УДК 517.518.2

С. І. Безкрила (Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, Київ),

О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО ОДНУ НЕРІВНІСТЬ ДЛЯ МОДУЛІВ НЕПЕРЕРВНОСТІ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ, ПОРОДЖЕНИХ ПІВГРУПОЮ ОПЕРАТОРІВ

A new inequality for the moduli of continuity of fractional order generated by semigroups of operators is obtained. This inequality implies a generalization of the well-known statement that there exists an α-majorant, which is not a modulus of continuity of order α generated by a semigroup of operators, to the case of noninteger values of α.

Встановлено нову нерівність для модулів неперервності дробового порядку, породжених півгрупою операторів. За допомогою цієї нерівності отримано узагальнення на випадок нецілого α відомого твердження про те, що не кожна α-мажоранта є модулем неперервності порядку α, породженим півгрупою операторів.

1. Опис об’єктів дослідження та формулювання результатів. Нехай X — лінійний простір над полем дійсних або комплексних чисел, $\{T_h :\ h \ge 0\}$ — однопараметрична сім’я лінійних операторів $T_h :\ X \to X$, $h \ge 0$, яка утворює півгрупу, тобто $T_0 = I$ — одиничний оператор і $T_{h_1+h_2} = T_{h_1} T_{h_2}$ для довільних $h_1 \ge 0$ і $h_2 \ge 0$.

Припущення 1. *Нехай* X — *банахів простір*, *півгрупа* $\{T_h :\ h \ge 0\}$ *є* ***стискаючою півгрупою класу*** (C_0) [1], *тобто для кожного* $h \ge 0$ *оператор* T_h *є неперервним*, *його норма* $\|T_h\| \le 1$ *і для кожного елемента* $f \in X$ *маємо* $\|(I - T_h) f\| \to 0$, $h \to 0$.

Для півгруп класу (C_0) поняття k-го модуля неперервності для натуральних k розглядалось у [2]. Для таких півгруп аналогічно [3] можна означити поняття модуля неперервності порядку $\alpha > 0$.

Означення 1. *Якщо виконується припущення* 1 *і число* $\alpha > 0$, *то функція*

$$\omega_\alpha(f, t) \ := \ \sup_{h \in [0, t]} \left\| (I - T_h)^\alpha f \right\|, \quad t \ge 0,$$

де

$$(I - T_h)^\alpha f \ := \ \sum_{j=0}^{\infty} C_\alpha^j \, (-1)^j \, T_h^j f \tag{1}$$

і

$$C_\alpha^0 \ := \ 1, \qquad C_\alpha^j \ := \ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-j+1)}{j!}, \quad j \ge 1,$$

називається ***модулем неперервності елемента*** $f \in X$ ***порядку*** $\alpha > 0$, ***породженим півгрупою*** $\{T_h :\ h \ge 0\}$.

Відомо [4] (п. 407), що при всіх $x \in [-1, 1]$ і $\alpha > 0$ має місце розклад

$$(1-x)^{\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} C_{\alpha}^{j} (-1)^{j} x^{j}, \tag{2}$$

причому ряд справа збігається абсолютно, зокрема ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \left| C_{\alpha}^{j} \right|$ збігається. Звідси випливає коректність означення 1, оскільки $\|T_h\| \leq 1$. Крім того, при $\alpha > 0$ і $\beta > 0$ з рівності $(1-x)^{\alpha+\beta} = (1-x)^{\alpha} (1-x)^{\beta}$, $x \in [-1, 1]$, випливає співвідношення $C_{\alpha+\beta}^{j} = \sum_{k=0}^{j} C_{\alpha}^{k} C_{\beta}^{j-k}$, $j \geq 0$, з якого отримуємо, що за умов означення 1

$$(I - T_h)^{\alpha+\beta} = (I - T_h)^{\alpha} (I - T_h)^{\beta}. \tag{3}$$

Наведемо також аналог означення 1 для випадку, коли X не є банаховим простором.

Припущення 2. *Нехай існує лінійна множина* $Y \subset X$, *на якій введено норму* $\|\cdot\|$, *відносно якої простір* Y *є банаховим*, *причому для всіх* $f \in X$ *і* $h \geq 0$ *справджується включення* $(I - T_h) f \in Y$ *і* $\|(I - T_h) f\| \to 0$, $h \to 0$. *Тоді для всіх* $h \geq 0$ *і* $f \in Y$ *справедливим є включення* $T_h f \in Y$, *тобто* $T_h : Y \to Y$.

Позначимо для кожного $h \geq 0$ *звуження оператора* T_h *на простір* Y *через* $\tilde{T}_h$. *Нехай також* $\{\tilde{T}_h : h \geq 0\}$ *— стискаюча півгрупа класу* (C_0) *у просторі* Y.

Якщо $f \in X$, то за припущенням 2 елемент $g := (I - T_h) f \in Y$. Якщо $\alpha > 1$ і в ряді (1) замінити α на $\alpha - 1$ та f на g, то отриманий ряд збігається в Y і рівність

$$(I - T_h)^{\alpha} f := (I - T_h)^{\alpha-1} g = (I - T_h)^{\alpha-1} (I - T_h) f$$

визначає елемент з Y.

Означення 2. *Нехай виконується припущення* 2. ***Модулем неперервності елемента*** $f \in X$ ***порядку*** $\alpha \geq 1$, ***породженим півгрупою*** $\{T_h : h \geq 0\}$, *називається функція*

$$\omega_{\alpha}(t) := \omega_{\alpha}(f, t) := \sup_{h \in [0, t]} \left\| (I - T_h)^{\alpha} f \right\|, \quad t \geq 0.$$

З рівності (3) випливає, що у випадку $X = Y$ це означення дає той же модуль неперервності, що і означення 1 при $\alpha \geq 1$.

Якщо $\alpha = k \in \mathbb{N}$, то модуль неперервності елемента $f \in X$ порядку $\alpha = k$ називається k**-м модулем неперервності елемента** $f \in X$, при цьому справджується рівність $(I - T_h)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j (-1)^j T_h^j$, тобто ряд (1) перетворюється в скінченну суму.

