УДК 517.5

В. В. Савчук (Ін-т математики НАН України, Київ),
С. О. Чайченко (Донбас. держ. пед. ун-т, Слов'янськ),
М. В. Савчук (Ін-т підготовки кадрів держ. служби зайнятості України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ ОБМЕЖЕНИХ ГОЛОМОРФНИХ І ГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ СЕРЕДНІМИ ФЕЙЄРА

We compute the exact values of the exact upper bounds on the classes of bounded holomorphic and harmonic functions in a unit disk for the remainders in a Voronovskaya-type formula in the case of approximation by Fejér means. We also present some consequences that are of independent interest.

Обчислено значення точних верхніх меж на класах обмежених голоморфних і гармонічних функцій в одиничному крузі для залишкових членів у формулі типу Вороновської у випадку наближень середніми Фейєра. Наведено ряд наслідків, що мають самостійний інтерес.

1. Нехай f — функція, голоморфна у крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, і

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k z^k, \qquad \widehat{f}_k := \frac{f^{(k)}(0)}{k!},$$

— її розклад у ряд Тейлора.

Середніми Фейєра $\sigma_n(f)$ степеня $n-1$, $n \in \mathbb{N}$, функції f називається многочлен

$$\sigma_n(f)(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \widehat{f}_k z^k.$$

Покладемо $\sigma_0(f) = 0$.

Нехай $r \geq 0$. Розглянемо клас B^r, який складається з голоморфних у $\mathbb{D}$ функцій f вигляду

$$f(z) = P_{[r]-1}(z) + z^{[r]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k - \{r\} + 1)}{(k + [r])!} \widehat{g}_k z^k, \tag{1}$$

де $P_{[r]-1}$ — алгебраїчний многочлен степеня $[r]-1$ ($P_{-1} := 0$), $[r]$ і $\{r\}$ — відповідно ціла і дробова частини числа r, а $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{g}_k z^k$ — функція, голоморфна в $\mathbb{D}$, для якої

$$\|g\|_\infty := \sup_{z \in \mathbb{D}} |g(z)| \leq 1.$$

Функція g в зображенні (1) при дробових r є дробовою похідною в розумінні Рімана–Ліувілля функції f, тобто

$$g(z) = f^{(r)}(z) := \sum_{k=[r]}^{\infty} \frac{k!}{\Gamma(k - r + 1)} \widehat{f}_k z^{k-[r]},$$

а при натуральних r — звичайною r-ю похідною.

Позначимо $B = B^0$.

С. Б. Стєчкін [1] показав, що при натуральних $r \geq 2$ для функцій із класу B^r співвідношення

$$f(z) - \sigma_n(f)(z) = \frac{z}{n} f'(z) + O\left(\frac{1}{n^r}\right) \tag{2}$$

справджується для всіх $n \geq r - 1$ рівномірно відносно $z \in \overline{\mathbb{D}}$ і рівномірно відносно всього класу B^r.

У роботі [2] показано, що співвідношення

$$f(z) - \sigma_n(f)(z) = \frac{z}{n} f'(z) + O\left(\frac{|z|^n}{n}\right) \tag{3}$$

справджується для всіх $n \in \mathbb{N}$ рівномірно відносно $z \in \overline{\mathbb{D}}$ і рівномірно відносно всього класу B^1.

Співвідношення (2) і (3), по суті, є твердженнями типу теореми Вороновської для методу наближення Фейєра (див., наприклад, [3, с. 452; 4, с. 206]). Їх також можна розглядати як асимптотичні розклади першого порядку для $f - \sigma_n(f)$ відносно параметра n на класі B^r, $r \in \mathbb{N}$, при $z \in \mathbb{D}$. У випадку, коли $|z| = 1$, співвідношення (3) вже не може бути асимптотичним розкладом і формально перетворюється в нерівність

$$|f(z) - \sigma_n(f)(z)| \leq C \frac{|z|}{n}, \tag{4}$$

яка справджується для всіх $f \in B^1$, $n \in \mathbb{N}$ і $z \in \overline{\mathbb{D}}$ з абсолютною сталою C.

А. Зигмунд [5] уперше встановив цей факт, показавши, що (4) справджується зі значенням $C = \pi + 2/\pi$. Згодом С. Б. Стєчкін [1] показав, що (4) має місце при $C = 3$, а в [6] показано, що в (4) можна покласти $C = 2$.

