УДК 519.21

З. С. Зеракидзе (Гор. гос. ун-т, Грузия),
О. Г. Пуртухия (Тбил. гос. ун-т им. Ив. Джавахишвили, Грузия)

СОСТОЯТЕЛЬНЫЕ КРИТЕРИИ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ

We investigate statistical structures that admit consistent criteria for hypotheses testing and establish necessary and sufficient conditions for the existence of consistent criteria for hypotheses testing.

Досліджуються статистичні структури, що допускають слушні критерії для перевірки гіпотез. Отримано необхідні і достатні умови існування слушних критеріїв для перевірки гіпотез.

1. Введение. На основе выборки можно сформулировать несколько (конечное или бесконечное число) взаимоисключающих гипотез о теоретическом распределении, одну из которых следует предпочесть остальным. Задача выбора одной из нескольких гипотез решается построением статистического критерия. Выводы о распределении, как правило, содержат определенные ошибки. Слабо разделимые и сильно разделимые статистические структуры были введены и исследованы А. В. Скороходом [1], а разделимые статистические структуры определил и изучил А. А. Харазишвили [3]. В теории математической статистики часто возникает вопрос о возможности перехода от ортогональной или слабо разделимой статистической структуры к сильно разделимой статистической структуре. В теории (ZFC) А. В. Скороход доказал, что если гипотеза континуума правильна, то любая континуальная слабо разделимая статистическая структура сильно разделима. В теории (ZF) З. С. Зеракидзе доказал, что любая счетная ортогональная статистическая структура сильно разделима и борелевская слабо разделимая статистическая структура $\{E, S, \mu_i, i \in I\}$ с $\operatorname{card} I \leq 2^{\aleph_0} = c$ сильно разделима в теории (ZFC)&(MA) (см. [4, 5]).

З. С. Зеракидзе определил и изучил состоятельные критерии для проверки гипотез. Используя эти критерии, мы принимаем безошибочные выводы для бесконечного числа гипотез с вероятностью 1, т. е. согласно состоятельным критериям для проверки гипотез вероятности ошибки любого рода равны нулю.

2. Состоятельные критерии для проверки гипотез. Пусть (E, S) — некоторое измеримое пространство и на нем задано семейство вероятностных мер $\{\mu_i, i \in I\}$.

Следующие определения взяты из работ [1 – 9].

Определение 2.1. *Статистической структурой называется совокупность объектов* $\{E, S, \mu_i, i \in I\}$.

Определение 2.2. *Статистическая структура* $\{E, S, \mu_i, i \in I\}$ *называется ортогональной* (*сингулярной*) (O), *если вероятностные меры* $\{\mu_i, i \in I\}$ *попарно сингулярны.*

Определение 2.3. *Статистическая структура* $\{E, S, \mu_i, i \in I\}$ *называется разделимой* (S), *если существует семейство* S*-измеримых множеств* $\{X_i, i \in I\}$ *таких, что выполняются соотношения*:

1) $\forall i, j \in I : \mu_i(X_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j; \end{cases}$

2) $\forall i, j \in I :\ \operatorname{card}(X_i \cap X_j) < c$, *если* $i \neq j$, *где* c *обозначает мощность континуума.*

Определение 2.4. *Статистическая структура* $\{E, S, \mu_i, i \in I\}$ *называется слабо разделимой* (WS), *если существует семейство* S*-измеримых множеств* $\{X_i, i \in I\}$ *таких, что для всех* $i, j \in I$ *выполняются соотношения*

$$\mu_i(X_j) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad i = j, \\ 0, & \textit{если} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Определение 2.5. *Статистическая структура* $\{E, S, \mu_i, i \in I\}$ *называется сильно разделимой* (SS), *если существует семейство непересекающихся* S*-измеримых множеств* $\{X_i, i \in I\}$ *таких, что выполняются соотношения*

$$\mu_i(X_i) = 1 \quad \forall\, i \in I.$$

***Пример* 2.1.** Пусть $E = [0,1] \times [0,1]$, S — борелевская σ-алгебра подмножеств E. Рассмотрим S-измеримые множества

$$X_i = \big\{0 \le x \le 1,\ y = i,\ \text{если } i \in [0,1]\big\}$$

и предположим, что l_i — линейные меры Лебега на X_i, $i \in [0,1]$. Тогда статистическая структура $\big\{[0,1] \times [0,1],\ S,\ l_i,\ i \in [0,1]\big\}$ сильно разделима.

***Пример* 2.2.** Пусть $E = [0,1] \times [0,1]$, S — борелевская σ-алгебра подмножеств E. Рассмотрим S-измеримые множества

$$X_i = \begin{cases} 0 \le x \le 1, \quad y = i, \quad \text{если} \quad i \in [0,1], \\ x = i - 2, \quad 0 \le y \le 1, \quad \text{если} \quad i \in [2,3]. \end{cases}$$

Предположим, что l_i — линейные меры Лебега на X_i. Тогда статистическая структура $\big\{[0,1] \times [0,1],\ S,\ l_i,\ i \in [0,1] \cup [2,3]\big\}$ разделима, но не сильно разделима.

***Пример* 2.3.** Пусть $E = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$, S — борелевская σ-алгебра подмножеств E. Рассмотрим S-измеримые множества

$$X_i = \begin{cases} 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad z = i, \quad \text{если} \quad i \in [0,1], \\ x = i - 2, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le z \le 1, \quad \text{если} \quad i \in [2,3], \\ 0 \le x \le 1, \quad y = i - 4, \quad 0 \le z \le 1, \quad \text{если} \quad i \in [4,5], \end{cases}$$

и предположим, что l_i — плоские меры Лебега на X_i. Тогда статистическая структура $\big\{[0,1] \times [0,1] \times [0,1], S, l_i, i \in [0,1] \cup [2,3] \cup [4,5]\big\}$ слабо разделима, но не разделима.

***Пример* 2.4.** Пусть $E = [0,1] \times [0,1]$, S — борелевская σ-алгебра подмножеств E. Рассмотрим S-измеримые множества

$$X_i = \begin{cases} 0 \le x \le 1, \quad y = i, \quad \text{если} \quad i \in (0,1], \\ 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad \text{если} \quad i = 0, \end{cases}$$

и предположим, что l_i, $i \in (0,1]$, являются линейными мерами Лебега на X_i, $i \in (0,1]$, а l_0 является плоской мерой Лебега на $[0,1] \times [0,1]$. Тогда статистическая структура $\big\{[0,1] \times [0,1],\ S,\ l_i,\ i \in [0,1]\big\}$ ортогональна, но не слабо разделима.

Лемма 2.1. *Если статистическая структура* $\{E, S, \mu_i, i \in I\}$ *слабо разделима, то она ортогональна.*

Доказательство. Если статистическая структура $\{E, S, \mu_i, i \in I\}$ слабо разделима, то существует семейство S-измеримых множеств $\{X_i,\ i \in I\}$ таких, что

$$\mu_i(X_j) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Поскольку $\mu_i(X_i) = 1$ и $\mu_j(X_i) = 0$ для $i \neq j$, то $\mu_i(E \setminus X_i) = 0$. Следовательно, меры μ_i и μ_j, $i \neq j$, ортогональны.

