УДК 517.5

Р. М. Тригуб (Сум. гос. ун-т)

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

We present a brief survey of works in the approximation theory of functions known to the author and connected with V. K. Dzyadyk's scientific publications.

Наведено короткий огляд робіт з теорії апроксимації функцій, які відомі автору та наближені до наукових публікацій В. К. Дзядика.

В настоящей статье излагается краткий обзор теорем теории приближений, примыкающих к научным результатам В. К. Дзядыка (см. также в п. 4 некоторые нерешенные вопросы).

Следует отметить, что в 2019 г. исполняется 100 лет теории приближений как ветви математического анализа, если считать началом выход работы [1] Валле Пуссена, в которой собраны теоремы П. Л. Чебышева, К. Вейерштрасса, А. А. Маркова, Л. Фейера, А. Лебега, Д. Джексона, С. Н. Бернштейна и самого автора.

1. Наилучшее приближение класса $W^r(\mathbb{T})$ периодических функций полиномами и класса $W^r(\mathbb{R})$ целыми функциями экспоненциального типа (ЦФЭТ). Это классы функций с ограниченным единицей модулем производной $f^{(r)}$ (при r нецелом — производная по Вейлю, а при $r \in \mathbb{N}$ — это функции, у которых $f^{(r-1)} \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}$, а $\left|f^{(r)}(x)\right| \le 1$ почти всюду).

Если функция 2π-периодическая и принадлежит $L_p(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$, $p \in [1, +\infty]$, или $C(\mathbb{T})$, то ее ряд Фурье будем записывать в виде $\left(e_k = e^{ikx},\ k \in \mathbb{Z}\right)$

$$f \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_k e_k, \qquad \widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} f(t)e^{-ikt}\,dt.$$

Известно, что

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(x-t)b_r(t)dt, \qquad b_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(kt - \dfrac{r\pi}{2}\right)}{k^r}$$

— ядро Бернулли.

При натуральном r ядро b_r является периодическим интегралом от

$$b_1(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|t|}{\pi}\right)\operatorname{sign} t, \quad |t| \le \pi.$$

Г. Бор (1935 г.) отметил (без доказательства), что если $r = 1$ и $\widehat{f}_0 = 0$, то $\|f'\|_\infty \le \dfrac{\pi}{2}\|f\|_\infty$ и неравенство является точным. Затем С. Н. Бернштейн (1935 г.) доказал, что при $r \in \mathbb{N}$ и $\widehat{f}_0 = 0$ $\|f^{(r)}\|_\infty \le K_r\|f\|_\infty$, где

$$K_r = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Ж. Фавар [2], цитируя статью С. Н. Бернштейна, определил наилучшее приближение в $L_1(\mathbb{T})$ ядра Бернулли тригонометрическими полиномами τ_n порядка не выше n $\left(\tau_n = \sum_{|k|\le n} c_k e_k\right)$:

$$E_n^T(b_r)_1 := \min_{\tau_n} \int\limits_{\mathbb{T}} \left|b_r(t) - \tau_n(t)\right| dt = \frac{\pi K_r}{(n+1)^r}.$$

Затем одновременно и независимо Ж. Фавар [3] и Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн [4] вывели из этого соотношения, что

$$\sup_{f\in W^r(\mathbb{T})} E_n^T(f)_\infty = \sup_{f\in W^r(\mathbb{T})} \min_{\tau_n} \sup_x \left|f(x) - \tau_n(x)\right| = \frac{K_r}{(n+1)^r}.$$

Экстремальная функция (сплайн Эйлера) для класса имеет вид

$$\varphi_r(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2k+1)x - \frac{r\pi}{2}\right)}{(2k+1)^{r+1}}.$$

Это r-й периодический интеграл от $\varphi_0(x) = \operatorname{sign}\sin x$. В [4] изучен тот же вопрос и для класса $\widetilde{W}_r(\mathbb{T})$ $\left(\|\widetilde{f}^{(r)}\|_\infty \le 1,\ \widetilde{f}\right.$ — тригонометрически сопряженная к f функция$\left.\right)$ с другой константой $\widetilde{K_r}$.

С. Н. Бернштейн назвал, по сути, K_r константой Бернулли при нечетном r и константой Эйлера при четном r, так что нельзя, по мнению автора, называть K_r константой Фавара. Статья С. Н. Бернштейна обычно не цитируется, так как в ней в доказательстве при четном r была допущена ошибка (позже исправлена в [5, с. 171]).

