w\|_{\mathscr{Y}},$$

де нижня грань береться по всіх підпросторах L_M в $\mathcal{L}_M(\mathscr{Y})$ вимірності не більшої ніж M і всіх лінійних неперервних операторах, що діють з $\mathscr{Y}$ в L_M, називається *лінійним M-поперечником* множини W у просторі $\mathscr{Y}$.

Поперечник $\lambda_M(W,\mathscr{Y})$ увів у 1960 р. В. М.Тихомиров [15].

Наступну апроксимаційну характеристику увів Р. С. Ісмагілов [16]. Отже, нехай $\mathscr{Y}=L_q$, $1\le q\le\infty$, або $\mathscr{Y}=B_{p,1}$, $p\in\{1,\infty\}$, і $F\subset\mathscr{Y}$ — деякий функціональний клас. *Тригонометричний M-поперечник* класу F у просторі $\mathscr{Y}$ (позначається $d_M^{\top}(F;\mathscr{Y})$) визначається формулою

$$d_M^{\top}(F;\mathscr{Y}) = \inf_{\Omega_M} \sup_{f\in F} \inf_{t(\Omega_M;\cdot)} \|f(\cdot)-t(\Omega_M;\cdot)\|_{\mathscr{Y}},$$

де

$$t(\Omega_M;\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(\boldsymbol{k}^j,\boldsymbol{x})}, \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d,$$

$\Omega_M=\{\boldsymbol{k}^1,\ldots,\boldsymbol{k}^M\}$ — набір векторів $\boldsymbol{k}^j=(k_1^j,\ldots,k_d^j)$, $j=\overline{1,M}$, цілочислової гратки $\mathbb{Z}^d$, c_j — довільні комплексні числа.

При доведенні результатів будемо використовувати такі відомі твердження.

Теорема А [17, 18]. *Нехай $r_1>\frac{1}{2}$. Тоді при $d\ge1$ мають місце оцінки*

$$\varepsilon_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{2,\boldsymbol{\alpha}},B_{\infty,1}) \asymp d_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{2,\boldsymbol{\alpha}},B_{\infty,1}) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1}M)^{r_1+\frac12}. \tag{8}$$

Теорема Б [12]. *Нехай $1<p<\infty$, $r_1>0$. Тоді справджуються співвідношення*

$$\varepsilon_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}},B_{1,1}) \asymp d_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}},B_{1,1}) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1}M)^{r_1+\frac12}. \tag{9}$$

Теорема В. *Нехай $d=2$. Тоді при $r=(r_1,r_1)$, $r_1>\frac12$ справедливими є оцінки*

$$\varepsilon_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\boldsymbol{\alpha}},L_\infty) \asymp d_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\boldsymbol{\alpha}},L_\infty) \asymp M^{-r_1}(\log M)^{r_1+\frac12}. \tag{10}$$

Зауважимо, що оцінку зверху для колмогоровського поперечника в (10) одержав Е. С. Бєлінський [17], а знизу для ентропійних чисел — В. М. Темляков [19].

Теорема Г [12]. *Нехай $1\le p\le\infty$, $r_1>0$, $1\le\theta\le\infty$. Тоді при $d\ge1$ справджуються співвідношення*

$$\varepsilon_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta},B_{1,1}) \asymp d_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta},B_{1,1}) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1}M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}. \tag{11}$$

Лема А [20, 21]**.** *Нехай* $\mathscr{K}$ *— компакт у сепарабельному банаховому просторі* $\mathscr{X}$. *Припустимо, що для пари чисел* (a,b), *де* $a>0$, $b\in\mathbb{R}$, *або* $a=0$, $b<0$, *мають місце оцінки*

$$d_m(\mathscr{K},\mathscr{X}) \ll m^{-a}(\log m)^b,$$

$$\varepsilon_m(\mathscr{K},\mathscr{X}) \gg m^{-a}(\log m)^b.$$

Тоді справедливими є співвідношення

$$\varepsilon_m(\mathscr{K},\mathscr{X}) \asymp d_m(\mathscr{K},\mathscr{X}) \asymp m^{-a}(\log m)^b.$$

Лема Б [8, с. 11]**.** *Має місце оцінка*

$$\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq l} 2^{-\alpha(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})} \asymp 2^{-\alpha l} l^{\nu-1},\ \alpha>0. \tag{12}$$

3. Колмогоровські поперечники і ентропійні числа класів $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ у просторі $B_{\infty,1}$. Перше з одержаних у цьому пункті тверджень є поширенням теореми А на випадок $2<p<\infty$.