***Замечание* 2.1.** Из сильной разделимости следует разделимость, из разделимости — слабая разделимость, а из слабой разделимости — ортогональность, но не наоборот, т. е. $(SS) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow (S) \Longrightarrow (WS) \Longrightarrow (O)$.

Понятие и соответствующее построение состоятельных критериев для проверки гипотез были введены и изучены З. С. Зеракидзе (см. [6]).

Определение 2.6. *Гипотезой называется любое предположение о распределении популяции.*

Пусть H — множество гипотез, а $B(H)$ — σ-алгебра подмножеств H, которая содержит все конечные подмножества H.

Определение 2.7. *Будем говорить, что статистическая структура* $\{E, S, \mu_h, h \in H\}$ *допускает состоятельный критерий* (CC) *для проверки гипотезы, если существует хотя бы одно измеримое отображение*

$$\delta\colon (E, S) \longrightarrow \big(H, B(H)\big)$$

такое, что

$$\mu_h\big(\{x : \delta(x) = h\}\big) = 1 \quad \forall\, h \in H.$$

Определение 2.8. *Будем говорить, что статистическая структура* $\{E, S, \mu_h, h \in H\}$ *допускает состоятельный критерий для проверки гипотезы для любой параметрической функции, если для любой действительной ограниченной измеримой функции*

$$g\colon (H, B(H)) \longrightarrow (R, B(R))$$

существует хотя бы одна измеримая функция

$$f\colon (E, S) \longrightarrow (R, B(R))$$

такая, что

$$\mu_h(\{x : f(x) = g(h)\}) = 1 \quad \forall\, h \in H.$$

Лемма 2.2. *Если статистическая структура* $\{E, S, \mu_h, h \in H\}$ *допускает состоятельный критерий для проверки гипотезы для любой параметрической функции, то статистическая структура* $\{E, S, \mu_h, h \in H\}$ *слабо разделима.*

Доказательство. Поскольку статистическая структура $\{E, S, \mu_h, h \in H\}$ допускает состоятельный критерий для проверки гипотезы для любой параметрической функции, обозначим через $f(x)$ один из соответствующих состоятельных критериев для индикатора $I_{h'}(h)$. Следовательно, для множеств $\big\{x\colon f_h(x) = I_{h'}(h)\big\} = X_h$ имеем

$$\mu_{h'}(X_h) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad h' = h, \\ 0, & \text{если} \quad h' \neq h. \end{cases}$$

Поэтому статистическая структура $\{E, S, \mu_h, h \in H\}$ слабо разделима.

***Замечание* 2.2.** Очевидно, что если статистическая структура $\{E, S, \mu_h, h \in H\}$ допускает состоятельный критерий для проверки гипотезы для любой параметрической функции, то статистическая структура $\{E, S, \mu_h, h \in H\}$ слабо разделима, но не наоборот.

Определение 2.9. *Вероятность*

$$\alpha_h(\delta) = \mu_h\big(\{x\colon \delta(x) \neq h\}\big)$$

называется вероятностью ошибки h-го рода для заданного критерия δ.

Следующие теоремы были также доказаны в работе [6].

Теорема 2.1. *Статистическая структура $\{E, S, \mu_h, h \in H\}$ допускает состоятельный критерий δ для проверки гипотезы тогда и только тогда, когда вероятность ошибки любого рода для критерия δ равна нулю.*

Теорема 2.2. *Если статистическая структура $\{E, S, \mu_h, h \in H\}$ допускает состоятельный критерий δ для проверки гипотезы, то эта статистическая структура сильно разделима, но не наоборот, т. е. $(CC) \Longrightarrow (SS) \Longrightarrow (S) \Longrightarrow (WS) \Longrightarrow (O)$.*

В настоящей статье мы приводим конструкцию сильно разделимой статистической структуры, не имеющую какого-либо состоятельного критерия для проверки гипотезы.

Как обычно, символ ω_1 обозначает первое несчетное ординальное число [2]. Множество всех порядковых чисел α, для которых выполняется неравенство $\alpha \leq \omega_1$, обозначается $[0, \omega_1]$. Множество $[0, \omega_1]$ наделено стандартной порядковой топологией, где базисом служат подмножества вида $\{x < \alpha\}$, $\{\alpha < x < \beta\}$ и $\{x > \alpha\}$, где $\alpha, \beta \leq \omega_1$. Известно, что полученное топологическое пространство $[0, \omega_1]$ компактно и пространство $[0, \omega_1)$ с индуцированной топологией локально компактно. В этом пространстве счетный базис не существует.

Определение 2.10. *Замкнутое подмножество Z топологического пространства $[0, \omega_1)$ называется неограниченным, если оно конфинально в $[0, \omega_1)$, т. е. для любого $\xi < \omega_1$ существует $\zeta \in Z$ такое, что $\xi \leq \zeta$. Ясно, что множество $\{x \mid x \leq \alpha\}$ счетно для каждого $\alpha < \omega_1$.*

Например, множества $[0, \omega_1), \ldots, [n, \omega_1), \ldots, [\omega_0, \omega_1), \ldots, [\omega_0 + n, \omega_1), \ldots$ являются примерами неограниченных несчетных замкнутых множеств в топологическом пространстве $[0, \omega_1)$. Ясно, что множество $\{x \mid x \leq \alpha\}$ счетно для каждого $\alpha < \omega_1$.

Лемма 2.3. *Пусть $\{Y_k\}_{k \in N}$ — произвольное семейство неограниченных замкнутых подмножеств $[0, \omega_1)$. Тогда пересечение $\cap_{k=1}^{\infty} Y_k$ также является неограниченным замкнутым подмножеством $[0, \omega_1)$.*

Доказательство. Положим $Y = \cap_{k=1}^{\infty} Y_k$. Очевидно, что Y замкнуто в $[0, \omega_1)$. Следовательно, нужно только доказать, что Y неограничен в $[0, \omega_1)$.

Пусть $\{Z_k\}_{k \in N}$ — последовательность множеств, удовлетворяющих следующим условиям:

1) каждое множество из $\{Z_k\}_{k\in N}$ совпадает с одним из множеств последовательности $\{Y_k\}_{k\in N}$;

2) каждое множество из $\{Y_k\}_{k\in N}$ встречается в последовательности $\{Z_k\}_{k\in N}$ бесконечное число раз.

Далее, пусть $\xi < \omega_1$. Методом математической индукции определим последовательность ординальных чисел $\{\zeta_k\}_{k\in N}$. Предположим, что для каждого $k \in N$ мы уже определили частичную последовательность $\{\zeta_i\}_{i<k}$. Тогда в качестве элемента ζ_k берем наименьшее ординальное число, принадлежащее множеству Z_k и строго мажорирующее числа ξ и $\{\zeta_i\}_{i<k}$. Таким образом, мы построили последовательность ординальных чисел $\{\zeta_k\}_{k\in N}$ таких, что

$$\xi \le \zeta_1 \le \zeta_2 \le \ldots \le \zeta_k \le \ldots .$$

Эта последовательность ограничена сверху, поэтому существует предел $\lim_{k\to\infty} \zeta_k = \zeta$. Отсюда следует, что $\zeta \in Y$ и $\xi \le \zeta$, поэтому Y неограничен.