Для функції $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ і числа $k\in\mathbb{N}$ розглядатимемо k-ту скінченну різницю в точці $x\in\mathbb{R}$ з кроком $h>0$: $\Delta_h^k(f,x) := \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j f(x+jh)$ [5–7]. У наступних прикладах T_h — оператор зсуву на $h>0$, визначений на функціях вигляду $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $(T_h f)(x) := f(x+h)$, $x\in\mathbb{R}$. Тоді для всіх $k\in\mathbb{N}$ справджуються рівності

$$\left(T_h^k f\right)(x) = f(x+kh), \qquad \left((T_h-I)^k f\right)(x) = \Delta_h^k(f,x).$$

***Приклад* 1.** Нехай $X=Y$ — один із таких банахових просторів: 1) $UC_b(\mathbb{R})$ — простір обмежених рівномірно неперервних функцій $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ із рівномірною нормою $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$, $f\in UC_b(\mathbb{R})$; 2) $\tilde{C}$ — простір неперервних 2π-періодичних функцій із рівномірною нормою $\|f\|=\sup_{x\in[0,2\pi]}|f(x)|$, $f\in\tilde{C}$; 3) $L_p(\mathbb{R})$ — простір вимірних інтегровних у p-му степені функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ з нормою $\|f\| := \left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$, $f\in L_p(\mathbb{R})$; 4) $\tilde{L}_p$ — простір вимірних 2π-періодичних функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, інтегровних у p-му степені на $[0,2\pi]$, з нормою $\|f\| := \left(\int_0^{2\pi}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$, $f\in\tilde{L}_p$, $1\le p<+\infty$.

Тоді $\{T_h\colon h\ge 0\}$ — стискаюча півгрупа класу (C_0) у кожному з цих просторів X. У випадках 2 і 4 модуль неперервності порядку $\alpha>1$, породжений цією півгрупою, розглядався в роботі [3]. У випадках 1 і 2 при $\alpha=k\in\mathbb{N}$ модуль неперервності, породжений цією півгрупою,

$$\omega_k(f,t) = \sup_{h\in[0,t]}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\Delta_h^k(f,x)\right|, \quad t\ge 0,$$

є рівномірним k-м модулем неперервності функції $f\in X$. У випадках 3 і 4 при $\alpha = k\in\mathbb{N}$ модуль неперервності, породжений цією півгрупою, є інтегральним k-м модулем гладкості функції $f\in X$ [8].

***Приклад* 2.** Якщо $X=UC(\mathbb{R})$ — лінійний простір рівномірно неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $Y=UC_b(\mathbb{R})$ з рівномірною нормою, то $\{T_h\colon h\ge 0\}$ — півгрупа операторів, для якої виконується припущення 2, а модуль неперервності, породжений цією півгрупою, при $\alpha=2$, $\alpha=3$ і $\alpha=4$ розглядався в роботах [9–11], а при довільному $\alpha\in\mathbb{N}$, $\alpha\ge 2$, — в роботі [12].

Лема. *Нехай виконується припущення* 1 *і* $\alpha>0$ *або припущення* 2 *і* $\alpha\ge 1$. *Нехай також* $f\in X$, $\omega(\cdot)=\omega_\alpha(f,\cdot)$ — *модуль неперервності елемента* $f\in X$ *порядку* α, *породжений півгрупою* $\{T_h : h\ge 0\}$. *Тоді мають місце такі властивості*:

1) $\omega(0) = 0$;

2) *функція* ω *є неспадною на* $[0,+\infty)$;

3) *функція* ω *є неперервною на* $[0,+\infty)$;

4) *якщо* $\alpha = k \in \mathbb{N}$, *то* $\omega(n\delta) \le n^k \omega(\delta)$ *для довільних* $\delta \ge 0$ *і* $n \in \mathbb{N}$.

Зауваження. Для $\alpha = k \in \mathbb{N}$ і невід'ємних функцій $\omega : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ умова 4 випливає з наступної умови:

5) *функція* $(0, +\infty) \ni \delta \mapsto \omega(\delta)/\delta^{\alpha}$ *монотонно не зростає на* $(0, +\infty)$.

Функції $\omega : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, що при $\alpha = k \in \mathbb{N}$ задовольняють умови $1-3$ і 5, називаються k-***мажорантами.***

Дана лема для випадку модулів неперервності, розглянутих у прикладах 1 і 2, при $\alpha = k \in \mathbb{N}$ є відомою. Для рівномірних модулів неперервності функцій, заданих на відрізку, про аналогічні властивості див. у $[5-7]$. Для модулів неперервності, породжених півгрупою операторів, при $\alpha = k \in \mathbb{N}$ за дещо інших припущень подібні властивості наведено в [2]. Якщо $X = \tilde{C}$ або $X = \tilde{L}_p$, то для модуля неперервності порядку $\alpha > 1$, породженого півгрупою операторів зсуву, дані властивості розглянуто в роботі [3]. Доведення леми наведено у п. 2.

Теорема 1. *Нехай виконується припущення* 1 *і* $\alpha \ge 3$ *або припущення* 2 *і* $\alpha \ge 4$. *Нехай також* $f \in X$, $\omega_\alpha(f, \cdot)$ — *модуль неперервності елемента* $f \in X$ *порядку* α, *породжений півгрупою* $\{T_h : h \ge 0\}$, $n \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$2\omega_\alpha(f, nt) \le \omega_\alpha(f, (n+1)t) + \omega_\alpha(f, (n-1)t) + C_n \omega_\alpha(f, t), \quad t > 0, \tag{4}$$

де C_n — *стала, що залежить лише від* α *і* n, *причому* $C_n = O\left(n^{\alpha - 3/2}\right)$, $n \to \infty$.

Доведення теореми 1 наведено у п. 3.

Нерівність (4) дозволяє, дослівно повторюючи міркування з доведення теореми 2 роботи [12] (див. також доведення теореми 2 в роботах $[9-11]$), отримати таку теорему.

Теорема 2. *Нехай виконується припущення* 1 *і* $\alpha \ge 3$ *або припущення* 2 *і* $\alpha \ge 4$. *Тоді для довільного числа* $\beta > \alpha - \dfrac{1}{2}$ *існує функція* $\omega : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, *не тотожно рівна нулю, що задовольняє умови* $1-3$ *леми, така, що функція* $(0, +\infty) \in \delta \mapsto \omega(\delta)/\delta^{\beta}$ *є монотонно незростаючою на* $(0, +\infty)$ *і при цьому ні для якого елемента* $f \in X$ *не виконується рівність*

$$\lim_{\delta \to 0+} \omega_\alpha(f, \delta)/\omega(\delta) = 1.$$

Ця теорема узагальнює на випадок нецілих α результати робіт [12] (в якій $\alpha = k \in \mathbb{N}$ $k \ge 2$, $\beta > k-1$), $[9-11]$ (розглядався випадок, коли $X = UC(\mathbb{R})$, T_h — оператор зсуву на h, $\alpha = 2$, $\alpha = 3$ та $\alpha = 4$ відповідно), в яких доведено, що не кожна k-мажоранта є k-м модулем неперервності.

