УДК 517.9

І. М. Александрович, М. В.-С. Сидоров (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ, ЩО ВИЗНАЧАЮТЬ РОЗВ'ЯЗОК ІТЕРОВАНОГО РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

We construct differential operators that transform arbitrary holomorphic functions into regular solutions of elliptic-type equations of the second and higher orders. The Riquier problem is solved for the elliptic-type equation of the fourth order.

Побудовано диференціальні оператори, які переводять довільні голоморфні функції в регулярні розв'язки рівняння еліптичного типу другого та вищих порядків. Розв'язано задачу Рік'є для рівняння еліптичного типу четвертого порядку.

1. Вступ. При вивченні задач, пов'язаних з явищами вібрації та іншими задачами механіки і математичної фізики, широко використовуються диференціальні рівняння з частинними похідними, що містять оператори вигляду

$$D_m = \frac{\partial^m}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m}$$

та їхні ітерації.

Одним із методів розв'язування таких рівнянь є створення диференціальних операторів, що визначають розв'язок рівнянь і систем еліптичного типу [1–3].

У роботі побудовано диференціальні оператори, які переводять довільні голоморфні в однозв'язній області D площини $z = x + iy$ функції у регулярний розв'язок рівняння

$$J_p^m W = \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{p}{2(z - \bar{z})} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial}{\partial z} \right) \right)^m W(z, \bar{z}) = 0, \qquad m \in \mathbb{N}, \quad \frac{p}{2} \in \mathbb{Z},$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \tag{1}$$

Як приклад застосування побудованих операторів розв'язано задачу Рік'є.

Насамперед розглянемо диференціальне рівняння

$$W_{z\bar{z}} + \frac{(n-m)\varphi'(z)}{\varphi(z) - \overline{\psi(z)}} W_{\bar{z}} + \frac{n(m+1)\varphi'(z)\overline{\psi'(z)}}{\left(\varphi(z) - \overline{\psi(z)}\right)^2} W = 0, \tag{2}$$

де $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — голоморфні функції, що справджують умову

$$\left(\varphi(z) - \overline{\psi(z)}\right) \varphi'(z) \psi'(z) \neq 0, \qquad m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Клас голоморфних в області D функцій позначатимемо $H(D)$.

Диференціальні оператори $Lg(z)$ і $N\overline{f(z)}$, кожен з яких визначає розв'язок рівняння (2), вводимо наступною теоремою, доведеною у роботі [1].

Теорема. *Нехай $g(z)$ і $f(z)$ — довільні голоморфні функції в однозв'язній області D. Тоді функція $W(z,\bar z)$, визначена рівністю*

$$W(z,\bar z) = Lg(z) + N\overline{f(z)} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!(m+1)_{n-k}}{k!(n-k)!}\frac{(\varphi'(z))^{n-k}}{\left(\varphi(z)-\overline{\psi(z)}\right)^{n-k}}g^{(k)}(z)+$$
$$+\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\frac{m!(n+1)_{m-k}}{k!(m-k)!}\frac{\left(\overline{\psi'(z)}\right)^{n-k}}{\left(\varphi(z)-\overline{\psi(z)}\right)^{n-k}}\overline{f^{(k)}(z)}, \tag{3}$$

є розв'язком рівняння (2). *Тут* $(m+1)_{n-k} = (m+1)(m+2)\ldots(m+n-k)$ — *символ Похгаммера.*

Застосуємо твердження теореми до розв'язування задачі.

Задача Діріхле. Нехай D — верхня півплощина $y>0$. Знайти регулярний в D розв'язок рівняння

$$W_{z\bar z} + \frac{2}{(z-\bar z)^2}W = 0, \tag{4}$$

що справджує умову

$$\lim_{\bar z\to z}(z-\bar z)W(z,\bar z) = \alpha(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{5}$$

Тут $\alpha(x) = \alpha_1(x) + i\alpha_2(x)$ — задана неперервна обмежена функція від x.