Пусть $B\big([0,\omega_1)\big)$ — борелевская σ-алгебра подмножеств топологического пространства $[0,\omega_1)$. Согласно лемме 2.3 для всех множеств $Z \in B\big([0,\omega_1)\big)$ имеем два альтернативных условия:

I. Множество $Z \in B\big([0,\omega_1)\big)$ содержит некоторое замкнутое бесконечное (неограниченное) подмножество интервала $[0,\omega_1)$.

II. Множество $[0,\omega_1)\setminus Z \in B\big([0,\omega_1)\big)$ содержит некоторое замкнутое бесконечное (неограниченное) подмножество интервала $[0,\omega_1)$.

Определим вероятностную меру на $B\big([0,\omega_1)\big)$ следующим образом:

$$\mu(Z) = \begin{cases} 1, & \text{если выполняется условие} \quad \text{I}, \\ 0, & \text{если выполняется условие} \quad \text{II}. \end{cases}$$

Ясно, что μ — вероятностная мера на пространстве $[0,\omega_1)$, принимающая нулевые значения на одноэлементных подмножествах. Мера μ обычно называется мерой Дьедоне. Положим $E = [0,\omega_1) \times [0,\omega_1)$ и $S = B\big([0,\omega_1)\big) \times B([0,\omega_1)) = \big\{A \times C \ \mid A, C \in B([0,\omega_1))\big\}$.

Заметим, что E — локально компактное топологическое пространство относительно топологии произведения. S является σ-алгеброй, целиком содержащейся в борелевской σ-алгебре этого пространства. Действительно, множество $\big\{(\xi,\varsigma) : \xi \le \zeta < \omega_1\big\}$ замкнуто в пространстве X. Но это множество не измеримо относительно продакт-меры $\mu \times \mu$, в чем легко можно убедиться, воспользовавшись теоремой Фубини.

Рассмотрим теперь измеримое пространство (E,S) и используем в качестве множества гипотез множество H, заданное следующим образом:

$$H = \big(\{0\} \times [0,\omega_1)\big) \cup \big([0,\omega_1) \times \{0\}\big).$$

Ясно, что на множестве H мы имеем σ-алгебру $B(H)$, индуцированную σ-алгеброй S. Рассмотрим произвольную гипотезу $h \in H$. Возможны два случая. Если $h = (0,\xi)$, $\xi < \omega_1$, то пусть вероятностная мера μ_h определена так:

$$\mu_h(Z) = \mu\big(Pr_1(Z \cap ([0,\omega_1) \times \{\xi\}))\big),$$

где Z — любое подмножество пространства E, принадлежащее σ-алгебре S.

Если же $h = (\xi, 0)$, $0 < \xi < \omega_1$, то пусть вероятностная мера μ_h определена таким образом:

$$\mu_h(Z) = \mu\big(Pr_2(Z \cap (\{\xi\} \times [0, \omega_1)))\big), \quad Z \in S.$$

Итак, мы построили статистическую структуру $\{E, S, \mu_h, h \in H\}$.

Лемма 2.4. *Статистическая структура $\{E, S, \mu_h, h \in H\}$ сильно разделима.*

Доказательство. Пусть h имеет вид $h = (0, \xi)$, $\xi < \omega_1$. Тогда ясно, что носителем меры μ_h является отрезок $I_\xi = [0, \omega_1) \times \{\xi\}$.

Если же h имеет вид $h = (\xi, 0)$, $0 < \xi < \omega_1$, то носителем меры μ_h является отрезок $\{\xi\} \times [0, \omega_1)$.

Таким образом, носителями мер из семейства $\{\mu_h, h \in H\}$ являются горизонтальные и вертикальные отрезки, лежащие в квадрате E. Для любых таких отрезков их пересечение либо пусто, либо сводится к одной точке. Следовательно, статистическая структура $\{E, S, \mu_h, h \in H\}$ разделима.

Принимая во внимание тот факт, что существует эффективно определенное взаимно однозначное соответствие

$$g \colon [0, \omega_1) \times [0, \omega_1) \to [0, \omega_1),$$

мы можем эффективно перенумеровать все указанные отрезки в дизъюнктивную трансфинитную последовательность $(Z_\xi)_{\xi < \omega_1}$, а затем с помощью соотношений

$$X_0 = Z_0, \qquad X_\xi = Z_\xi \setminus \cup_{\zeta < \xi} Z_\zeta, \quad 0 < \xi < \omega_1,$$

стандартным способом перейти к дизъюнктивному семейству $(X_\xi)_{\xi < \omega_1}$, для которого $\mu_h(X_h) = 1 \ \forall h \in H$. Таким образом, статистическая структура $\{E, S, \mu_h, h \in H\}$ сильно разделима.

Теорема 2.3. *Построенная сильно разделимая статистическая структура $\{E, S, \mu_h, h \in H\}$ не допускает состоятельные критерии для проверки гипотез.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. существует состоятельный критерий

$$\delta \colon (E, S) \longrightarrow (H, B(H)).$$

Введем обозначения

$$H_1 = \{0\} \times [0, \omega_1), \qquad H_2 = [0, \omega_1) \times \{0\}.$$

Очевидно, что H_1 и H_2 являются $B(H)$-измеримыми подмножествами H такими, что $H_1 \cap H_2 = \varnothing$, $H_1 \cup H_2 = H$. Последнее соотношение означает, что прообразы $Y_1 = \delta^{-1}(H_1)$ и $Y_2 = \delta^{-1}(H_2)$ являются попарно непересекающимися S-измеримыми подмножествами основного квадрата E. Принимая во внимание тот факт, что по теореме Фубини равенства

$$\mu_h\big(x \colon \delta(x) = h\big) = 1$$

справедливы для каждого $h \in H$, получаем следующие соотношения:

$$(\mu \times \mu)(Y_1) = 1, \qquad (\mu \times \mu)(Y_2) = 1, \qquad (\mu \times \mu)(E) = 2.$$

Последнее соотношение противоречит равенству $(\mu \times \mu)(E) = 1$.

Это противоречие показывает, что статистическая структура $\{E, S, \mu_h, h \in H\}$ не допускает состоятельные критерии для проверки гипотез.

Теорема 2.4. *Пусть $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots\}$ — счетное множество гипотез. Если статистическая структура $\{E, S, \mu_{h_i}, i \in N\}$, $N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, или сильно разделима, или разделима, или слабо разделима, или ортогональна, то статистическая структура $\{E, S, \mu_{h_i}, i \in N\}$ допускает состоятельный критерий для проверки гипотезы.*

Доказательство. Поскольку из сильной разделимости следует разделимость, из разделимости — слабая разделимость, а из слабой разделимости — ортогональность $((SS) \Longrightarrow (S) \Longrightarrow \Longrightarrow (WS) \Longrightarrow (O))$, докажем теорему только для ортогональной статистической структуры.