Вообще, задача о наилучшем приближении класса функций (а не индивидуальных функций) инициирована А. Н. Колмогоровым [6]. Ею успешно занимался С. М. Никольский и многие другие математики.

На первой Всесоюзной конференции по конструктивной теории функций (Ленинград, 1959 г.) В. М. Тихомиров сообщил, что тригонометрические полиномы τ_n осуществляют наилучшее приближение класса $W^r(\mathbb{T})$ среди всех подпространств размерности $2n+1$ $\Bigg($поперечник Колмогорова $d_{2n+1}\big(W^r(\mathbb{T})\big) = \dfrac{K_r}{(n+1)^r}\Bigg)$.

Ж. Фавар (1937 г.) поставил задачу о наилучшем приближении класса $W^r(\mathbb{T})$ при нецелом $r > 0$. Ее решение существенно труднее, так как ядро Бернулли b_r не является ни четным, ни нечетным. Решение при $r \in (0,1)$ получил В. К. Дзядык [7]. Затем этой задачей занимались С. Б. Стечкин и Сунь Юн-шен. Завершил ее решение для любого $r > 0$ В. К. Дзядык, применив новый метод с абсолютно монотонными функциями [8] (в метриках L_∞ и L_1).

Случай метрики L_p, $p \in (1, +\infty)$, особый и часто следует, как оказалось, только из случая $p = \infty$.

Введем, например, семейство норм $(N > 0)$

$$\|f\|_{p,N} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int\limits_{x-N}^{x+N} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Если $f \in L_p(\mathbb{R})$, то $\|f\|_p = \lim_{N\to\infty} \|f\|_{p,N}$, а если f — 2π-периодическая и $f \in L_p(\mathbb{T})$, то $\|f\|_p = \|f\|_{p,\pi}$. Тем самым соединяем периодический и непериодический случаи.

Теорема ([9], 1.2.7). *Пусть E — линейное множество ограниченных и равномерно непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, замкнутое относительно равномерной сходимости, а $A\colon E \mapsto E$ — линейный оператор и $\|Af\|_\infty \le a\|f\|_\infty$. Если дополнительно вместе с f и $f^t = f(\cdot + t) \in E$ при $t \in \mathbb{R}$ и оператор A коммутирует со сдвигом, то для любого $p \in [1, +\infty)$, $N > 0$ и $f \in E$*

$$\|Af\|_{p,N} \le a\|f\|_{p,N}.$$

Следствия. **1.** *Точное неравенство Бернштейна для полиномов и ЦФЭТ по L_p-норме следует из случая $p = \infty$ для полиномов. Из неравенства Бернштейна для ЦФЭТ в L_2, кстати, следует классическая теорема Винера – Пэли* (*см.* [9, с. 89]).

2. *Теорема типа Джексона* (*см. в п.* 2) *с линейными операторами в метрике L_p следует из случая $p = \infty$.*

Непериодические функции на прямой приближают, согласно С. Н. Бернштейну, ЦФЭТ. Любая ЦФЭТ, ограниченная на $\mathbb{R}$, является пределом последовательности тригонометрических полиномов, сходящейся равномерно на любом отрезке $\mathbb{R}$ (Б. М. Левитан) (см., например, [10 – 13], [9], 4.2.8). В следующей лемме содержится переход от периодического случая к непериодическому.

Обозначим через g_σ, $\sigma > 0$, ограниченную на $\mathbb{R}$ ЦФЭТ $\le \sigma$. Если g_σ имеет период 2π, то $g_\sigma = \tau_{[\sigma]}$ (полином).

Положим

$$A_\sigma(f)_\infty = \inf_{g\sigma} \sup_{\mathbb{R}} \bigl|f(x) - g_\sigma(x)\bigr|.$$

Лемма ([9], 5.5.9). *Пусть W — множество ограниченных непрерывных функций на $\mathbb{R}$, замкнутое относительно сходимости почти всюду и преобразования подобия* (*если $f \in W$, то и $f_\lambda \in W$ при $\lambda > 0$, где $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$*)*. Пусть еще любая функция $f \in W$ является пределом последовательности периодических функций из W. Если, кроме того, имеется функция ε: $W \times (0, +\infty) \mapsto (0, +\infty)$ с двумя свойствами: $\varepsilon(f_\lambda, h) = \varepsilon(f, \lambda h)$ $(h > 0)$ и из того, что $f_m \to$ $\to f$ при $m \to \infty$, следует, что $\varepsilon(f_m, h) \to \varepsilon(f, h)$, то из неравенства $E_n^T(f)_\infty \le \varepsilon\left(f; \dfrac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, для 2π-периодических функций из W следует, что для любой функции $f \in W$ при $\sigma > 0$*