Теорема 1. *Нехай* $d\geq 1$, $r_1>\dfrac{1}{2}$. *Тоді при* $2<p<\infty$ *справджуються співвідношення*

$$\varepsilon_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}, B_{\infty,1}) \asymp d_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}, B_{\infty,1}) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

Доведення. Оскільки $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}} \subset W^{\boldsymbol{r}}_{2,\boldsymbol{\alpha}}$, $2<p<\infty$, то згідно з (8) маємо

$$d_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}, B_{\infty,1}) \ll d_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{2,\boldsymbol{\alpha}}, B_{\infty,1}) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

Для встановлення в (13) оцінки знизу для ентропійних чисел $\varepsilon_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}, B_{\infty,1})$ скористаємося теоремою Б. З (9), беручи до уваги нерівність $\|\cdot\|_{B_{1,1}} \leq \|\cdot\|_{B_{\infty,1}}$, отримуємо

$$\varepsilon_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}, B_{\infty,1}) \geq \varepsilon_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}, B_{1,1}) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

Тепер, маючи (14), (15), на підставі леми А приходимо до співвідношень (13).

Теорему 1 доведено.

Зауваження 1. Порядкові значення величин $d_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}, L_\infty)$ і $\varepsilon_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}, L_\infty)$, $2\leq p<\infty$, $r_1>\dfrac{1}{p}$, при $d>2$ є невідомими (див. [1], питання 4.2, 6.3).

Зазначимо, що у двовимірному випадку (тобто при $d=2$) як наслідок відомих результатів можна сформулювати таке твердження.

Теорема 2. *Нехай* $d=2$. *Тоді при* $\boldsymbol{r}=(r_1,r_1)$, $r_1>\dfrac{1}{2}$, *справджуються співвідношення*

$$\varepsilon_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\boldsymbol{\alpha}}, B_{\infty,1}) \asymp d_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\boldsymbol{\alpha}}, B_{\infty,1}) \asymp M^{-r_1}(\log M)^{r_1+\frac{1}{2}}. \tag{16}$$

Доведення. Оцінка зверху для колмогоровського поперечника $d_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\boldsymbol{\alpha}}, B_{\infty,1})$ з урахуванням вкладення $W^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\boldsymbol{\alpha}} \subset W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$, $1\leq p<\infty$, випливає з (13):

$$d_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\boldsymbol{\alpha}}, B_{\infty,1}) \ll d_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}, B_{\infty,1}) \asymp M^{-r_1}(\log M)^{r_1+\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

Оцінка знизу є наслідком теореми В, тому що

$$d_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\boldsymbol{\alpha}}, B_{\infty,1}) \geq d_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\boldsymbol{\alpha}}, L_\infty) \asymp M^{-r_1}(\log M)^{r_1+\frac{1}{2}}. \qquad (18)$$

Отже, поєднуючи (17), (18) з оцінкою знизу величини $\varepsilon_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\boldsymbol{\alpha}}, B_{\infty,1})$ (з теореми В випливає, що $\varepsilon_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\boldsymbol{\alpha}}, B_{\infty,1}) \geq \varepsilon_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\boldsymbol{\alpha}}, L_\infty) \gg M^{-r_1}(\log M)^{r_1+\frac{1}{2}}$), на підставі леми А приходимо до висновку щодо справедливості (16).

Теорему 2 доведено.

4. Апроксимаційні характеристики класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ у просторі $B_{\infty,1}$. Справедливим є таке твердження.