Ортогональность статистической структуры $\{E, S, \mu_{h_i}, i \in N\}$ означает существование семейства $\{X_{ik}\}$ S-измеримых множеств таких, что $\mu_{h_k}(X_{ik}) = 0$ и $\mu_{h_i}(E \setminus X_{ik}) = 0$ для любого $i \neq k$. Поэтому, если рассматривать множества $X_i = \cup_{k \neq i}(E \backslash X_{ik})$, получаем $\mu_{h_i}(X_i) = = 0$. Следовательно, $\mu_{h_i}(E \setminus X_i) = 1$. С другой стороны, для $k \neq i$ имеем $\mu_{h_k}(E \setminus X_i) = = 0$. Это означает, что статистическая структура $\{E, S, \mu_{h_i}, i \in N\}$ слабо разделима. Поэтому существует такое семейство $\{X_i, i \in N\}$ S-измеримых множеств, что

$$\mu_{h_i}(X_j) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Рассмотрим множества

$$\overline{X}_i = X_i \setminus \big(X_i \cap (\cup_{k \neq i} X_k)\big), \quad i \in N.$$

Очевидно, что $\{\overline{X}_i, i \in N\}$ является непересекающимся семейством S-измеримых множеств и $\mu_{h_i}(\overline{X}_i) = 1$ $\forall i \in N$. Следовательно, статистическая структура $\{E, S, \mu_{h_i}, i \in N\}$ сильно разделима. Определим отображение $\delta\colon (E, S) \longrightarrow (H, B(H))$ так, чтобы $\delta(\overline{X}_i) = h_i$, $i \in N$. Мы имеем $\{x : \delta(x) = h_i\} = \overline{X}_i$ и $\mu_{h_i}(\overline{X}_i) = 1$ $\forall i \in N$.

Таким образом, мы доказали, что

$$(O) \Longrightarrow (WS) \Longrightarrow (S) \Longrightarrow (SS) \Longrightarrow (CC).$$

Пример **2.5.** Пусть выборочное пространство $E = R \times R$, где $R = (-\infty, +\infty)$ и $B(R \times R)$ — борелевская σ-алгебра подмножеств E. Рассмотрим множества типа

$$X_h = \{-\infty < x < +\infty, \ y = h, \ h \in Q\},$$

где Q — множество рациональных чисел, и пусть μ_h, $h \in Q$, — линейные гауссовские меры

$$\mu_h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-h)^2}{2}\right\}$$

на соответствующих множествах X_h, $h \in Q$. Возьмем в качестве множества гипотез множество рациональных чисел Q.

Ясно, что борелевская статистическая структура $\{R \times R, B(R \times R), \mu_h, h \in Q\}$ — сильно разделимая статистическая структура.

Определим отображение

$$\delta\colon (R \times R, B(R \times R)) \longrightarrow (R, B(R))$$

по формуле

$$\delta(X_h) = h, \quad h \in Q.$$

Ясно, что δ — измеримое отображение и $\mu_h\big(\{x : \delta(x) = h\}\big) = 1$ $\forall h \in Q$.

Таким образом, статистическая структура $\{R \times R, B(R \times R), \mu_h, h \in Q\}$ допускает состоятельный критерий для проверки гипотезы.

3. Состоятельные критерии для проверки гипотез в гильбертовом пространстве мер. Пусть $\{\mu_h, h \in H\}$ — вероятностные меры, определенные на измеримом пространстве (E, S). Для каждого $h \in H$ обозначим через $\overline{\mu}_h$ пополнение меры μ_h, а через $\mathrm{dom}(\overline{\mu}_h)$ σ-алгебру всех $\overline{\mu}_h$-измеримых подмножеств E. Пусть

$$S_1 = \bigcap_{h\in H} \mathrm{dom}(\overline{\mu}_h).$$

Определение 3.1. *Статистическая структура* $\{E, S_1, \overline{\mu}_h, h \in H\}$ *называется сильно разделимой, если существует семейство* S_1*-измеримых множеств* $\{Z_h, h \in H\}$ *таких, что выполняются соотношения*:

1) $\overline{\mu}_h(Z_h) = 1 \ \forall h \in H$;

2) $Z_{h_1} \cap Z_{h_2} = \varnothing \ \forall h_1 \neq h_2, \ h_1, h_2 \in H$;

3) $\cup_{h\in H} Z_h = E$.

Определение 3.2. *Скажем, что ортогональная статистическая структура* $\{E, S_1, \overline{\mu}_h, h \in H\}$ *допускает состоятельный критерий для проверки гипотезы, если существует хотя бы одно измеримое отображение*

$$\delta\colon (E, S_1) \longrightarrow (H, B(H))$$

такое, что

$$\overline{\mu}_h\big(\{x\colon \delta(x) = h\}\big) = 1 \quad \forall h \in H.$$

Пусть M^σ — действительное линейное пространство всех конечных знакопеременных мер на S.

Определение 3.3. *Линейное подмножество* $M_H \subset M^\sigma$ *называется гильбертовым пространством мер, если*:

1) *на* M_H *можно ввести скалярное произведение* (μ, ν), $\mu, \nu \in M_H$, *относительно которого* M_H *— гильбертово пространство, и для всех взаимно сингулярных мер* μ *и* ν, $\mu, \nu \in M_H$, *скалярное произведение* $(\mu, \nu) = 0$;

2) *если* $\nu \in M_H$ *и* $|f(x)| \leq 1$, *то*

$$\nu_f(A) = \int\limits_A f(x)\nu(dx) \in M_H,$$

где $f(x)$ *—* S*-измеримая действительная функция и* $(\nu_f, \nu_f) \leq (\nu, \nu)$;

3) *если* $\nu_n \in M_H$, $\nu_n \geq 0$, $\nu_n(E) < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$ *и* $\nu_n \downarrow 0$, *то* $\lim_{n\to\infty}(\nu_n, \mu) = 0$ *для любого* $\mu \in M_H$.

***Замечание* 3.1.** Понятие и соответствующее построение гильбертова пространства мер было введено и исследовано З. С. Зеракидзе в [5]. Там же была доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *Если* M_H *— гильбертово пространство мер, то существует семейство попарно ортогональных вероятностных мер* $\{\mu_h, \ h \in H\}$ *на* M_H *такое, что* M_H *— прямая сумма гильбертовых пространств* $H_2(\mu_h)$, *т. е.*

$$M_H = \bigoplus_{h\in H} H_2(\mu_h),$$

где $H_2(\mu_h)$ *— множество мер вида*

$$\nu(B) = \int\limits_B f(x)\mu_h(dx), \qquad \int\limits_E |f(x)|^2\mu_h(dx) < +\infty,$$

и скалярное произведение двух мер μ_{h_1} *и* μ_{h_2} (*из этого множества*), *соответствующих функциям* f_1 *и* f_2, *таково*:

$$(\mu_{h_1}, \mu_{h_2}) = \int\limits_E f_1(x)f_2(x)\mu_h(dx).$$

Обозначим через $F = F(M_H)$ множество действительных функций f таких, что $\int f(x)\overline{\mu}_h(dx)$ определен для любого $\overline{\mu}_h \in M_H$. Пусть $M_H = \oplus_{h\in H} H_2(\overline{\mu}_h)$ — гильбертово пространство мер, E — полное сепарабельное метрическое пространство, $S_1 = \cap_{h\in H}\operatorname{dom}(\overline{\mu}_h)$ — борелевская σ-алгебра в E и $\operatorname{card} H \le c$. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 3.2. *Для того чтобы ортогональная статистическая структура* $\{E, S_1, \overline{\mu}_h, h \in H\}$ *допускала состоятельный критерий для проверки гипотезы в теории* (ZFC) & (MA), *необходимо и достаточно, чтобы соответствие* $f \longleftrightarrow \psi_f$, $f \in F(M_H)$, *заданное формулой*

$$\int\limits_E f(x)\overline{\mu}_h(dx) = (\psi_f, \overline{\mu}_h) \quad \forall \overline{\mu}_h \in M_H,$$

было взаимно однозначным.