$$A_\sigma(f) \le \varepsilon\left(f; \frac{1}{\sigma}\right).$$

***Следствия из периодического случая*:** 1) $A_\sigma\bigl(W^r(\mathbb{R})\bigr)_\infty = \dfrac{K_r}{\sigma^r}$, $\sigma > 0$, $r \in \mathbb{N}$; 2) $A_\sigma(C_\omega)_\infty =$ $= \dfrac{1}{2}\omega\left(\dfrac{\pi}{\sigma}\right)$, $\sigma > 0$.

Непосредственное доказательство первого соотношения см. в [10], а используя теорему В. К. Дзядыка, убеждаемся, что это соотношение справедливо при любом $r > 0$ (с другой константой вместо K_r).

Второе равенство (а здесь речь идет о наилучшем приближении класса непрерывных функций с заданной выпуклой мажорантой ω модулей непрерывности) для периодических функций доказано Н. П. Корнейчуком. В приведенном виде — это теорема В. К. Дзядыка (см. [14]).

Отметим еще, что после работ А. А. Маркова и С. М. Никольского критерий наилучшего приближения в L_1 принял следующий окончательный вид.

Лемма ([9], 5.2.5). *Пусть E — подпространство L_1 и $f \in L_1 \setminus E$. Для того чтобы*

$$\operatorname{dist}(f, E) = \min_{g\in E} \|f - g\|_{L_1} = \big\|f - g^*\big\|_{L_1},$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала функция h такая, что

$$|h| \leq 1, \qquad h(f - g^*) = \big|f - g^*\big|$$

почти всюду и $\displaystyle\int hg = 0$ для всех $g \in E$. Кроме того, $\operatorname{dist}(f, E) = \displaystyle\int hg$. Если дополнительно $f - g^* \neq 0$ почти всюду, то $h = \overline{\operatorname{sign}\,(f - g^*)}$.

2. Приближение функций многочленами. Перейдем к прямым и обратным теоремам теории приближений функций тригонометрическими и алгебраическими полиномами.

С. Н. Бернштейн доказал, что для 2π-периодических функций из $\mathrm{Lip}\ \alpha$ при $\alpha \in (0, 1)$ и средних арифметических сумм Фурье (сумм Фейера σ_n)

$$\max_x \big|f(x) - \sigma_n(x)\big| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

а при $\alpha = 1 - O\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$ (см. [5, с. 89] или [13, с. 236]).

Д. Джексон независимо, заменив квадрат ядра Дирихле D_n^2 в σ_n на D_n^4 с соответствующей нормировкой, получил, для $\mathrm{Lip}\ 1$ (а это главный случай) порядок приближения $O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ (см. [10 – 13]). Отсюда легко вывести, используя функцию типа Стеклова, общую теорему Джексона – Стечкина с модулем гладкости ω_r любого порядка (см., например, [9]). Есть другой метод доказательства — метод мультипликаторов Фурье (см. [9], гл. 8). Как показано в [15], порядок приближения $\omega_2\left(f; \dfrac{1}{n}\right)$ один и тот же при D_n^3 и D_n^4. Автором найден точный порядок приближения для классических методов суммирования рядов Фурье (см. [12, 16]). В случае функций многих переменных пришлось вводить специальные модули гладкости [17].

Если функция задана на отрезке $\big($например, $[-1, 1]\big)$, то после стандартной замены $x = \cos t$ функция становится 2π-периодической и четной (в общем, той же гладкости), а многочлен (алгебраический полином) p_n степени не выше n после замены $x = \cos t$ становится полином τ_n. Получаем, например, что

$$E_n(f)_\infty = \min_{p_n} \max_{[-1,1]} \big|f(x) - p_n(x)\big| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad \alpha \in (0, 1),$$

тогда и только тогда, когда $f(\cos t) \in \mathrm{Lip}\ \alpha$ или для любых x_1 и x_2 из $[-1, 1]$

$$\big|f(x_1) - f(x_2)\big| \leq \gamma \left(\frac{|x_1 - x_2|}{|x_1 - x_2| + \sqrt{1 - x_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2}}\right)^\alpha.$$

Существенно более общие подобные теоремы о приближении многочленами аналитических функций на компактах с углами получены в статье [18].