2. Доведення леми. Зауважимо, що якщо $\{T_h : h \ge 0\}$ — півгрупа операторів, то $T_{h_1} T_{h_2} = T_{h_2} T_{h_1}$ для довільних $h_1 \ge 0$ і $h_2 \ge 0$, тому що $T_{h_1} T_{h_2} = T_{h_1 + h_2} = T_{h_2 + h_1} = T_{h_2} T_{h_1}$.

Умови 1 і 2 випливають безпосередньо з означень 1 і 2.

Доведемо виконання умови 3. Нехай виконується припущення 1 і $\alpha > 0$.

Виберемо і зафіксуємо довільне число $\varepsilon > 0$. Оскільки ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \left| C_\alpha^j \right|$ збігається, то існує таке число $N \in \mathbb{N}$, що $\sum_{j=N+1}^{\infty} \left| C_\alpha^j \right| < \dfrac{\varepsilon}{3(\|f\|+1)}$. Оскільки за припущенням $\|T_h f - f\| \to 0$, $h \to 0$, то існує $\delta > 0$ таке, що $\|T_h f - f\| < \varepsilon \left(3 \sum_{j=0}^{\infty} \left| C_\alpha^j \right| \right)^{-1}$ для всіх $h \in (0, \delta)$. Якщо $h_1 \geq 0$, $h_2 \geq 0$ і $h_2 < \delta N^{-1}$, то з урахуванням нерівності $\|T_h\| \leq 1$, $h \geq 0$, маємо оцінку

$$\left| \left\| \left(I - T_{h_1+h_2}\right)^\alpha f \right\| - \left\| \left(I - T_{h_1}\right)^\alpha f \right\| \right| \leq \left\| \left(I - T_{h_1+h_2}\right)^\alpha f - \left(I - T_{h_1}\right)^\alpha f \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{j=0}^{N} C_\alpha^j (-1)^j \left(T_{h_1+h_2}^j - T_{h_1}^j \right) f + \sum_{j=N+1}^{\infty} C_\alpha^j (-1)^j T_{h_1+h_2}^j f - \sum_{j=N+1}^{\infty} C_\alpha^j (-1)^j T_{h_1}^j f \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{N} \left| C_\alpha^j \right| \left\| T_{jh_1} \right\| \left\| T_{jh_2} f - f \right\| + 2 \sum_{j=N+1}^{\infty} \left| C_\alpha^j \right| \|f\| < \varepsilon. \tag{5}$$

Якщо $t_0 \geq 0$, $t \geq t_0$, $|t - t_0| < \delta N^{-1}$, h_1 пробігає відрізок $[0, t_0]$, а h_2 — відрізок $[0, t - t_0]$, то $h_1 + h_2$ пробігає відрізок $[0, t]$ і з оцінки (5) випливає нерівність $0 \leq$ $\leq \omega(t) - \omega(t_0) \leq \varepsilon$. Якщо $t_0 > 0$, $0 \leq t < t_0$, $|t - t_0| < \delta N^{-1}$, h_1 пробігає відрізок $[0, t]$, а h_2 — відрізок $[0, t_0 - t]$, то $h_1 + h_2$ пробігає відрізок $[0, t_0]$ і з оцінки (5) випливає нерівність $0 \leq \omega(t_0) - \omega(t) \leq \varepsilon$. Отже, неперервність функції ω, якщо виконується припущення 1, доведено.

У випадку, коли виконується припущення 2, при $\alpha = 1$ неперервність функції ω одержуємо аналогічними міркуваннями з оцінки

$$\left| \left\| \left(I - T_{h_1+h_2}\right) f \right\| - \left\| \left(I - T_{h_1}\right) f \right\| \right| \leq \left\| \left(I - T_{h_1} T_{h_2}\right) f - \left(I - T_{h_1}\right) f \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \tilde{T}_{h_1} \right\| \left\| T_{h_2} f - f \right\| \leq \left\| T_{h_2} f - f \right\|, \quad h_1 \geq 0, \quad h_2 \geq 0.$$

Нехай далі $\alpha > 1$. Спершу доведемо, що для кожного $a > 0$ функція $\varphi(h) := \|(I - T_h) f\|$, $h \geq 0$, обмежена на відрізку $[0, a]$. За припущенням $\varphi(h) \to 0$, $h \to 0+$, тому існує таке число $h_0 > 0$, що $0 \leq \varphi(h) \leq 1$ для всіх $h \in [0, h_0]$. Зауважимо, що для всіх $h_1 \geq 0$ і $h_2 \geq 0$ виконується нерівність

$$\varphi(h_1 + h_2) = \left\| \left(I - T_{h_1} T_{h_2}\right) f \right\| = \left\| f - T_{h_1} f + T_{h_1} f - T_{h_1} T_{h_2} f \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \left(I - T_{h_1}\right) f \right\| + \left\| \tilde{T}_{h_1} \right\| \left\| \left(I - T_{h_2}\right) f \right\| \leq \varphi(h_1) + \varphi(h_2).$$

Звідси методом математичної індукції отримуємо, що $\varphi(nh) \leq n\varphi(h)$ для всіх $h \geq 0$ і $n \in \mathbb{N}$. Виберемо число $N \in \mathbb{N}$ так, щоб $\dfrac{a}{N} \in [0, h_0]$. Тоді для довільного $h \in [0, a]$ має місце включення $\dfrac{h}{N} \in [0, h_0]$, а отже, $0 \leq \varphi(h) = \varphi\left(N\dfrac{h}{N}\right) \leq N\varphi\left(\dfrac{h}{N}\right) \leq N$, тобто обмеженість функції φ на довільному відрізку $[0, a]$, де $a > 0$, доведено.