Доказательство. *Необходимость.* Существование состоятельного критерия для проверки гипотез $\delta\colon E \longrightarrow H$ означает, что $\overline{\mu}_h\big(\{x\colon \delta(x) = h\}\big) = 1\ \forall h \in H$. Обозначая $X_h = \{x\colon \delta(x) = h\}$ для $h \in H$, получаем:

1) $\overline{\mu}_h(X_h) = \overline{\mu}_h\big(\{x\colon \delta(x) = h\}\big) = 1\ \forall h \in H$;

2) $X_{h_1} \cap X_{h_2} = \varnothing$ для всех разных гипотез h_1 и h_2 из H, так как $\big(X_{h_1} = \{x\colon \delta(x) = h_1\}\big) \cap \big(X_{h_2} = \{x\colon \delta(x) = h_2\}\big) = \varnothing$;

3) $\cup_{h\in H} X_h = \{x\colon \delta(x) \in H\} = E$.

Поэтому статистическая структура $\{E, S_1, \overline{\mu}_h, h \in H\}$ сильно разделима, следовательно, существует семейство S_1-измеримых множеств $X_h,\ h \in H$, такое, что

$$\overline{\mu}_h(X_{h'}) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad h = h', \\ 0, & \text{если} \quad h \ne h'. \end{cases}$$

Функцию $I_{X_h}(x) \in F$ поставим в соответствие мере $\overline{\mu}_h \in H_2(\overline{\mu}_h)$. Тогда

$$\int I_{X_h}(x)\overline{\mu}_h(dx) = \int I_{X_h}(x)I_{X_h}(x)\overline{\mu}_h(dx) = (\overline{\mu}_h, \overline{\mu}_h).$$

Функцию $f_{\psi_1}(x) = f_1(x)I_{X_h}(x)$ поставим в соответствие мере $\psi_1 \in H_2(\overline{\mu}_h)$. Тогда для любого $\psi_2 \in H_2(\overline{\mu}_h)$

$$\int f_{\psi_1}(x)f_{\psi_2}(x)\overline{\mu}_h(dx) = \int f_1(x)f_2(x)I_{X_h}(x)I_{X_h}(x)\overline{\mu}_h(dx) =$$

$$= \int f_1(x)f_2(x)\overline{\mu}_h(dx) = (\psi_1, \psi_2).$$

Далее, функцию $f(x) = \sum_{h\in H_f} g_h(x) I_{X_h}(x) \in F$ поставим в соответствие мере $\nu \in M_H$, где $\nu = \sum_{h\in H_f} \int g_h(x)\overline{\mu}_h(dx)$. Тогда для каждой $\nu_1 \in M_H$ такой, что

$$\nu_1 = \sum_{h\in H_f} \int g_h^1(x)\overline{\mu}_h(dx),$$

имеем

$$\int f(x)\nu_1(dx) = \int \sum_{h\in H_f\cap H_{f_1}} g_h(x) g_h^1(x)\overline{\mu}_h(dx) =$$

$$= \sum_{h\in H_f\cap H_{f_1}} \int g_h(x) g_h^1(x)\overline{\mu}_h(dx) = (\nu_1, \nu).$$

Отсюда следует, что указанное выше соответствие каждой мере $\nu \in M_H$ сопоставляет некоторую функцию $f \in F(M_H)$. Если в $F(M_H)$ отождествлять функции, совпадающие по мере $\overline{\mu}_h,\ h \in H$, то соответствие между $F(M_H)$ и M_H будет взаимно однозначным.

Достаточность. Если $f \in F(M_H)$ соответствует мере $\overline{\mu}_h \in M_H$, для которой

$$\int f(x)\overline{\mu}_h(dx) = (\overline{\mu}_h, \overline{\mu}_h),$$

то для каждой $\overline{\mu}_h,\ \overline{\mu}_{h'} \in M_H$

$$\int f_h(x)\overline{\mu}_{h'}(dx) = (\overline{\mu}_h, \overline{\mu}_{h'}) = \int f_1(x) f_2(x)\overline{\mu}_h(dx) = \int f_h(x) f_2(x)\overline{\mu}_h(dx).$$

Таким образом, $f_h(x) = f_1(x)$ почти всюду относительно меры $\overline{\mu}_h$ и $f_h(x) > 0$,

$$\int f_h^2(x)\mu_h(dx) < +\infty.$$

Если $\mu_h^* = \int f_h\overline{\mu}_h(dx)$, то $\int f_h(x)\overline{\mu}_{h'}(dx) = (\overline{\mu}_h, \overline{\mu}_{h'}) = 0\ \forall h \neq h'$. С другой стороны, $\overline{\mu}_h(E \setminus X_h) = 0$, где $X_h = \{x\colon f_h(x) > 0\}$. Отсюда следует, что

$$\overline{\mu}_h(X_{h'}) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad h = h', \\ 0, & \text{если} \quad h \neq h', \end{cases}$$

поэтому статистическая структура $\{E, S_1, \overline{\mu}_h, h \in H\}$ слабо разделима. Представим семейство $\{\overline{\mu}_h, h \in H\}$, $\operatorname{card} H \leq c$, в виде инъюктивной последовательности $\{\overline{\mu}_h,\ h < \omega_1\}$, где через ω_1 обозначено первое ординальное число мощности множества H.

Поскольку статистическая структура $\{E, S_1, \overline{\mu}_h, h \in H\}$ слабо разделима, существует семейство S_1-измеримых множеств $\{X_h,\ h \in H\}$ такое, что для всех $h \in [0, \omega_1)$ имеем

$$\overline{\mu}_h(X_{h'}) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad h = h', \\ 0, & \text{если} \quad h \neq h'. \end{cases}$$

Определим ω_1 — последовательность Z_h частей пространства E — так, чтобы выполнялись следующие соотношения:

1) Z_h — борелевское подмножество в E для всех $h < \omega_1$;
2) $Z_h \subset X_h$ для всех $h < \omega_1$;
3) $Z_h \cap Z_{h'} = \varnothing$ для всех $h < \omega_1,\ h' < \omega_1,\ h \neq h'$;
4) $\overline{\mu}_h(Z_h) = 1$ для всех $h < \omega_1$.

Пусть $Z_{h_0} = X_{h_0}$. Предположим далее, что частичная последовательность $\{Z_{h'}\}_{h'<h}$ уже определена для $h < \omega_1$. Ясно, что $\mu^*(\cup_{h'<h} Z_{h'}) = 0$ (см. [4]). Таким образом, существует борелевское подмножество Y_h пространства E такое, что справедливы следующие соотношения:

$$\bigcup_{h'<h} Z_{h'} \subset Y_h, \quad \mu^*(Y_h) = 0.$$

Предполагая, что $Z_h = X_h \setminus Y_h$, строим ω_1 — последовательность $\{Z_h\}_{h<\omega_1}$ дизъюнктивных измеримых подмножеств пространства E. Поэтому $\overline{\mu}_h(Z_h) = 1$ для всех $h < \omega_1$ и статистическая структура $\{E, S_1, \overline{\mu}_h, h \in H\}$, $\operatorname{card} H \leq c$, сильно разделима, так как существует семейство элементов σ-алгебры $S_1 = \cap_{h\in H} \operatorname{dom}(\overline{\mu}_h)$ такое, что:

1) $\overline{\mu}_h(Z_h) = 1\ \forall h \in H$;
2) $Z_h \cap Z_{h'} = \varnothing$ для всех разных h и h' из H;
3) $\cup_{h\in H} Z_h = E$.