С. М. Никольский (1946 г.) доказал, что для $f \in W^1[-1,1]$ найдется последовательность многочленов p_n такая, что при $x \in [-1,1]$

$$\bigl|f(x) - p_n(x)\bigr| \le \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + O\biggl(\frac{\ln n}{n^2}\biggr).$$

Здесь важна поточечная оценка (у концов отрезка приближение почти в два раза лучше) и наименьшая возможная константа $\dfrac{\pi}{2} = K_1$.

А. Ф. Тиман (1951 г.) получил общую теорему с модулем непрерывности $\omega\bigl(f^{(r)}; h\bigr)$ $\Bigl(\delta_n(x) = \sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2\Bigr)$:

$$\bigl|f(x) - p_n(x)\bigr| \le c(r)\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^r \omega\bigl(f^{(r)}; \delta_n(x)\bigr).$$

В. К. Дзядык (1956 г.) доказал обратную теорему при $\omega(h) = h^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Для этого понадобилось доказать неравенство для производной p_n типа Маркова – Бернштейна.

Более общую прямую теорему с модулем гладкости второго порядка ω_2 доказали независимо В. К. Дзядык и Г. Фрейд (1959 г.). Третье доказательство (см. в [11], 5.2.3).

Одновременное приближение функции и ее производных появилось в статье автора (1962 г.). Общая прямая теорема с модулем гладкости ω_r любого порядка доказана Ю. А. Брудным [19] (см. [9, 12, 13]).

Аппроксимативную характеристику класса $\gamma W^r[-1,1]$, $r \in \mathbb{N}$, см. в [20].

В 60-е годы прошлого века В. К. Дзядык, используя и развивая методы суммирования рядов Фабера и новые неравенства для производных многочленов, доказал прямые и обратные теоремы о приближении аналитических функций в областях с кусочно-гладкой границей [12, с. 334 – 490]. Более общие теоремы см. в [21].

В. Н. Темляков (1981 г.) опустил множитель $\ln n$ в приведенной выше теореме С. М. Никольского (1946 г.).

Теорема [22]. *Для любого $r \in \mathbb{N}$ существует такое $c(r)$, что для любой функции $f \in W^r[-1,1]$ при $n \ge r-1$ существует последовательность многочленов p_n такая, что при $x \in [-1,1]$*

$$\bigl|f(x) - p_n(x)\bigr| \le K_r\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1}\right)^r + c(r)\frac{\bigl(\sqrt{1-x^2}\,\bigr)^{r-1}}{(n+1)^{r+1}}.$$

При этом константу K_r нельзя заменить меньшей, а $c(r) \ge ce^r$, $c > 0$, $r \in \mathbb{N}$.

В. П. Моторный [23] иным методом доказал подобный асимптотически точный результат при нецелом $r > 0$ с константой Дзядыка и множителем $\ln n$ в остаточном члене, который в его доказательстве опустить нельзя. Есть еще подобные результаты в интегральной метрике с весом (см., например, [9, с. 248 – 249]). (См. также подобный результат для приближения того же класса на полуоси целыми функциями конечной полустепени [24].)

Уже изучены многие ограничения в прямых теоремах теории приближений. Например, односторонние приближения в интегральной метрике довольно давно применены в тауберовых теоремах с остаточным членом.

Комонотонным приближениям (функция монотонная и приближающие полиномы монотонны, функция и полиномы выпуклы и т. д.) посвящено много работ (см. гл. 7 в [25]).

Очевидно, что для $f \in C^r[-1,1]$, $r \in \mathbb{Z}_+$,

$$f(x) - \sum_{\nu=0}^{r} \frac{f^{(\nu)}(1)}{\nu!}(x-1)^{\nu} = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int\limits_{x}^{1} (y-x)^r df^{(r)}(y) = \int\limits_{-1}^{1} h_{r,y}(x) df^{(r)}(y),$$

$$h_{r,y}(x) = \frac{(x-y)^r}{2(r!)}\big(\text{sign } (x-y) - 1\big).$$

В. К. Дзядык первый хорошо приблизил $h_{r,y}$ (см. [12], гл. VII, $r=0$). Для комонотонных приближений этот результат использовали De Vore и Yu (см. [26] или [25]).