Нехай $a > 0$ — довільне фіксоване число. Покладемо $C := \sup_{h\in[0,a+1]} \varphi(h)$. Тоді $0 \leq C < +\infty$. Для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ виберемо число $N \in \mathbb{N}$ так, щоб $\sum_{j=N+1}^{\infty} \left| C_{\alpha-1}^{j} \right| < \dfrac{\varepsilon}{3C+1}$. Оскільки $\|T_h f - f\| \to 0$, $h \to 0+$, то існує таке $\delta > 0$, що $\|T_h f - f\| < \varepsilon\left(6\sum_{j=0}^{\infty}\left|C_{\alpha-1}^{j}\right|\right)^{-1}$ для всіх $h \in (0, \delta)$. Якщо $h_1 \in [0, a]$ і $0 \leq h_2 < \min\left\{1, \delta(N+1)^{-1}\right\}$, то, поклавши $g_1 := \left(I - T_{h_1}\right) f$, $g_2 := \left(I - T_{h_1+h_2}\right) f$, отримаємо оцінки $\|g_1\| \leq C$, $\|g_2\| \leq C$, а також для всіх $j \in \{0, 1, \ldots, N\}$

$$\left\|T_{jh_2} g_2 - g_1\right\| = \left\|T_{jh_2}\left(I - T_{h_1+h_2}\right) f - \left(I - T_{h_1}\right) f\right\| \leq$$

$$\leq \left\|T_{jh_2} f - f\right\| + \left\|\tilde{T}_{h_1}\right\| \left\|T_{(j+1)h_2} - f\right\| \leq \varepsilon\left(3\sum_{j=0}^{\infty}\left|C_{\alpha-1}^{j}\right|\right)^{-1}.$$

Використовуючи ці оцінки, одержуємо нерівність

$$\left\|\left(I - T_{h_1+h_2}\right)^{\alpha} f - \left(I - T_{h_1}\right)^{\alpha} f\right\| = \left\|\left(I - T_{h_1+h_2}\right)^{\alpha-1} g_2 - \left(I - T_{h_1}\right)^{\alpha-1} g_1\right\| =$$

$$= \left\|\left(\sum_{j=0}^{N} C_{\alpha-1}^{j}(-1)^j T_{h_1+h_2}^{j}\right) g_2 + \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} C_{\alpha-1}^{j}(-1)^j T_{h_1+h_2}^{j}\right) g_2 - \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{j=0}^{N} C_{\alpha-1}^{j}(-1)^j T_{h_1}^{j}\right) g_1 - \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} C_{\alpha-1}^{j}(-1)^j T_{h_1}^{j}\right) g_1\right\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{N}\left|C_{\alpha-1}^{j}\right| \left\|T_{jh_1+jh_2} g_2 - T_{jh_1} g_1\right\| + \sum_{j=N+1}^{\infty}\left|C_{\alpha-1}^{j}\right| \left\|\tilde{T}_{h_1+h_2}^{j}\right\| \|g_2\| + \sum_{j=N+1}^{\infty}\left|C_{\alpha-1}^{j}\right| \left\|\tilde{T}_{h_1}^{j}\right\| \|g_1\| <$$

$$< \sum_{j=0}^{N}\left|C_{\alpha-1}^{j}\right| \left\|\tilde{T}_{jh_1}\right\| \left\|T_{jh_2} g_2 - g_1\right\| + \frac{2\varepsilon}{3C+1} C < \varepsilon.$$

З отриманої нерівності, як і в попередньому випадку (коли виконується припущення 1), отримуємо, що для всіх $t_0 \in [0, a]$, $t \in [0, a]$, $|t - t_0| < \min\left\{1, \delta(N+1)^{-1}\right\}$, виконується нерівність $|\omega(t) - \omega(t_0)| \le \varepsilon$. Оскільки число $a > 0$ довільне, то звідси випливає неперервність функції ω на $[0, +\infty)$. Таким чином, виконання умови 3 доведено повністю.

Доведемо тепер виконання умови 4. Для всіх $h \in [0, \delta]$ маємо

$$\left\|(T_{nh} - I)^k f\right\| = \left\|\left(T_h^n - I\right)^k f\right\| = \left\|\left(T_h^{n-1} + \ldots + I\right)^k (T_h - I)^k f\right\| \le$$

$$\le \left(\left\|\widetilde{T}_h\right\|^{n-1} + \ldots + \left\|\widetilde{I}\right\|\right)^k \left\|(T_h - I)^k f\right\| \le n^k \omega_k(\delta).$$

Якщо h пробігає весь відрізок $[0, \delta]$, то nh пробігає весь відрізок $[0, n\delta]$, тому

$$\omega_k(n\delta) = \sup_{h \in [0, \delta]} \left\|(T_{nh} - I)^k f\right\| \le n^k \omega_k(\delta).$$

3. Доведення теореми 1. Нехай виконується припущення 1, $\alpha \ge 3$ і $h > 0$. Доведемо нерівність

$$\left\|\left(\left(I - T_h^{n+1}\right)^\alpha - 2\left(I - T_h^n\right)^\alpha + \left(I - T_h^{n-1}\right)^\alpha\right) f\right\| \le C_n \left\|(I - T_h)^\alpha f\right\|, \tag{6}$$

де C_n — стала, що залежить лише від α і n, причому $C_n = O\left(n^{\alpha - 3/2}\right)$, $n \to \infty$. Для спрощення позначимо $T := T_h$. Щоб довести (6), отримаємо оцінку

$$\left\|\left(\left(I - \varepsilon^{n+1} T^{n+1}\right)^\alpha - 2\left(I - \varepsilon^n T^n\right)^\alpha + \left(I - \varepsilon^{n-1} T^{n-1}\right)^\alpha\right) f\right\| \le C_n \left\|(I - \varepsilon T)^\alpha f\right\|, \tag{7}$$

де $\varepsilon \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$ — довільне фіксоване число.

Відомо [4] (п. 407), що при всіх $x \in (-1, 1)$ і $\alpha \in \mathbb{R}$ має місце розклад (2), причому ряд збігається абсолютно. Тому рівність

$$(I - \varepsilon T)^{-\beta} = \sum_{j=0}^{\infty} C_{-\beta}^j (-1)^j \varepsilon^j T^j, \tag{8}$$

в якій $\beta > 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$ і ряд справа збігається абсолютно у просторі $L(X)$ лінійних неперервних операторів, що діють з X в X, коректно визначає оператор $(I - \varepsilon T)^{-\beta} \in L(X)$. Аналогічно доведенню рівності (3) отримуємо, що $(I - \varepsilon T)^{-\beta} (I - \varepsilon T)^\beta = I$. Використовуючи цю рівність при $\beta = \alpha$, бачимо, що для обґрунтування (7) достатньо встановити нерівність

$$\left\|\left(\left(I-\varepsilon^{n+1}T^{n+1}\right)^{\alpha}-2\left(I-\varepsilon^{n}T^{n}\right)^{\alpha}+\left(I-\varepsilon^{n-1}T^{n-1}\right)^{\alpha}\right)(I-\varepsilon T)^{-\alpha}\right\| \le C_n. \tag{9}$$

Для встановлення (9) розглянемо допоміжну операторнозначну функцію

$$f(s_1,s_2) = s_1 s_2\varepsilon^2 T^2+(1-s_1)(1-s_2)I+(s_1(1-s_2)+s_2(1-s_1))\varepsilon T, \quad s_1, s_2\in[0,1].$$