Теорема 3. *Нехай* $d \geq 1,\ 2 \leq p < \infty,\ r_1 > \dfrac{1}{2}$. *Тоді мають місце співвідношення*

$$\varepsilon_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,2}, B_{\infty,1}) \asymp d_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,2}, B_{\infty,1}) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}}. \qquad (19)$$

Доведення. Для того щоб на заключному етапі доведення застосувати лему А, зазначимо наступне. Оцінка зверху для поперечника $d_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,2}, B_{\infty,1})$ з урахуванням вкладення $B^{\boldsymbol{r}}_{p,2} \subset \subset W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}},\ 2 \leq p < \infty$, випливає з (8):

$$d_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,2}, B_{\infty,1}) \ll$$

$$\ll d_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}, B_{\infty,1}) \leq d_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{2,\boldsymbol{\alpha}}, B_{\infty,1}) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}}. \qquad (20)$$

Оцінка знизу для ентропійних чисел $\varepsilon_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,2}, B_{\infty,1})$ є наслідком теореми Г:

$$\varepsilon_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,2}, B_{\infty,1}) \geq \varepsilon_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,2}, B_{1,1}) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}}. \qquad (21)$$

Застосувавши лему А за умов (20) і (21), у підсумку отримаємо (19).

Теорему 3 доведено.

Зауваження 2. Співставляючи (19) з оцінками величин $d_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,2}, B_{1,1})$ і $\varepsilon_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,2}, B_{1,1})$ з [12], можна стверджувати, що при $r_1 > \dfrac{1}{2}$ і $2 \leq p < \infty$ справджуються співвідношення

$$d_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,2}, B_{1,1}) \asymp d_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,2}, B_{\infty,1}),$$
$$\varepsilon_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,2}, B_{1,1}) \asymp \varepsilon_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,2}, B_{\infty,1}).$$

Подальшою нашою метою є доповнення теореми 3 у випадку, коли $p = \infty$. Але спершу проведемо дослідження ще однієї апроксимаційної характеристики — величини найкращого наближення класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$ у просторі $B_{\infty,1}$ за допомогою тригонометричних поліномів із гармоніками, що належать східчастому гіперболічному хресту.

Введемо необхідні позначення. Нехай $Q^{\boldsymbol{\gamma}'}_n := \bigcup\limits_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')<n} \rho(\boldsymbol{s})$ для $n \in \mathbb{N}$. Множину $Q^{\boldsymbol{\gamma}'}_n$ називають східчастим гіперболічним хрестом. Покладемо

$$T(Q^{\boldsymbol{\gamma}'}_n) := \left\{ t :\ t(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in Q^{\boldsymbol{\gamma}'}_n} c_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})},\ c_{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{C},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Якщо, як і раніше, $\mathscr{Y}$ — деякий функціональний простір із нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{Y}}$, то для $f \in \mathscr{Y}$

$$E_{Q_n^{\gamma'}}(f)_{\mathscr{Y}} := \inf_{t \in T(Q_n^{\gamma'})} \|f - t\|_{\mathscr{Y}}$$

— величина найкращого наближення функції f у просторі $\mathscr{Y}$ за допомогою поліномів, що належать множині $T(Q_n^{\gamma'})$.

Для класу $F \subset \mathscr{Y}$ покладемо

$$E_{Q_n^{\gamma'}}(F)_{\mathscr{Y}} := \sup_{f \in F} E_{Q_n^{\gamma'}}(f)_{\mathscr{Y}}.$$

У випадку, коли $\mathscr{Y} = L_q$, величини $E_{Q_n^{\gamma'}}(F)_q := E_{Q_n^{\gamma'}}(F)_{L_q}$ для класів $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$, $\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_p$ і $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних досліджувались у великій кількості робіт (див. монографії [8 – 10], а також оглядову статтю [1]).

Справедливим є таке твердження.

Теорема 4. *Нехай* $1 \le \theta \le \infty$, $r_1 > 0$. *Тоді при* $d \ge 2$

$$E_{Q_n^{\gamma'}}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{22}$$

Доведення. Нехай $f \in \mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$, $\theta \in [1, \infty)$. В якості агрегату наближення функції f розглянемо поліном

$$t_n(\boldsymbol{x}) = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')<n} A_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Зрозуміло, що $t_n \in T(Q_n^{\gamma'})$.