У відповідності з (3) розв'язок задачі шукаємо у вигляді

$$W = -\frac{2}{z-\bar z}g(z) + g'(z) + \frac{2}{z-\bar z}\overline{f(z)} + \overline{f'(z)}. \tag{6}$$

Задовольняючи умову (5) і вважаючи, що

$$\lim_{\bar z\to z}(z-\bar z)\left(g'(z) + \overline{f'(z)}\right) = 0, \tag{7}$$

одержуємо

$$\left(-2g(z) + 2\overline{f(z)}\right)_{y=0} = \alpha(x)$$

або

$$\mathrm{Re}\left[-2g(z) + 2f(z)\right]_{y=0} = \alpha_1(x), \tag{8}$$

$$\mathrm{Re}\left[i\left(2g(z) + 2f(z)\right)\right]_{y=0} = \alpha_2(x). \tag{9}$$

Вважатимемо, що функція $\alpha(x)$ на всій осі правильно неперервна і в околі нескінченно віддаленої точки задовольняє умову $H(\upsilon)$, тобто

$$\left|\alpha(x_1) - \alpha(x_2)\right| \le A\left|\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right|^{\upsilon}, \quad A, \upsilon - \mathrm{const} > 0,$$

при достатньо великих $|x_1|$ і $|x_2|$. Тоді розв'язок задачі Діріхле у півплощині $y > 0$ при крайовій умові (8), (9) можна записати у вигляді [4]

$$-g(z) + f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_1(t)}{t - z}\, dt + \frac{i}{2} C_1,$$

$$g(z) + f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{-i\alpha_2(t)}{t - z} dt + \frac{1}{2} C_2$$

($C_1,\ C_2$ — дійсні сталі). Звідси

$$g(z) = -\frac{1}{4\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(t)}{t - z}\, dt - \frac{i}{4} C, \tag{10}$$

$$\overline{f(z)} = -\frac{1}{4\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(t)}{t - \bar{z}}\, dt - \frac{i}{4} C, \tag{11}$$

$$C = C_1 + iC_2.$$

Оскільки інтеграли у формулах (10), (11) можна відповідно диференціювати по z і $\bar{z}$, то

$$g'(z) = -\frac{1}{4\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(t)}{(t - z)^2}\, dt, \tag{12}$$

$$\overline{f'(z)} = -\frac{1}{4\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(t)}{(t - \bar{z})^2}\, dt. \tag{13}$$

При цьому виконується умова (7).

Підставляючи (10) – (12) у (6), одержуємо розв'язок задачі Діріхле для рівняння (4):

$$W(z, \bar{z}) = -\frac{(z - \bar{z})^2}{4\pi i} \int\limits_{\infty}^{\infty} \alpha(t) \frac{dt}{\left(|t - z|^2\right)^2}.$$

2. Побудова диференціального оператора, що визначає розв'язок рівняння (1). Виконавши заміну $W = (z - \bar{z})^{-\frac{p}{2}} V$, рівняння (1) зведемо до вигляду

$$J_n^m V = \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(z - \bar{z})^2} \right)^m V = 0, \qquad n = \frac{p}{2} - 1, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{1'}$$

Нехай D — однозв'язна область у верхній півплощині. Розглянемо рівняння ($1'$) при $m = 1$:

$$J_n V = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(z - \bar{z})^2} V = 0. \tag{14}$$

Розв'язок цього рівняння в області D за формулою (3) має вигляд

$$V(z,\bar z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}(2n-k)!}{k!(n-k)!}\frac{1}{(z-\bar z)^{n-k}}g^{(k)}(z)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}\frac{1}{(z-\bar z)^{n-k}}\overline{f^{(k)}(z)}, \tag{15}$$

де $\{g(z),f(z)\}\in H(D)$.