Оскільки $\|T\|\le 1$ і $s_1(1-s_2)+s_2(1-s_1)\ge 0$ для $s_1, s_2\in[0,1]$, то

$$\|f(s_1,s_2)\| \le s_1 s_2+(1-s_1)(1-s_2)+(s_1(1-s_2)+s_2(1-s_1)) = 1, \tag{10}$$

звідки $\left\|\varepsilon^{n-1}T^{n-1}f(s_1,s_2)\right\|\le\varepsilon^{n-1}\|T\|^{n-1}\le\varepsilon^{n-1}<1$, отже, означення допоміжної функції

$$F(s_1,s_2) = \left(I-\varepsilon^{n-1}T^{n-1}f(s_1,s_2)\right)^{\alpha} :=$$

$$:= \sum_{j=0}^{\infty} C_{\alpha}^{j}(-1)^j\varepsilon^{j(n-1)}T^{j(n-1)}f^j(s_1,s_2), \quad s_1, s_2\in[0,1], \tag{11}$$

є коректним. Зазначимо, що

$$f(0,0) = I, \qquad f(1,0) = f(0,1) = \varepsilon T, \qquad f(1,1) = \varepsilon^2 T^2,$$

$$F(0,0) = \left(I-\varepsilon^{n-1}T^{n-1}\right)^{\alpha}, \qquad F(1,0) = F(0,1) = \left(I-\varepsilon^{n}T^{n}\right)^{\alpha}, \qquad F(1,1) = \left(I-\varepsilon^{n+1}T^{n+1}\right)^{\alpha}.$$

Тому

$$\left(I-\varepsilon^{n+1}T^{n+1}\right)^{\alpha}-2\left(I-\varepsilon^{n}T^{n}\right)^{\alpha}+\left(I-\varepsilon^{n-1}T^{n-1}\right)^{\alpha} =$$

$$= F(1,1)-F(0,1)-F(1,0)+F(0,0) = \int_0^1\left(\int_0^1 F''_{s_1s_2}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_2\right)d\tau_1. \tag{12}$$

Оскільки сума степеневого ряду є нескінченно диференційовною на інтервалі збіжності і її похідну можна знайти почленним диференціюванням ряду, а також функція f є нескінченно диференційовною як операторнозначний многочлен, то похідна $F''_{s_1s_2}(s_1,s_2)$ існує для всіх $s_1, s_2\in[0,1]$ і її можна знайти почленним диференціюванням ряду (11). Оскільки для всіх $x\in(-1,1)$ справджуються рівності

$$\left((1-x)^{\alpha}\right)' = \sum_{j=1}^{\infty} jC_{\alpha}^{j}(-1)^j x^{j-1} = \sum_{j=1}^{\infty}\alpha\, C_{\alpha-1}^{j-1}(-1)^j x^{j-1} = -\alpha(1-x)^{\alpha-1},$$

$$\sum_{j=2}^{\infty} j\,(j-1)\,C_{\alpha}^{j}\,(-1)^{j}\,x^{j-2} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} C_{\alpha}^{j}\,(-1)^{j}\,x^{j}\right)'' = \left((1-x)^{\alpha}\right)'' = \alpha\,(\alpha-1)\,(1-x)^{\alpha-2},$$

то із зображення (11) отримуємо

$$F''_{s_1 s_2}(s_1, s_2) = \sum_{j=0}^{\infty} C_{\alpha}^{j}\,(-1)^{j}\,\varepsilon^{(n-1)j}\,T^{(n-1)j}\left(j\,f^{\,j-1}(s_1, s_2)\,f''_{s_1 s_2}(s_1, s_2) + \right.$$

$$\left. + \; j\,(j-1)\,f^{\,j-2}\,(s_1, s_2)\,f'_{s_1}(s_1, s_2)\,f'_{s_2}(s_1, s_2)\right) =$$

$$= -\alpha\varepsilon^{n-1}\,T^{n-1}\left(I-\varepsilon^{n-1}\,T^{n-1}f(s_1, s_2)\right)^{\alpha-1} f''_{s_1 s_2}(s_1, s_2) +$$

$$+ \; \alpha\,(\alpha-1)\,\varepsilon^{2(n-1)}\,T^{2(n-1)}\left(I-\varepsilon^{n-1}\,T^{n-1}f\,(s_1, s_2)\right)^{\alpha-2} f'_{s_1}(s_1, s_2)\,f'_{s_2}(s_1, s_2) =$$

$$= -\alpha\varepsilon^{n-1}\,T^{n-1}\left(I-\varepsilon^{n-1}T^{n-1}f\,(s_1, s_2)\right)^{\alpha-1}(I-\varepsilon T)^{2} + \alpha\,(\alpha-1)\,\varepsilon^{2n-2}\,T^{2n-2}\,\times$$

$$\times\left(I-\varepsilon^{n-1}T^{n-1}f\,(s_1, s_2)\right)^{\alpha-2}(I-\varepsilon T)^{2}\,\big(s_2\,(I-\varepsilon T)-I\big)\big(s_1\,(I-\varepsilon T)-I\big). \tag{13}$$

Щоб встановити оцінку (9), достатньо, врахувавши рівність (12), одержати оцінку норми оператора $F''_{s_1 s_2}(s_1, s_2)(I-\varepsilon T)^{-\alpha}$. З огляду на (13) для цього достатньо отримати оцінку

$$\left\|\left(I-\varepsilon^{n-1}\,T^{n-1}f\,(s_1, s_2)\right)^{\alpha-2}(I-\varepsilon T)^{2-\alpha}\right\| \le C'_n, \tag{14}$$

де C'_n — стала, що залежить лише від α і n. Дійсно, якщо нерівність (14) доведено, то, враховуючи співвідношення (13), (10) і оцінку

$$\left\|I-\varepsilon^{n-1}\,T^{n-1}f(s_1, s_2)\right\| \le \|I\| + \varepsilon^{n-1}\|T\|^{n-1}\,\|f(s_1, s_2)\| \le 2,$$