Для $x \in E$ положим $\delta(x) = h$, где h — единственная гипотеза из множества H, для которого $x \in Z_h$. Существование такой единственной гипотезы H можно доказать, используя условия 2, 3.

Пусть теперь $Y \in B(H)$. Тогда $\{x : \delta(x) \in Y\} = \cup_{h\in Y} Z_h$. Мы должны показать, что $\{x : \delta(x) \in Y\} \in \operatorname{dom}(\overline{\mu}_{h_0})$ для каждого $h_0 \in H$.

Если $h_0 \in Y$, то $\big\{x : \delta(x) \in Y\big\} = \cup_{h\in Y} Z_h = (Z_{h_0}) \cup (\cup_{h\in Y\setminus\{h_0\}} Z_h)$.

С одной стороны, из условий 1 – 3 следует, что

$$Z_{h_0} \in S_1 = \bigcap_{h\in H} \operatorname{dom}(\overline{\mu}_h) \subseteq \operatorname{dom}(\overline{\mu}_{h_0}).$$

С другой стороны, из условия

$$\bigcup_{h\in Y\setminus\{h_0\}} Z_h \subseteq (E \setminus Z_{h_0})$$

следует, что

$$\overline{\mu}_{h_0}\left(\bigcup_{h\in Y\setminus\{h_0\}} Z_h\right) = 0.$$

Из последнего равенства вытекает, что $\cup_{h\in Y\setminus\{h_0\}} Z_h \in \operatorname{dom}(\overline{\mu}_{h_0})$.

Поскольку $\operatorname{dom}(\overline{\mu}_{h_0})$ — σ-алгебра, имеем

$$\big\{x : \delta(x) \in Y\big\} = (Z_{h_0}) \cup \left(\bigcup_{h\in Y\setminus\{h_0\}} Z_h\right) \in \operatorname{dom}(\overline{\mu}_{h_0}).$$

Если $h_0 \notin Y$, то

$$\big\{x : \delta(x) \in Y\big\} = \bigcup_{h\in Y} Z_h \subseteq (E \setminus Z_{h_0}),$$

и мы заключаем, что $\overline{\mu}_{h_0}\big\{x : \delta(x) \in Y\big\} = 0$. Последнее соотношение означает, что

$$\big\{x : \delta(x) \in Y\big\} \in \operatorname{dom}(\overline{\mu}_{h_0}).$$

Таким образом, мы доказали справедливость соотношения

$$\{x : \delta(x) \in Y\} \in \mathrm{dom}(\overline{\mu}_{h_0})$$

для любого $h_0 \in H$. Следовательно,

$$\{x : \delta(x) \in Y\} \in \bigcap_{h \in H} \mathrm{dom}(\overline{\mu}_h) = S_1.$$

Поскольку $B(H)$ содержит все конечные подмножества H, заключаем, что

$$\overline{\mu}_h(x : \delta(x) = h) = \mu_h(Z_h) = 1.$$

***Пример* 3.1.** Пусть $E = R \times R$, $B(R \times R)$ — σ-алгебра борелевских множеств на $R \times R$. Пусть $H = R$ — множество гипотез, $B(R)$ — σ-алгебра борелевских множеств на R.

Рассмотрим множества следующего типа: $X_h = \{-\infty < x < +\infty,\ y = h,\ h \in R\}$, и пусть $\mu_h,\ h \in R,$ — линейные гауссовские меры

$$\mu_h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-h)^2}{2}\right\}$$

на соответствующих множествах $X_h,\ h \in R$.

Статистическая структура $\{R \times R, B(R \times R), \mu_h, h \in R\}$ — сильно разделимая континуальная статистическая структура. Для каждого $h \in R$ через $\overline{\mu}_h$ обозначим пополнение меры μ_h, а через $\mathrm{dom}(\overline{\mu}_h)$ — σ-алгебру всех $\overline{\mu}_h$-измеримых подмножеств $R \times R$.

Пусть

$$S_1 = \bigcap_{h \in R} \mathrm{dom}(\overline{\mu}_h)$$

— борелевская σ-алгебра. Тогда ясно, что статистическая структура $\{R \times R, S_1, \mu_h, h \in R\}$ — сильно разделимая континуальная статистическая структура, так как существует семейство элементов σ-алгебры S_1 такое, что:

1) $\cup_{h \in R}(Z_h) = R \times R$;

2) $Z_h \cap Z_{h'} = \varnothing$ для всех разных h и h' из R;

3) $\overline{\mu}_h(Z_h) = 1\ \forall h \in R$.

Для $x \in R \times R$ положим $\delta(x) = h$, где h — единственная гипотеза из множества R, для которого $x \in Z_h$. Покажем, что так определенное отображение $\delta : S_1 \to B(R)$ измеримо и $\overline{\mu}_h(\{x : \delta(x) = h\}) = 1\ \forall h \in R$, т. е. статистическая структура $\{R \times R, S_1, \overline{\mu}_h, h \in R\}$ допускает состоятельный критерий для проверки гипотезы.

Пусть теперь $Y \in B(R)$. Тогда $\{x : \delta(x) \in Y\} = \cup_{h \in R} Z_h$. Мы должны показать, что $\{x : \delta(x) \in Y\} \in \mathrm{dom}(\overline{\mu}_{h_0}),\ h_0 \in R$. Если $h_0 \in Y$, то $\{x : \delta(x) \in Y\} = \cup_{h \in R} Z_h = Z_{h_0} \cup \cup(\cup_{h \in Y \setminus \{h_0\}} Z_h)$. Ясно, что $Z_{h_0} \in S_1 \subseteq \mathrm{dom}(\overline{\mu}_{h_0})$, $\cup_{h \in Y \setminus \{h_0\}} Z_h \subseteq (R \times R \setminus Z_{h_0})$. Из последнего выражения вытекает, что $\overline{\mu}_{h_0}(\cup_{h \in Y \setminus \{h_0\}} Z_h) = 0$.

Таким образом, $\cup_{h \in Y \setminus \{h_0\}} Z_h \in \mathrm{dom}(\overline{\mu}_{h_0})$ и, следовательно,

$$\{x : \delta(x) \in Y\} \in \mathrm{dom}(\overline{\mu}_{h_0}).$$

Если $h_0 \notin Y$, то

$$\{x : \delta(x) \in Y\} = \bigcup_{h \in Y} Z_h \subseteq (E \setminus Z_{h_0})$$

и

$$\overline{\mu}_{h_0}(\{x : \delta(x) \in Y\}) = 0.$$

Поэтому $\{x\colon \delta(x)\in Y\}\in \mathrm{dom}(\overline{\mu}_{h_0})\ \forall h_0\in R$. Следовательно,

$$\{x\colon \delta(x)\in Y\}\in \bigcap_{h\in R}\mathrm{dom}(\overline{\mu}_h)=S_1.$$

Таким образом, $\delta\colon (R\times R,S_1)\to (R,B(R))$ — измеримое отображение и

$$\overline{\mu}_h\big(\{x\colon \delta(x)=h\}\big)=1\quad \forall h\in R,$$

т. е. статистическая структура $\{R\times R,S_1,\overline{\mu}_h,h\in R\}$ допускает состоятельный критерий для проверки гипотезы.