Формулу (15) можна записати у вигляді

$$V(z,\bar z)=K_n g(z)+\overline{K_n f(z)}, \tag{15$'$}$$

де

$$K_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}(2n-k)!}{k!(n-k)!(z-\bar z)^{n-k}}\frac{\partial^k}{\partial z^k}.$$

Доведемо, що розв'язком рівняння $(1')$ буде

$$V(z,\bar z)=\sum_{i=0}^{m-1}(z+\bar z)^i V_i(z,\bar z),\quad m\geq 2,$$

де $V_i=K_n g_i+\overline{K_n f_i}$, $g_i,f_i\in H(D)$.

Лема. *Якщо* $V_i(z,\bar z)$, $i=\overline{0,m-1}$, *є* $2(i+1)$ *разів неперервно диференційовними розв'язками рівняння* $J_nV=0$, *то функція, визначена рівністю*

$$V(z,\bar z)=\sum_{i=0}^{m-1}V_i(z,\bar z)(z+\bar z)^i,\quad m\geq 2, \tag{16}$$

задовольняє рівняння $J_n^mV=0$, *тобто рівняння* $(1')$.

Доведення проведемо методом математичної індукції. Перевіримо справедливість твердження при $m=2$. Маємо

$$J_n^2(V)=\left(\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}+\frac{n(n+1)}{(z-\bar z)^2}\right)^2V=0. \tag{1$''$}$$

Безпосередньою перевіркою переконаємося, що функція

$$V(z,\bar z)=V_0(z,\bar z)+V_1(z,\bar z)(z+\bar z),$$

де $V_i(z,\bar z)$, $i=0,1$, задовольняють рівняння $J_nv=0$, є розв'язком рівняння $(1'')$.

Враховуючи, що

$$J_n=\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}+\frac{n(n+1)}{(z-\bar z)^2},\qquad J_nV_0=0,\qquad J_nV_1=0,$$

$$J_n\left((z+\bar z)V_1\right)=\frac{\partial V_1}{\partial\bar z}+\frac{\partial V_1}{\partial z},$$

отримуємо

$$J_n^2 V = J_n\big(J_n V_0 + J_n(z+\bar z)V_1\big) = J_n\left(\frac{\partial V_1}{\partial \bar z} + \frac{\partial V_1}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial \bar z} J_n V_1 + \frac{\partial}{\partial z} J_n V_1 = 0.$$

Нехай функція

$$V(z,\bar z) = \sum_{i=0}^{m-2} V_i(z,\bar z)(z+\bar z)^i,$$

де $V_i(z,\bar z)$ — розв'язок рівняння $J_n v = 0$, задовольняє рівняння $J_n^{m-1} V = 0$.

На основі цього припущення доведемо справедливість леми для наступного натурального числа m. Для цього безпосередньою перевіркою переконаємося, що функція, визначена рівністю (16), задовольняє рівняння ($1'$).

Отже,

$$J_n^m(V) = J_n(J_n^{m-1} V) =$$

$$= J_n\left(J_n^{m-1}\left(\sum_{i=0}^{m-2} V_i(z,\bar z)(z+\bar z)^i + V_{m-1}(z,\bar z)(z+\bar z)^{m-1}\right)\right) =$$

$$= J_n^m\left((z+\bar z)^{m-1} V_{m-1}(z,\bar z)\right),$$

оскільки

$$J_n^{m-1}\left(\sum_{i=0}^{m-2}(z+\bar z)^i V_i(z,\bar z)\right) = 0$$

за припущенням.

Залишилося довести, що

$$J_n^m\left((z+\bar z)^{m-1} V_{m-1}(z,\bar z)\right) = 0. \tag{17}$$

Позначимо

$$V_{m-1} = \tilde v.$$

Тоді

$$J_n^m\big((z+\bar z)^{m-1}\tilde v\big) = J_n^{m-1}\big(J_n((z+\bar z)^{m-1}\tilde v)\big).$$