отримуємо

$$\left\|F''_{s_1 s_2}(s_1, s_2)(I-\varepsilon T)^{-\alpha}\right\| \le \left\|-\alpha\varepsilon^{n-1}T^{n-1}\right\|\left\|\left(I-\varepsilon^{n-1}\,T^{n-1}f\,(s_1, s_2)\right)^{\alpha-2}(I-\varepsilon T)^{2-\alpha}\right\|\times$$

$$\times\left\|I-\varepsilon^{n-1}\,T^{n-1}f\,(s_1, s_2)\right\| + \left\|\alpha\,(\alpha-1)\,\varepsilon^{2n-2}\,T^{2n-2}\right\|\times$$

$$\times\left\|\left(I-\varepsilon^{n-1}\,T^{n-1}f(s_1, s_2)\right)^{\alpha-2}(I-\varepsilon T)^{2-\alpha}\right\|\,\|s_2(I-\varepsilon T)-I\|\,\|s_1(I-\varepsilon T)-I\| \le$$

$$\leq\ 2\alpha C_n' + \alpha(\alpha-1)\, C_n'\big(s_2\big(\|I\| + \|\varepsilon T\|\big) + \|I\|\big)\big(s_1\big(\|I\| + \|\varepsilon T\|\big) + \|I\|\big)\ \leq$$

$$\leq\ (2\alpha + 9\alpha(\alpha-1))\, C_n'\ =:\ C_n, \tag{15}$$

причому $O(C_n) = O(C_n')$ при $n \to \infty$.

Доведемо оцінку (14). Зафіксуємо $s_1, s_2 \in [0, 1]$ в цьому виразі. Враховуючи рівності (11), (8) (в останній рівності $-\beta$ потрібно замінити на $2-\alpha$) і розглядаючи вираз для оператора з формули (14) як добуток рядів за Коші, кожен з яких абсолютно збігається, маємо

$$\left(I - \varepsilon^{n-1} T^{n-1} f(s_1, s_2)\right)^{\alpha-2} (I - \varepsilon T)^{2-\alpha}\ =\ \sum_{j=0}^{\infty} c_j T^j, \tag{16}$$

причому даний ряд теж абсолютно збігається. З (16) випливає, що

$$\left\|\left(I - \varepsilon^{n-1} T^{n-1} f(s_1, s_2)\right)^{\alpha-2} (I - \varepsilon T)^{2-\alpha}\right\|\ \leq\ \sum_{j=0}^{\infty} |c_j|, \tag{17}$$

при цьому ряд $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ збігається абсолютно як ряд, що є добутком за Коші абсолютно збіжних рядів, утворених з коефіцієнтів при степенях T рядів, якими задаються оператори $\left(I - \varepsilon^{n-1} T^{n-1} f\right)^{\alpha-2}$ та $(I - \varepsilon T)^{2-\alpha}$. Таким чином, можна покласти

$$C_n'\ :=\ \sum_{j=0}^{\infty} |c_j|. \tag{18}$$

Рівність (16) справедлива, якщо замість оператора T підставити довільний оператор із нормою, що не перевищує 1, в будь-якому банаховому просторі, зокрема якщо замість оператора T взяти оператор множення на число $e^{i\varphi}$, де $\varphi \in [-\pi, \pi]$, у банаховому просторі $\mathbb{C}$. При цьому для функції

$$g(\varphi)\ :=\ \Big(1 - \varepsilon^{n-1} e^{i\varphi(n-1)} \Big(s_1 s_2 \varepsilon^2 e^{2i\varphi} + (1-s_1)(1-s_2) +$$

$$+\ \big(s_1(1-s_2) + s_2(1-s_1)\big)\, \varepsilon\, e^{i\varphi}\Big)\Big)^{\alpha-2} \left(1 - \varepsilon\, e^{i\varphi}\right)^{2-\alpha}, \quad \varphi \in [-\pi, \pi],$$

рівність (16) набирає вигляду $g(\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\, e^{ji\varphi}$ і є розкладом у ряд Фур'є за ортонормованою системою функцій $\left\{\sqrt{(2\pi)^{-1}}\, e^{ij\varphi} : j \in \mathbb{Z}\right\}$, тому що рівномірно збіжний на $\mathbb{R}$ тригонометричний ряд є рядом Фур'є своєї суми [53] (п. 678). Розкладаючи кожен із двох множників, добутком яких є функція g, в ряд за формулою (2) (з заміною в останній α на $\alpha-2$ та $2-\alpha$ відповідно) і перемножаючи за Коші відповідні розклади, знаходимо $c_0=1$. Звідси, використовуючи нерівність Коші – Буняковського для рядів, рівності $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}=\frac{\pi^2}{6}$ і Парсеваля, а також зв'язок між коефіцієнтами Фур'є функції g та її похідної, маємо

$$\sum_{j=0}^{\infty}|c_j| = 1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}|jc_j| \le 1+\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|jc_j|^2\right)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,||g'||_2, \tag{19}$$

де $||g'||_2$ — норма функції g' у просторі $L_2[-\pi,\pi]$.

Щоб отримати оцінку для $||g'||_2$, розглянемо допоміжну функцію

$$f(s_1,s_2,z) := s_1s_2z^2+(1-s_1)(1-s_2)+(s_1(1-s_2)+s_2(1-s_1))z, \qquad s_1,s_2\in[0,1], \quad z\in\mathbb{C}.$$

Тоді

$$g(\varphi) = \left(1-z^{n-1}f(s_1,s_2,z)\right)^{\alpha-2}(1-z)^{2-\alpha}, \quad \text{де} \quad z=\varepsilon e^{i\varphi}, \quad \varepsilon\in\left(\frac{1}{4},1\right), \quad \varphi\in[-\pi,\pi],$$

а також

$$g'(\varphi) = iz\Bigg((\alpha-2)\left(1-z^{n-1}f(s_1,s_2,z)\right)^{\alpha-3}\Bigg(-(n-1)z^{n-2}f(s_1,s_2,z)-$$

$$-z^{n-1}\frac{\partial f}{\partial z}(s_1,s_2,z)\Bigg)(1-z)^{2-\alpha}-\left(1-z^{n-1}f(s_1,s_2,z)\right)^{\alpha-2}(2-\alpha)(1-z)^{1-\alpha}\Bigg) =$$

$$= iz(\alpha-2)\left(1-z^{n-1}f(s_1,s_2,z)\right)^{\alpha-3}(1-z)^{1-\alpha}h(s_1,s_2,z), \tag{20}$$