***Пример* 3.2.** Пусть $t=(t_1,\ldots,t_n)\in T$, T — некоторое ограниченное подмножество n-мерного евклидова пространства R^n; $\xi_h(t),\ h\in R,$ — действительные однородные гауссовские поля на T; $M\xi_h(t)=0$; $M\xi_h(t)\ \xi_h(s)=R_h(t-s)$; $\mu_h,\ h\in R,$ — меры, соответствующие полям $\xi_h(t),\ h\in R,$ т. е. задана гауссовская однородная статистическая структура $\{E,S,\mu_h,h\in R\}$. Предполагается, что случайные поля $\xi_h(t),\ h\in R,$ имеют спектральные плотности $f_h(\lambda)$, $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\in R^n,\ h\in R,$ так что для функции $R(t,s)=R_{h''}(t-s)-R_{h'}(t-s)$, $h^{'},h^{''}\in R$, справедливо равенство

$$R(t,s)=\int\limits_{R^n} e^{i(\lambda,t-s)}\big[f_{h''}(\lambda)-f_{h'}(\lambda)\big]d\lambda,$$

где $(\lambda,\tau)=\lambda_1\tau_1+\lambda_2\tau_2+\ldots+\lambda_n\tau_n$, а $d\lambda=d\lambda_1 d\lambda_2\ldots d\lambda_n$.

Приведем условия ортогональности мер $\mu_{h'}$ и $\mu_{h''}$, $h^{'}\neq h^{''}$, $h^{'},h^{''}\in R$. Пусть $u>0$, $U=\{t\colon -u\le t_1\le u,\ldots,-u\le t_n\le u\}\subset T$. Предположим, что выполняется неравенство

$$f_{h'}(\lambda)g(\lambda)\le C=\mathrm{const}<\infty,$$

где

$$g(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}(1+\lambda^2)^{e_j},$$

а e_j — неотрицательные целые числа. Кроме того, будем предполагать, что $f_{h''}(\lambda)\ge f_{h'}(\lambda)$. Определим функцию $F(\lambda)$ равенством $F(\lambda)=f_{h''}(\lambda)-f_{h'}(\lambda)$. Известно (см. [10]), что если

$$\int\limits_{R^n}\int\limits_{R^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{\sin^2(\lambda_j-\mu_j)}{(\lambda_j-\mu_j)^2}g(\lambda)g(\mu)F(\lambda)F(\mu)d\lambda d\mu=\infty,$$

то меры $\mu_{h'}$ и $\mu_{h''}$ ортогональны.

Мы будем предполагать, что последнее условие выполняется для любых $h^{'}$ и $h^{''}$, $h^{'}\neq h^{''}$, $h^{'},\ h^{''}\in R$, т. е. меры $\{\mu_h,h\in R\}$ попарно ортогональны.

Таким образом, $\{E,S,\mu_h,h\in R\}$ — ортогональная однородная гауссовская статистическая структура. Пусть $g_h(x)$ — действительные S-измеримые функции, M_Y — множество мер ν вида

$$\nu(B)=\sum_{h\in A_1}\int\limits_B g_h(x)\mu_h(dx)\quad \forall B\in S,$$

где $A_1\subset R$ — некоторое счетное подмножество из R и

$$\sum_{h\in A_1}\int\limits_E |g_h(x)|^2\mu_h(dx)<\infty.$$

Положим

$$(\nu_1,\nu_2)=\sum_{h\in A_1\cap A_2}\int\limits_E g_h^1(x)g_h^2(x)\mu_h(dx)<\infty,$$

где

$$\nu_i(B)=\sum_{h\in A_i}\int_B g_h^i(x)\mu_h(dx),\quad i=1,2.$$

Легко показать (см. [5]), что M_H — гильбертово пространство мер и $M_H=\oplus_{h\in R}H_2(\mu_h)$, где $H_2(\mu_h)$ — множество мер вида

$$\int\limits_B f(x)\mu_h(dx)\quad \forall B\in S\quad \text{с}\quad \int\limits_E |f(x)|^2\mu_h(dx)<\infty.$$

Для каждого $h\in R$ обозначим через $\overline{\mu}_h$ пополнение меры μ_h, а через $\mathrm{dom}(\overline{\mu}_h)$ σ-алгебру всех $\overline{\mu}_h$-измеримых подмножеств E. Обозначим через $F=F(M_H)$ множество действительных функций f таких, что $\displaystyle\int f(x)\overline{\mu}_h(dx)$ определен для любого $\overline{\mu}_h\in M_H$. Пусть $M_H=\oplus_{h\in R}H_2(\overline{\mu}_h)$ — гильбертово пространство мер, E — полное сепарабельное метрическое пространство, $S_1=\cap_{h\in R}\mathrm{dom}(\overline{\mu}_h)$ — борелевская σ-алгебра в E и $\mathrm{card}\,H\le c$.

Тогда для ортогональной однородной гауссовской статистической структуры $\{E,S_1,\overline{\mu}_h,h\in\in R\}$ справедлива теорема 3.2.

***Замечание* 3.2.** Если при доказательстве достаточности в теореме 3.2 отказаться от условия, что S_1 — борелевская σ-алгебра в E, то ортогональная статистическая структура $\{E,S_1,\overline{\mu}_h,h\in R\}$ будет только слабо разделимой (см. [5]). Если S_1 является борелевской, то ортогональная статистическая структура $\{E,S_1,\overline{\mu}_h,h\in H\}$, $\mathrm{card}\,H\le c$, будет сильно разделимой и, кроме того, эта статистическая структура допускает состоятельные критерии для проверки гипотез (см. пример 3.1).

***Замечание* 3.3.** Если дана какая-либо сильно разделимая (в смысле определения 3.1) статистическая структура $\{E,S,\mu_h,h\in H\}$, $\mathrm{card}\,H\le c$, то $\{E,S_1,\overline{\mu}_h,h\in H\}$, $\mathrm{card}\,H\le c$, — сильно разделимая статистическая структура, допускающая состоятельные критерии для проверки гипотез (см. пример 3.1).

Легко доказывается следующая теорема.

Теорема 3.3. *Пусть $M_H=\oplus_{i=1}^{\infty}H_2(\mu_{h_i})$ — гильбертово пространство мер. Тогда для того чтобы ортогональная статистическая структура $\{E,S,\mu_{h_i},i\in N\}$ допускала состоятельные критерии для проверки гипотез в теории (ZF), необходимо и достаточно, чтобы соответствие $f\longleftrightarrow\psi_f$, $f\in F(M_H)$, заданное равенством*

$$\int f(x)\mu_h(dx)=(\psi_f,\mu_h)\quad\forall\mu_h\in M_H,$$

было взаимно однозначным.