Теорема [27]. *Для любых $x \in [-1,1]$ и $y \in (-1,1)$, r и $s \in \mathbb{Z}_+$ и $n \geq 2r+1$ существует многочлен степени не выше n по x такой, что*

$$\big|\text{sign } (x-y) - p_{n,y}(x)\big| \leq$$

$$\leq c(r,s)\left(\frac{1-x^2}{1-x^2+1-y^2+\dfrac{1}{n^2}|\text{sign } x - \text{sign } y|}\right)^r \left(\frac{\delta_n(y)}{|x-y|+\delta_n(y)}\right)^s,$$

$$\delta_n(y) = \frac{\sqrt{1-y^2}}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

(При $r=0$ это неравенство получил В. К. Дзядык.)

Автором изучены прямые теоремы с различными ограничениями: кусочно-односторонние приближения; одновременная аппроксимация с производными, интерполяцией и учетом положения точки; коэффициенты многочленов положительные, целые и др. (см. обзор [28]).

3. Геометрический критерий аналитичности функций. Известно, что аналитические (голоморфные) функции на открытом плоском множестве можно определять по-разному: $\mathbb{C}$-дифференцируемость, условие Коши – Римана, теорема Коши – Мореры, представимость в окрестности точки степенным рядом, конформность отображения (два свойства и даже одно).

Теорема В. К. Дзядыка [29]. *Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ три графика (поверхности)*

$$z = u(x,y), \qquad z = v(x,y), \qquad z = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)}.$$

Для того чтобы одна из двух функций $f = u + iv$ и $\overline{f} = u - iv$ была аналитической в области D при непрерывно дифференцируемых u и v, необходимо и достаточно, чтобы площади названных трех поверхностей над любой подобластью D были одинаковыми.

Необходимость проверяется с помощью формулы площади и условий Коши – Римана. Недавно доказано, что равенства площадей можно проверять лишь на подобных множествах одного размера (например, фиксированный многоугольник). Подобное усиление получено и для теоремы Мореры (см. [30]).

4. Некоторые нерешенные вопросы. 1. В 1962 г. получены общие прямые теоремы о приближении многочленами с целыми коэффициентами на любом отрезке вещественной прямой длины меньше четырех (см. также [31]). Есть и критерий аппроксимации такими многочленами на множествах $\mathbb{C}$ (С. Я. Альпер, 1964 г.). Но вот таких теорем типа Дзядыка нет, если не считать случай квадрата $0 \leq \text{Re } z$, $\text{Im } z \leq 1$ [32].

2. Автор впервые (1965 г.) построил линейный полиномиальный оператор $f \mapsto \tau_n$ такой, что при $r \in \mathbb{N}$ и $f \in C(\mathbb{T})$

$$\big\|f - \tau_n(f)\big\|_\infty \asymp \omega_r\left(f; \frac{1}{n}\right), \qquad n \in \mathbb{N}$$

(двустороннее неравенство с положительными константами, зависящими лишь от r).

При $r = 1$ — это суммы Бернштейна, а при $r = 2$ — Рогозинского (см., например, [12] или [25]). При $r \geq 3$ полиномы Бернштейна – Стечкина не подходят для этого (в [16] найден специальный модуль гладкости для них).

Следует указать специальный модуль непрерывности ω^* такой, что для любой $f \in C(\mathbb{T})$ при некоторой последовательности $\varepsilon_n \searrow 0$, не зависящей от функции,

$$\max_x \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \big|f(x) - S_n(f; x)\big| \asymp \omega^*(\varepsilon_n).$$

В непериодическом случае подобных результатов с учетом положения точки $\big($например, с $\delta_n(x)\big)$ нет, если не считать замечательный результат V. Totik [33] (см. также [13]) о многочленах Бернштейна (с модулем гладкости Дитциана – Тотика).

3. В работе [34] исследуется вопрос о росте множителя $c(r)$ в теореме Джексона. Тот же вопрос касается теорем А. Ф. Тимана и Ю. А. Брудного (см. п. 2), а также оценки снизу.