де

$$h(s_1,s_2,z) := (z-1)\left((n-1)z^{n-2}f(s_1,s_2,z)+z^{n-1}\frac{\partial f}{\partial z}(s_1,s_2,z)\right)+1-z^{n-1}f(s_1,s_2,z),$$

$$s_1,s_2\in[0,1], \quad z\in\mathbb{C}.$$

Враховуючи рівність із співвідношення (10), означення функції f і вираз для її похідної, одержуємо

$$h(s_1,s_2,z) = f(s_1,s_2,z)\left((z-1)(n-1)z^{n-2}-z^{n-1}\right)-z^{n-1}(1-z)\frac{\partial f}{\partial z}(s_1,s_2,z)+$$

$$+\ s_1s_2+(1-s_1)(1-s_2)+s_1(1-s_2)+s_2(1-s_1)\ =$$

$$=\ s_1s_2\Big((z-1)(n-1)z^n-z^{n+1}-2z^n(1-z)+1\Big)+$$

$$+\ (1-s_1)(1-s_2)\Big((z-1)(n-1)z^{n-2}-z^{n-1}+1\Big)+$$

$$+\ \big(s_1(1-s_2)+s_2(1-s_1)\big)\Big((z-1)(n-1)z^{n-1}-z^n-z^{n-1}(1-z)+1\Big). \tag{21}$$

Використовуючи зображення (21), отримуємо оцінку для функції h при $|z|\le 1$ і $s_1,\, s_2\in[0,1]$:

$$|h(s_1,\, s_2,\, z)|\ \le\ s_1\, s_2\,((n-1)|z-1|+2|z-1|+2)+$$

$$+\ (1-s_1)(1-s_2)((n-1)\,|z-1|+2)+$$

$$+\ \big(s_1(1-s_2)+s_2(1-s_1)\big)((n-1)\,|z-1|+|z-1|+2)\ \le\ (n+1)\,|z-1|+2. \tag{22}$$

Використовуючи формулу (21), можна отримати й інше зображення для функції h при $|z|<1$ і $s_1,\, s_2\in[0,1]$:

$$h(s_1,\, s_2,\, z)\ =\ s_1s_2(z-1)\Big(nz^n-z^{n-1}-z^{n-2}-\ldots-1\Big)+$$

$$+\ (1-s_1)(1-s_2)(z-1)\Big((n-2)z^{n-2}-z^{n-3}-z^{n-4}-\ldots-1\Big)+$$

$$+\ \big(s_1(1-s_2)+s_2(1-s_1)\big)(z-1)\Big((n-1)z^{n-1}-z^{n-2}-z^{n-3}-\ldots-1\Big)\ =$$

$$=\ s_1s_2(z-1)^2\left(\frac{z^n-z^{n-1}}{z-1}+\frac{z^n-z^{n-2}}{z-1}+\ldots+\frac{z^n-1}{z-1}\right)+$$

$$+\ (1-s_1)(1-s_2)(z-1)^2\left(\frac{z^{n-2}-z^{n-3}}{z-1}+\frac{z^{n-2}-z^{n-4}}{z-1}+\ldots+\frac{z^{n-2}-1}{z-1}\right)+$$

$$+\ \big(s_1(1-s_2)+s_2(1-s_1)\big)(z-1)^2\left(\frac{z^{n-1}-z^{n-2}}{z-1}+\frac{z^{n-1}-z^{n-3}}{z-1}+\ldots+\frac{z^{n-1}-1}{z-1}\right).$$

Звідси, враховуючи, що для $m\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{N}$, $|z|<1$ виконується нерівність

$$\left|\frac{z^{m+p}-z^m}{z-1}\right|\ =\ \left|z^m\left(z^{p-1}+z^{p-2}+\ldots+1\right)\right|\ \le\ |z|^m\Big(|z|^{p-1}+|z|^{p-2}+\ldots+1\Big)\ \le\ p, \tag{23}$$

маємо оцінку для функції h при $|z|<1$ і $s_1, s_2 \in [0, 1]$:

$$|h(s_1, s_2, z)| \le s_1 s_2 |z-1|^2 (1+2+\ldots+n) + (1-s_1)(1-s_2)|z-1|^2 (1+2+\ldots+(n-2)) +$$

$$+ (s_1(1-s_2) + s_2(1-s_1))|z-1|^2 (1+2+\ldots+(n-1)) \le \frac{n(n+1)}{2}|z-1|^2. \qquad (24)$$

З урахуванням рівності зі співвідношення (10) і нерівності (23) знаходимо

$$\left|1 - z^{n-1} f(s_1, s_2, z)\right| = |s_1 s_2 + (1-s_1)(1-s_2) + s_1(1-s_2) + s_2(1-s_1) -$$

$$- z^{n-1}\left(s_1 s_2 z^2 + (1-s_1)(1-s_2) + (s_1(1-s_2) + s_2(1-s_1))z\right)\Big| \le$$

$$\le s_1 s_2 \left|1 - z^{n+1}\right| + (1-s_1)(1-s_2)\left|1 - z^{n-1}\right| + (s_1(1-s_2) + s_2(1-s_1))\left|1 - z^n\right| \le$$

$$\le (n+1) s_1 s_2 |z-1| + (n-1)(1-s_1)(1-s_2)|z-1| + n(s_1(1-s_2) + s_2(1-s_1))|z-1| \le$$

$$= (n+1)|z-1|, \quad |z|<1, \quad s_1, s_2 \in [0, 1]. \qquad (25)$$

Аналогічно (10) отримуємо оцінку

$$\left|1 - z^{n-1} f(s_1, s_2, z)\right| \le 1 + |f(s_1, s_2, z)| \le 2, \quad |z| \le 1, \quad s_1, s_2 \in [0, 1]. \qquad (26)$$

Використовуючи рівність (20), оцінки (24) і (25), при $|z|<1$ одержуємо нерівність

$$|g'(\varphi)| \le (\alpha-2)(n+1)^{\alpha-3}|1-z|^{\alpha-3}|1-z|^{-\alpha+1}|1-z|^2 \frac{n(n+1)}{2} \le \frac{\alpha-2}{2}(n+1)^{\alpha-1}. \qquad (27)$$

Оцінимо тепер $|g'(\varphi)|$ інакше. Якщо $z = \varepsilon e^{i\varphi}$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$, $\varepsilon \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$, то, враховуючи нерівність $\sin t \ge \frac{2}{\pi} t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (див., наприклад, [5, с. 101]), маємо оцінку

$$|z-1|^2 = \left|\varepsilon e^{i\varphi} - 1\right|^2 = (\varepsilon\cos\varphi - 1)^2 + \varepsilon^2 \sin^2\varphi =$$

$$= (1-\varepsilon)^2 + 2\varepsilon(1-\cos\varphi) \ge 4\varepsilon\sin^2\frac{\varphi}{2} \ge 4\varepsilon\left(\frac{2}{\pi}\frac{\varphi}{2}\right)^2 \ge \frac{\varphi^2}{\pi^2}.$$