Розглянемо

$$J_n\left((z+\bar z)^{m-1}\tilde v\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar z} + \frac{n(n+1)}{(z-\bar z)^2}\right)\big((z+\bar z)^{m-1}\tilde v\big) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \bar z}\left((m-1)(z+\bar z)^{m-2}\tilde v + (z+\bar z)^{m-1}\frac{\partial \tilde v}{\partial z}\right) + \frac{n(n+1)}{(z-\bar z)^2}(z+\bar z)^{m-1}\tilde v =$$

$$= (m-1)(m-2)(z+\bar z)^{m-3}\tilde v + (m-1)(z+\bar z)^{m-2}\frac{\partial \tilde v}{\partial \bar z} + (m-1)(z+\bar z)^{m-2}\frac{\partial \tilde v}{\partial z} +$$

$$+ (z+\bar z)^{m-1}\frac{\partial^2 \tilde v}{\partial z \partial \bar z} + \frac{n(n+1)}{(z-\bar z)^2}(z+\bar z)^{m-1}\tilde v =$$

$$= (z+\bar z)^{m-1} J_n \tilde v + (m-1)(z+\bar z)^{m-2}\left(\frac{\partial \tilde v}{\partial z} + \frac{\partial \tilde v}{\partial \bar z}\right) +$$

$$+(m-1)(m-2)(z+\bar{z})^{m-3}\tilde{v}. \tag{18}$$

Рівність (17) доводиться знову ж таки методом математичної індукції.

При $m=1$ рівність $J_nV_0=0$ є справедливою за умовою леми. Припускаємо справедливість (17) при $r<m$, тобто

$$J_n^r\left((z+\bar{z})^{r-1}\,\tilde{v}\right)=0.$$

Звідси знаходимо

$$J_n^m\left((z+\bar{z})^{r-1}\tilde{v}\right)=0 \quad \text{при} \quad r<m. \tag{19}$$

Дійсно,

$$J_n^m\left((z+\bar{z})^{r-1}\tilde{v}\right)=J_n^{m-r}\left(J_n^r\big((z+\bar{z})^{r-1}\tilde{v}\big)\right)=0.$$

Використовуючи рівності (18) і (19), переконуємось у справедливості рівності (17) для m:

$$J_n^m\big((z+\bar{z})^{m-1}\tilde{v}\big)=$$
$$=(m-1)J_n^{m-1}\left((z+\bar{z})^{m-2}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\bar{z}}\right)\right)+$$
$$+(m-1)(m-2)J_n^{m-1}\big((z+\bar{z})^{m-3}\tilde{v}\big)=0.$$

Насправді, $\dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial z}$ і $\dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial\bar{z}}$ задовольняють рівняння $J_nv=0$, а отже, $J_n\left(\dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial z}+\dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial\bar{z}}\right)=0$. За формулою (19) маємо

$$J_n^{m-1}\left((z+\bar{z})^{m-2}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\bar{z}}\right)\right)=0.$$

Лему доведено.

Отримані результати сформулюємо у вигляді такої теореми.

Теорема. *Для будь-якого розв'язку рівняння* $(1')$

$$J_n^mV=0, \quad m\geq 2,$$

знайдуться голоморфні в D *функції* $g_i(z),\ f_i(z)$ *такі, що*

$$V(z,\bar{z})=\sum_{i=0}^{m-1}(z+\bar{z})^i\left(K_ng_i+\overline{K_nf_i}\,\right), \tag{20}$$

і навпаки, якщо $g_i(z),\ f_i(z)$ *голоморфні в* D, *то* (20) *є розв'язком рівняння* $(1')$ *в області* D.

3. Модельний приклад. Застосуємо побудовані диференціальні оператори до розв'язування задач математичної фізики.

Задача Рік'є. Нехай D — верхня півплощина $y>0$. Знайти регулярний у D розв'язок рівняння

$$J^2V=\left(\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}+\frac{2}{(z-\bar{z})^2}\right)^2V=0, \tag{21}$$

що справджує крайові умови

$$\lim_{\bar{z}\to z}(z-\bar{z})V(z,\bar{z}) = \alpha(x), \qquad -\infty < x < \infty,$$
$$\lim_{\bar{z}\to z}(z-\bar{z})JV(z,\bar{z}) = \beta(x), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{22}$$

Тут $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — задані функції достатньої гладкості.