Нехай $\gamma(d) := \gamma_1 + \ldots + \gamma_d$. На підставі означення норми у просторі $B_{\infty,1}$ можна записати

$$\|f - t_n\|_{B_{\infty,1}} = \left\| \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\ge n} A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) \right\|_{B_{\infty,1}} =$$

$$= \sum_{\boldsymbol{s}} \left\| A_{\boldsymbol{s}} * \sum_{\boldsymbol{s}' \in \mathbb{N}^d :\, (\boldsymbol{s}',\boldsymbol{\gamma}')\ge n} A_{\boldsymbol{s}'}(f,\cdot) \right\|_{\infty} \le \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\ge n-\gamma(d)} \left\| A_{\boldsymbol{s}} * \sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty \le 1} A_{\boldsymbol{s}'}(f,\cdot) \right\|_{\infty} \le$$

$$\le \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\ge n-\gamma(d)} \|A_{\boldsymbol{s}}\|_1 \left\| \sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty \le 1} A_{\boldsymbol{s}'}(f,\cdot) \right\|_{\infty} \ll$$

$$\ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\ge n-\gamma(d)} \sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty \le 1} \|A_{\boldsymbol{s}'}(f,\cdot)\|_\infty \ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\ge n-2\gamma(d)} \|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_\infty =$$

$$= \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\ge n-2\gamma(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_\infty 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} =: J. \tag{23}$$

Застосувавши до виразу J нерівність Гельдера з показником $\theta > 1$ (чи відповідну модифікацію цієї нерівності при $\theta = 1$) і взявши до уваги співвідношення (12), одержимо

$$J \le \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\ge n-2\gamma(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\ge n-2\gamma(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \ll$$

$$\leq \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n-2\gamma(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \leq \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n-2\gamma(d)} 2^{-r_1\theta'(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Аналогічно, у випадку $\theta=\infty$ для $f\in \mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\infty}$ отримаємо

$$\|f-t_n\|_{B_{\infty,1}} \ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n-2\gamma(d)} \|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_\infty \ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n-2\gamma(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \asymp 2^{-nr_1} n^{\nu-1}.$$

Оцінку зверху в (22) доведено.

Оцінка знизу в (22) є очевидним наслідком такого твердження із [12]: при $1\leq p\leq\infty$, $r_1>0$ і $1\leq\theta\leq\infty$

$$E_{Q_n^{\gamma'}}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta})_{B_{1,1}} \asymp 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Теорему 4 доведено.

***Зауваження* 3.** Співставивши (22) при $d=2$ з оцінкою величини $E_{Q_n^{\gamma'}}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_\infty$, $\gamma'=(1,1)$ [22], легко дійти висновку, що

$$E_{Q_n^{\gamma'}}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_\infty \asymp E_{Q_n^{\gamma'}}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-nr_1} n^{(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Зазначимо також, що порядкові значення величин $E_{Q_n^{\gamma'}}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_\infty$ при $d>2$ ймовірно ще не встановлено.

Тепер з огляду на теорему 4 встановимо порядкові значення величин $d_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}, B_{\infty,1})$ і $\varepsilon_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta},\, B_{\infty,1})$ і, як наслідок, порядкові оцінки лінійних та тригонометричних поперечників класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$ у просторі $B_{\infty,1}$.

Теорема 5. *Нехай* $1\leq\theta\leq\infty$, $r_1>0$. *Тоді при* $d\geq 1$

$$\varepsilon_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta},\, B_{\infty,1}) \asymp d_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}, B_{\infty,1}) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}. \tag{24}$$

Доведення. Спершу зазначимо, що оцінки зверху поперечників $d_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}, B_{\infty,1})$ є наслідком оцінки (22). Справді, вибравши за заданим M число $n\in\mathbb{N}$ за умови $M\asymp 2^n n^{\nu-1}$, згідно з (22) можна записати

$$d_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}, B_{\infty,1}) \ll E_{Q_n^{\gamma'}}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})} \asymp$$

$$\asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}. \tag{25}$$

Оцінка знизу для ентропійних чисел $\varepsilon_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta},\, B_{\infty,1})$ випливає із співвідношення (11):

$$\varepsilon_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta},\, B_{\infty,1}) \geq \varepsilon_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta},\, B_{1,1}) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}. \tag{26}$$

Беручи до уваги (25) і (26), на підставі леми А встановлюємо (24).

Теорему 5 доведено.

***Зауваження* 4.** Співставляючи (24) з оцінками відповідних величин у просторі L_∞ [12], бачимо, що при $d=2,\quad \boldsymbol{r}=(r_1,r_1),\quad r_1>0,\quad 2\le\theta\le\infty$ справджуються співвідношення

$$d_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta},B_{\infty,1})\asymp d_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta},L_\infty)\asymp M^{-r_1}(\log M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}},$$

$$\varepsilon_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta},B_{\infty,1})\asymp \varepsilon_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta},L_\infty)\asymp M^{-r_1}(\log M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}.$$

Питання щодо порядкових значень величин $d_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta},L_\infty)$ і $\varepsilon_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta},L_\infty)$ при $d\ge 3$ залишається відкритим.