Використовуючи (20), (26), (22) і останню нерівність, для $z = \varepsilon e^{i\varphi}$, $\varepsilon \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$, $\varphi \in$ $\in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$, отримуємо оцінку

$$|g'(\varphi)| \;=\; |z|(\alpha-2)\left|1-z^{n-1}f(s_1, s_2, z)\right|^{\alpha-3}|z-1|^{1-\alpha}|h(s_1, s_2, z)| \;\le$$

$$\le\; (\alpha-2)\,2^{\alpha-3}\left(\frac{n+1}{|z-1|^{\alpha-2}}+\frac{2}{|z-1|^{\alpha-1}}\right) \;\le\; (\alpha-2)\,2^{\alpha-2}\pi^{\alpha-1}\left(\frac{n+1}{|\varphi|^{\alpha-2}}+\frac{1}{|\varphi|^{\alpha-1}}\right).$$

Враховуючи (27) і останню нерівність, одержуємо оцінку

$$\|g'\|_2^2 \;=\; \int\limits_{-1/n}^{1/n}|g'(\varphi)|^2\,d\varphi + \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus[-1/n,\,1/n]}|g'(\varphi)|^2\,d\varphi \;\le$$

$$\le\; \frac{2}{n}\left(\frac{\alpha-2}{2}(n+1)^{\alpha-1}\right)^2 + 2\left((\alpha-2)\,2^{\alpha-2}\pi^{\alpha-1}\right)^2\int\limits_{1/n}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{\varphi^{\alpha-2}}+\frac{1}{\varphi^{\alpha-1}}\right)^2 d\varphi,$$

причому

$$\int\limits_{1/n}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{\varphi^{\alpha-2}}+\frac{1}{\varphi^{\alpha-1}}\right)^2 d\varphi \;=\; \left(\frac{1}{2\alpha-5}+\frac{2}{2\alpha-4}+\frac{1}{2\alpha-3}\right)n^{2\alpha-3}+o\left(n^{2\alpha-3}\right).$$

З попередніх двох рівностей випливає, що

$$\|g'\|_2^2 \;=\; C(\alpha)\,n^{2\alpha-3}+o\left(n^{2\alpha-3}\right), \quad n\to\infty,$$

де $C(\alpha)>0$ — стала, що залежить лише від α. Тому існує стала $C_n''>0$, що залежить лише від α і n, така, що $\|g'\|_2 \le C_n''$, причому $C_n''=O\left(n^{\alpha-3/2}\right)$ при $n\to\infty$. Звідси, враховуючи (12), (14), (15), (17) – (19), отримуємо, що стала C_n, яка фігурує в нерівностях (7) і (9), існує та залежить лише від α і n, причому $C_n=O\left(n^{\alpha-3/2}\right)$ при $n\to\infty$. Таким чином, нерівність (7) встановлено.

Відомо [4] (п. 407), що при $\alpha>0$ ряд (2) збігається при всіх $x\in[-1, 1]$ і його сума є неперервною функцією на цьому відрізку, тому оператори, які фігурують у формулі (7), при $m=n+1$, $m=n$, $m=n-1$ та $m=1$ задаються у вигляді степеневого ряду операторів

$$\left(I-\varepsilon^m T^m\right)^\alpha \;=\; \sum_{j=0}^{\infty}C_\alpha^j\,(-1)^j\,\varepsilon^{jm}\,T^{jm}$$

і є неперервними функціями від ε, якщо $\varepsilon\in[-1, 1]$. Врахувавши цей факт і неперервність норми, перейдемо у нерівності (7) до границі при $\varepsilon\to 1-$ і отримаємо нерівність (6). Таким чином, нерівність (6) встановлено, якщо виконується припущення 1. Якщо виконується припущення 2 і $\alpha\ge 4$, то можна застосувати отриману нерівність до числа $\alpha-1$ (замість

α), елемента $g := (I - T_h) f \in Y$ (замість f) і простору Y (для них виконується припущення 2), і таким чином встановимо нерівність (6) і за припущення 2.

Нехай числа $t > 0$ і $h \in (0, t]$ є довільними фіксованими. З нерівності (6) за означенням модуля неперервності отримуємо оцінку

$$\left\| \left(\left(I - T_h^{n+1}\right)^{\alpha} - 2\left(I - T_h^{n}\right)^{\alpha} + \left(I - T_h^{n-1}\right)^{\alpha} \right) f \right\| \le C_n \omega_{\alpha}(f, t),$$

з якої випливає, що

$$2\left\| \left(I - T_h^{n}\right)^{\alpha} f \right\| \le \left\| \left(I - T_h^{n+1}\right)^{\alpha} f \right\| + \left\| \left(I - T_h^{n-1}\right)^{\alpha} f \right\| + C_n \omega_{\alpha}(f, t) \le$$

$$\le \omega_{\alpha}(f, (n+1)t) + \omega_{\alpha}(f, (n-1)t) + C_n \omega_{\alpha}(f, t).$$

Якщо h пробігає весь проміжок $(0, t]$, то nh пробігає весь проміжок $(0, nt]$, тому з останньої нерівності, рівності $T_h^n = T_{nh}$ і означення точної верхньої межі й одержуємо нерівність (4).

Теорему 1 доведено.

Література

1. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 624 с.
2. *Купцов Н. П.* Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов // Успехи мат. наук. – 1968. – **23**, вып. 4 (142). – С. 117 – 178.
3. *Butzer P. L., Dyckhoff H., Gorlich E., Stens R. L.* Best trigonometric approximation, fractional order derivatives and Lipschitz classes // Canad. J. Math. – 1977. – **29**, № 4. – P. 781 – 793.
4. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – М.: Наука, 1966. – Т. 1 – 3.
5. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
6. *Dzyadyk V. K., Shevchuk I. A.* Theory of uniform approximation of functions by polynomials. – Amsterdam: Walter De Gruyter, 2008. – 496 p.
7. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 224 с.
8. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
9. *Конягин С. В.* О вторых модулях непрерывности // Тр. Мат. ин-та РАН. – 2010. – **269**. – С. 150 – 152.
10. *Безкрила С. І., Нестеренко О. Н., Чайковський А. В.* Про треті модулі неперервності // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 10. – С. 1412 – 1416.
11. *Безкрила С. І., Нестеренко О. Н., Чайковський А. В.* Про четвертий модуль неперервності // Наук. часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. – 2012. – № 13 (1). – С. 45 – 50.
12. *Bezkryla S. I., Nesterenko O. N., Chaikovs'kyi A. V.* On high orders moduli of continuity generated by semigroups of operators // Jaen J. Approxim. – 2016. – **8**, № 2. – P. 183 – 190.

Одержано 20.06.18