***Замечание* 3.4.** Аналогично методам, использованным при доказательстве теоремы 3.2, доказывается следующая теорема.

Теорема 3.4. *Пусть E — полное метрическое пространство, топологический вес которого неизмерим в широком смысле* (*см.* [3]), *и $M_H = \oplus_{h\in H} H_2(\overline{\mu}_h)$ — гильбертово пространство мер. Тогда для того чтобы ортогональная статистическая структура $\{E, S_1, \overline{\mu}_h, h \in H\}$* (*где $S_1 = \cap_{h\in H} \operatorname{dom}(\overline{\mu}_h)$ — борелевская σ-алгебра в E и $\operatorname{card} H \leq c$*) *допускала состоятельные критерии для проверки гипотез в теории (ZFC) & (MA), необходимо и достаточно, чтобы соответствие $f \longleftrightarrow \psi_f$, $f \in F(M_H)$, заданное равенством*

$$\int f(x)\overline{\mu}_h(dx) = (\psi_f, \overline{\mu}_h) \quad \forall \overline{\mu}_h \in M_H,$$

было взаимно однозначным.

***Замечание* 3.5.** Необходимость в теореме 3.4 доказывается так же, как и в теореме 3.2. При доказательстве достаточности в теореме 3.4 мы используем следующие леммы.

Лемма 3.1 [4]. *Пусть (E, ρ) — полное сепарабельное метрическое пространство. Пусть $\{E, S, \mu_h, h \in H\}$, $\operatorname{card} H \leq c$, — борелевская слабо разделимая статистическая структура. В теории (ZFC) & (MA) статистическая структура $\{E, S, \mu_h, h \in H\}$ сильно разделима.*

Лемма 3.2 [3]. *Пусть (E, ρ) — полное метрическое пространство, топологический вес которого неизмерим в широком смысле. Пусть μ — вероятностная мера, заданная на борелевской σ-алгебре подмножеств пространства E. Тогда мера μ сосредоточена на счетном объединении компактных подмножеств пространства E $\big($т. е. у меры μ найдется сепарабельный носитель F в пространстве $(E, \rho)\big)$.*

Предложение 3.1 [7]. *Пусть (E, ρ) — полное метрическое пространство, топологический вес которого неизмерим в широком смысле. Пусть $\{E, S, \mu_h, h \in H\}$, $\operatorname{card} H \leq c$, — борелевская слабо разделимая статистическая структура. Тогда в теории (ZFC) & (MA) статистическая структура $\{E, S, \mu_h, h \in H\}$ сильно разделима.*

4. Выводы. I. $(CC) \Longrightarrow (SS) \Longrightarrow (S) \Longrightarrow (WS) \Longrightarrow (O)$ (см. теорему 2.2).

II. $(SS) \Longrightarrow (CC)$ (см. теорему 3.2).

III. Статистическая структура $\big\{[0,1]\times[0,1],\ S,\ l_h,\ h \in [0,1]\cup[2,3]\big\}$ разделима (S), но не допускает состоятельные критерии (CC) для проверки гипотез $(S) \not\Rightarrow (CC)$ (см. пример 2.2).

Действительно, пусть множество гипотез $H = [0,1]\cup[2,3]$. Предположим, что существует состоятельный критерий для проверки гипотезы $\delta\colon \big\{[0,1]\times[0,1],\ S,\ l_h,\ h \in [0,1]\cup[2,3]\big\} \to \to (H, B(H))$. Рассмотрим измеримое множество $A_1 = \big\{x\colon \delta(x) \in [0,1]\big\}$. Линейная мера Лебега множества $A_1 \cap \big\{[0,1]\times\{y\}\big\}$ равна единице для любого $y \in [0,1]$. Следовательно, по теореме Фубини плоская мера Лебега множества A_1 также равна единице. Ясно, что то же самое справедливо для множества $A_2 = \big\{x\colon \delta(x) \in [2,3]\big\}$. Но множества A_1 и A_2 не пересекаются и оба лежат в квадрате $[0,1]\times[0,1]$, а это противоречит тому факту, что оба имеют меру, равную мере квадрата.

IV. Для счетной ортогональной статистической структуры $\{E, S, \mu_{h_i}, i \in N\}$ имеем $(O) \Longrightarrow \Longrightarrow (WS) \Longrightarrow (S) \Longrightarrow (SS) \Longrightarrow (CC)$ (см. теорему 2.4 и пример 2.5).

V. Пусть E — полное сепарабельное метрическое пространство, $M_H = \oplus_{h\in H} H_2(\overline{\mu}_h)$ — гильбертово пространство мер и $S_1 = \cap_{h\in H} \operatorname{dom}(\overline{\mu}_h)$, $\operatorname{card} H \leq c$. Тогда борелевская ортогональная статистическая структура $\{E, S_1, \overline{\mu}_h, h \in H\}$, $\operatorname{card} H \leq c$, допускает состоятельный критерий для проверки гипотезы, т. е. $(O) \Longrightarrow (WS) \Longrightarrow (S) \Longrightarrow (CC)$ (см. теоремы 3.2, 3.4 и пример 3.1).

VI. Если статистическая структура $\{E, S, \mu_h, h \in H\}$, $\operatorname{card} H = c$, сильно разделима, то сильно разделимая статистическая структура $\{E, S_1, \overline{\mu}_h, h \in H\}$ (где S_1 не обязательно является борелевским) допускает состоятельный критерий для проверки гипотезы.

Действительно, в силу сильной разделимости статистической структуры $\{E, S, \mu_h, h \in \in H\}$, $\operatorname{card} H = c$, существует семейство S_1-измеримых множеств X_h, $h \in H$, такое, что: 1) $\cup_{h\in H}(X_h) = E$; 2) $X_{h'} \cap X_{h''} = \varnothing \ \forall h' \neq h''$, $h', h'' \in H$; 3) $\overline{\mu}_h(X_h) = 1 \, \forall h \in H$. Для $x \in X_h$ положим $\delta(x) = h$. Тогда отображение $\delta\colon (E, S_1) \to (H, B(H))$ измеримо (что доказывается аналогично доказательству теоремы 3.2) и $\overline{\mu}_h(\{x\colon \delta(x) = h\}) = 1 \, \forall h \in H$.

Литература

1. *Ибрамхалилов И. Ш., Скороход А. В.* Состоятельные оценки параметров случайных процессов. – Киев: Наук. думка, 1980.
2. *Jech T.* Set theory. – Berlin: Springer-Verlag, 2003.
3. *Харазишвили А. Б.* Топологические аспекты теории меры. – Киев: Наук. думка, 1984.
4. *Зеракидзе З. С.* О слабо разделимых и разделимых семействах вероятностных мер // Сообщ. АН ГССР. – 1984. – **113**, № 2. – С. 273 – 275.
5. *Зеракидзе З. С.* Гильбертовое пространство мер // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 2. – С. 147 – 153.
6. *Zerakidze Z., Mumladze M.* Statistical structures and consistent criteria for checking hypotheses. – Saarbrucken, Deutschland: Lambert Acad. Publ., 2015.
7. *Pantsulaia G.* On orthogonal families of probability measures // Trans. GP. – 1989. – **1**, № 8. – P. 106 – 112.
8. *Pantsulaia G.* On separation properties for families of probability measures // Georg. Math. J. – 2003. – **10**, № 2. – P. 335 – 341.
9. *Zerakidze Z., Purtukhia O.* The weakly consistent, strongly consistent and consistent estimates of the parameters // Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math. – 2017. – **31**. – P. 151 – 154.
10. *Краснитский С. Н.* Об условиях эквивалентности и ортогональности мер, соответствующих однородным гауссовским полям // Теория вероятностей и ее применения. – 1973. – **18**, № 3. – С. 615 – 621.

Получено 30.10.18,
после доработки — 20.02.19