Зазначимо, що оскільки порядкові значення колмогоровських поперечників $d_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta},B_{\infty,1})$ досягаються на підпросторі $T(Q_n^{\gamma'})$ тригонометричних поліномів, то з огляду на теореми 4, 5 можна сформулювати відповідні твердження для лінійного і тригонометричного поперечників класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$ у просторі $B_{\infty,1}$.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $1\le\theta\le\infty,\ \ r_1>0$. *Тоді при* $d\ge 1$

$$\lambda_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta},B_{\infty,1})\asymp d^{\top}_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta},B_{\infty,1})\asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1}M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}.$$

***Зауваження* 5.** Співставляючи (24) з відповідними оцінками величин $\lambda_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta},L_\infty)$ і $d^{\top}_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta},L_\infty)$ [12], можна стверджувати, що при $d=2,\quad \boldsymbol{r}=(r_1,r_1),\quad r_1>0$ і $2\le\theta\le\infty$ мають місце співвідношення

$$\lambda_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta},B_{\infty,1})\asymp \lambda_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta},L_\infty)\asymp M^{-r_1}(\log M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}},$$

$$d^{\top}_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta},B_{\infty,1})\asymp d^{\top}_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta},L_\infty)\asymp M^{-r_1}(\log M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}.$$

Питання щодо порядкових значень величин $\lambda_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta},L_\infty)$ і $d^{\top}_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta},L_\infty)$ при $d\ge 3$ залишається відкритим.

Література

1. *Dinh Ding, Temlyakov V. N., Ullrich T.* Hyperbolic cross approximation // arXiv: 1601.03978 v 3 [math.NA] 21 Apr. 2017.
2. *Романюк В. С.* Колмогоровские поперечники и энтропийные числа в пространствах Орлича с нормой Люксембурга // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, № 5. – С. 682 – 694.
3. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 143 – 161.
4. *Бесов О. В.* Исследования одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **60**. – С. 42 – 61.
5. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 244 – 278.
6. *Аманов Т. И.* Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^n)$ и $S^{(r)}_{p,\theta}B(0\le\le x_j\le 2\pi;\ j=1,\ldots,n)$ // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – **77**. – С. 5 – 34.
7. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
8. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
9. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. – New York: Nova Sci. Publ., 1993.
10. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **93.** – 352 с.
11. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. Мат. ин-та АН СССР. –1989. – **189**. – С. 138 – 168.

12. *Романюк А. С.* Энтропийные числа и поперечники классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 10. – С. 1403 – 1417.
13. *Höllig K.* Diameters of classes of smooth functions // Quant. Approxim. – New York: Acad. Press, 1980. – P. 163 – 176.
14. *Kolmoqoroff A.* Über die beste Annaäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse // Ann. Math. – 1936. – **37**, № 2. – S. 107 – 111.
15. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. –1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.
16. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. –1974. – **29**, № 3. – С. 161 – 178.
17. *Белинский Э. С.* Асимптотические характеристики классов функций с условиями на смешанную производную (смешанную разность) // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль: Ярослав. ун-т, 1990. – С. 22 – 37.
18. *Belinsky E. S.* Estimates of entropy numbers and Gaussian measures for classes of functions with bounded mixed derivative // J. Approxim. Theory. – 1998. – **93**. – P. 114 – 127.
19. *Temlyakov V. N.* On two problems in the multivariate approximation // East J. Approxim. – 1998. – **4**. – P. 505 – 514.
20. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* Об оценке аппроксимативных характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной // Мат. заметки. – 1995. – **58**, № 6. – С. 922 – 925.
21. *Temlyakov V. N.* An inequality for trigonometric polynomials and its application for estimating the Kolmogorov widths // East J. Approxim. – 1996. – **2**, № 1. – P. 89 – 98.
22. *Романюк А. С.* Поперечники и наилучшее приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Anal. Math. – 2011. – **37**. – С. 181 – 213.

Одержано 05.10.18