У відповідності з лемою розв'язок задачі (21), (22) шукаємо у вигляді

$$V(z,\bar{z}) = V_0(z,\bar{z}) + (z+\bar{z})V_1(z,\bar{z}).$$

Задовольняючи крайові умови (22), маємо

$$\lim_{\bar{z}\to z}\big((z-\bar{z})(V_0+(z+\bar{z})V_1)\big) = \alpha(x),$$
$$\lim_{\bar{z}\to z}\left[(z-\bar{z})\left(\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}} + \frac{2}{(z-\bar{z})^2}\right)\big(V_0+(z+\bar{z})V_1\big)\right] = \beta(x),$$

або

$$\lim_{\bar{z}\to z}\big((z-\bar{z})(V_0+(z+\bar{z})V_1)\big) = \alpha(x),$$
$$\lim_{\bar{z}\to z}\left((z-\bar{z})\left(\frac{\partial V_1}{\partial z} + \frac{\partial V_1}{\partial\bar{z}}\right)\right) = \beta(x). \tag{22$'$}$$

Оскільки V_0 і V_1 задовольняють рівняння $JV=0$, то для знаходження функцій $V_0(z,\bar{z})$ і $V_1(z,\bar{z})$ маємо такі задачі Діріхле:

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial z\partial\bar{z}} + \frac{2}{(z-\bar{z})^2}V_0 = 0,$$
$$\lim_{\bar{z}\to z}(z-\bar{z})V_0(z,\bar{z}) = \gamma(x), \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial z\partial\bar{z}} + \frac{2}{(z-\bar{z})^2}V_1 = 0,$$
$$\lim_{\bar{z}\to z}(z-\bar{z})V_1(z,\bar{z}) = \delta(x). \tag{24}$$

Тут функції $\gamma(x)$, $\delta(x)$ визначаються із системи рівнянь

$$\gamma(x) + 2x\delta(x) = \alpha(x),$$
$$\gamma'(x) + 2\delta(x) + 2x\beta(x) = \alpha'(x),$$

розв'язуючи яку, одержуємо

$$\gamma(x) = \alpha(x) - 2x\int_{x_0}^{x}\beta(t)dt,$$

$$\delta(x) = \int_{x_0}^{x}\beta(t)dt, \qquad x_0, x \in \mathbb{R}.$$

Розв'язком кожної задачі Діріхле (23) і (24), згідно з розв'язаною задачею (4), (5), буде

$$V_0(z,\bar{z}) = -\frac{(z-\bar{z})^2}{4\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma(t)}{|t-z|^4}\,dt,$$

$$V_1(z,\bar{z}) = -\frac{(z-\bar{z})^2}{4\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(t)}{|t-z|^4}\,dt.$$

Остаточно розв'язком задачі (21), (22) є

$$V(z,\bar{z}) = -\frac{(z-\bar{z})^2}{4\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma(t)+(z+\bar{z})\delta(t)}{|t-z|^4}\,dt.$$

Висновок. Задача Рік'є для рівняння $J_n^m(V)=0$ розв'язна тоді і тільки тоді, коли задачі Діріхле для рівняння $J_n(V)=0$ теж є розв'язними.

Література

1. *Александрович И. Н.* Дифференциальные операторы, определяющие решения одного класса уравнений эллиптического типа // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 6. – С. 825 – 828.
2. *Александрович І. М.* Диференціальні оператори, що визначають розв'язок рівнянь еліптичного типу // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 12. – С. 1587 – 1592.
3. *Положий Г. Н.* Теория и применение p-аналитических и (p,q)-аналитических функций. – Киев: Наук. думка, 1973. – 424 с.
4. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.

Одержано 29.05.18,
після доопрацювання — 03.01.19