Литература

1. *De la Vallée Poussin.* Lecons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. – Paris: Gautier-Villars, 1919. – 363 p.
2. *Favard J.* Application de la formule sommatoire d'Euler a la démonstration de quelques propriètes extremales des integrales des fonctions periodiques ou presquepérivdiques // Mat. Tidskrift København, B. H. – 1936. – **4**. – P. 81 – 94.
3. *Favard J.* Sur les meilleurs procedes d'approximation de certaines classes des fonctions par des polynomes trigonométriques // Bull. Sci. Math. – 1937. – **61**. – P. 207 – 224, 243 – 256.
4. *Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.* О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций // Докл. АН СССР. – 1937. – **15**. – С. 107 – 111.
5. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений. – М.: Изд-во АН СССР, 1954. – Т. 2. – 627 с.
6. *Kolmogorov A. N.* Zur Grössen Ordrung des Restgriedes Fourierischer Reichen differenzierbarer Funktionen // Ann. Math. – 1935. – **36**. – S. 321 – 326.
7. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s-ю производную $(0 < s < 1)$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1953. – **17**, № 2. – С. 135 – 162.
8. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классе периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер // Мат. заметки. – 1974. – **16**, № 5. – С. 691–701.
9. *Trigub R. M., Belinsky E. S.* Fourier analysis and approximation of functions. — New York etc.: Springer, 2004. – 585 p.
10. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 408 с.
11. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
12. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
13. *De Vore R. A., Lorentz G. G.* Constructive approximation. – New York; Berlin: Springer, 1993. – 452 p.
14. *Дзядык В. К.* О точной верхней грани наилучшего приближения некоторых классов непрерывных функций, определенных на вещественной оси // Доп. АН УССР. Сер. А. – 1975. – С. 589 – 592.
15. *Trigub R. M.* Exact order of approximation of periodic functions by linear polynomials operators // East J. Approxim. – 2009. – **15**, № 1. – P. 31 – 56.

16. *Тригуб Р. М.* Точный порядок приближения периодических функций полиномами Бернштейна – Стечкина // Мат. сб. – 2013. – **204**, № 12. – С. 127 – 146.
17. *Тригуб Р. М.* Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1980. – **44**, № 6. – С. 1378 – 1409.
18. *Дзядык В. К., Алибеков Г. А.* О равномерном приближении функций комплексного переменного на замкнутых множествах с углами // Мат. сб. – 1968. – **75**, № 4. – С. 502 – 557.
19. *Брудный Ю. А.* Приближение функций алгебраическими многочленами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – **32**, № 4. – С. 780 – 787.
20. *Тригуб Р. М.* Характеристика классов Липшица целого порядка на отрезке по скорости полиномиальной аппроксимации // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1973. – Вып. 18. – С. 63 – 70.
21. *Andrievskii V. V., Belyi V. I., Dzyadyk V. K.* Conformal invariants in constructive theory of functions of complex variable. – Athlanta: World Federation Publ., 1995. – 199 p.
22. *Тригуб Р. М.* Прямые теоремы о приближении алгебраическими полиномами гладких функций на отрезке // Мат. заметки. – 1993. – **54**, № 6. – С. 113 – 121.
23. *Моторный В. П.* Приближение интегралов дробного порядка алгебраическими полиномами // Укр. мат. журн. – 1999. – **54**, № 5. – С. 603 – 613; № 7. – С. 940 – 951.
24. *Товстолис А. В.* Приближение гладких функций на полуоси целыми функциями конечной полустепени // Мат. заметки. – 2001. – **69**, № 6. – С. 934 – 943.
25. *Dzyadyk V. K., Shevchuk I. A.* Theory of uniform approximation of functions by polinomials. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2008. – 480 p.
26. *De Vore R. A., Yu X. M.* Pointwise estimates for monotone polynomial approximation // Constr. Approxim. – 1985. – **1**, № 4. – P. 323 – 331.
27. *Тригуб Р. М.* Приближение индикатора интервала алгебраическими полиномами с эрмитовской интерполяцией в двух точках // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 1999. – **4**. – С. 186 – 194.
28. *Trigub R. M.* Approximation of functions by polynomials with various constraints // J. Contemp. Math. Anal. – 2009. – **44**, № 4. – P. 230 – 242.
29. *Дзядык В. К.* Геометрическое определение аналитических функций // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 1. – С. 191 – 194.
30. *Volchkov V. V.* Integral geometry and convolution equations. – New York etc.: Springer, 2003. – 454 p.
31. *Тригуб Р. М.* Приближение гладких функций и констант многочленами с целыми и натуральными коэффициентами // Мат. заметки. – 2001. – **70**, № 1. – С. 123 – 136.
32. *Волчков Вит. В.* Приближение аналитических функций многочленами с целыми коэффициентами // Мат. заметки. – 1996. – **59**, № 2. – С. 182 – 186.
33. *Totik V.* Approximation by Bernstein polynomials // Amer. J. Math. – 1994. – **116**, № 4. – P. 995 – 1018.
34. *Foucat S., Kryakin Yu., Shadrin A.* On the exact constant in Jackson – Stechkin inequality for the uniform metric // arXiv:math/0612283v1[math CA]. – 2006.

Получено 25.09.18