Зрозуміло також, що $C \geq 1$ (у цьому легко переконатися, взявши, наприклад, функцію $f(z) = z$). У роботах [2, 7] описано підкласи функцій з B^1, для яких співвідношення (4) справджується зі сталою $C = 1$ для всіх $z \in \overline{\mathbb{D}}$ і $n \in \mathbb{N}$. Зокрема, в [7] показано, що для всіх натуральних $r \geq 2$

$$\max_{f \in B^r_\theta} |f(z) - \sigma_n(f)(z)| = \frac{|z|}{n} \qquad \forall z \in \overline{\mathbb{D}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

де B^r_θ — клас голоморфних у $\mathbb{D}$ функцій f, для яких

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \left| \frac{\partial^r}{\partial \theta^r} f(\rho e^{i\theta}) \right| \leq 1, \qquad z = \rho e^{i\theta}.$$

З'ясуємо тепер, яку максимальну похибку наближення мають середні Фейєра на класі B. Для цього розглянемо клас K голоморфних у $\mathbb{D}$ функцій f, які зображуються інтегралами типу Коші вздовж одиничного кола $\mathbb{T} := \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$

$$f(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(t)}{1 - \bar{t}z} \, dm(t), \tag{5}$$

зі щільностями $\varphi\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, для яких $\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T})} := \operatorname{ess\,sup}_{t\in\mathbb{T}} |\varphi(t)| \le 1$.

Нескладно зрозуміти, що $B \subset K$.

В роботі [8] доведено, що для будь-яких $z \in \mathbb{D}$ і $n \in \mathbb{N}$

$$\max_{f\in K} |f(z) - \sigma_n(f)(z)| = \frac{2|z|}{\pi n}\frac{1-|z|^{2n}}{1-|z|^2}\mathbf{K}(|z|^n), \tag{6}$$

де

$$\mathbf{K}(\rho) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-\rho^2\sin^2 x}}$$

— повний еліптичний інтеграл першого роду.

Хоча, як показано у [8], екстремальна функція f^*, тобто та, для якої досягається максимум у лівій частині (6), є єдиною з точністю до унімодулярного множника і належить $K \setminus B$, при фіксованому $z \in \mathbb{D}$ і $n \to \infty$ співвідношення (6) є асимптотично точним і на підкласі $B \subset K$.

Справді, скориставшись розкладом

$$\frac{2}{\pi}\mathbf{K}(\rho) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^2\rho^{2k} \quad \forall \rho \in [0,1),$$

з рівності (6) одержимо співвідношення

$$\sup_{f\in B} |f(z) - \sigma_n(f)(z)| \le \frac{|z|}{n}\frac{1-|z|^{2n}}{1-|z|^2} + O\big(|z|^{2n}\big), \qquad z\in\mathbb{D}, \quad n\to\infty, \tag{7}$$

в якому залишковий член є рівномірно обмеженим відносно n, але необмеженим при $|z| \to 1-$.

Переконаємося, що у співвідношенні (7) при $n \to \infty$ насправді має місце знак рівності. Для цього зафіксуємо $z \in \mathbb{D}$ і розглянемо функцію

$$f(t) = \frac{t-z}{1-t\overline{z}},$$

яка, очевидно, належить класу B.

Нескладно перевірити, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$

$$f(z) - \sigma_n(f)(z) = -\sigma_n(f)(z) =$$
$$= z - z(1-|z|^2)\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)|z|^{2(k-1)} = \frac{z}{n}\frac{1-|z|^{2n}}{1-|z|^2}.$$

Отже, у співвідношенні (7) строгої нерівності бути не може.

Основна мета цієї роботи — знайти точне значення величини

$$\sup_{f\in K}\left|f(z) - \sigma_n(f)(z) - \frac{z}{n}f'(z)\right|$$

для кожного фіксованого натурального n і $z \in \mathbb{D}$.

У п. 2, як наслідки з основного результату — теореми 1, одержано аналог співвідношення (2) для функцій класу B^r при всіх $r \geq 0$. До того ж дано конструктивну характеристику класу B^1 у термінах наближення середніми Фейєра.

Також отримано асимптотичний розклад першого порядку відносно n для величини

$$\sup_{f \in B^r} |f(z) - \sigma_n(f)(z)|, \qquad r \geq 0, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Зокрема, з'ясовано, що залишковий член у (7) можна замінити величиною, рівномірно обмеженою відносно z у замкненому крузі $\overline{\mathbb{D}}$.

Ми показали (теорема 2), що нерівність (4) при значеннях $|z| \leq (3 - \sqrt{3})/2$ виконується зі сталою $C = 1$ для всіх функцій із класу B^1 і всіх натуральних n.

Запропонований метод доведення результатів п. 2, який базується на лемі 1, є цілісним і має певну універсальність. Із відповідним пристосуванням він є ефективним і у випадку наближення обмежених гармонічних функцій середніми Фейєра їхніх рядів Фур'є.

З цієї причини, як підтвердження слів про цілісність методу в комплексному і дійсному випадках, у п. 3 наведено аналоги результатів із п. 2 для дійснозначних гармонічних у $\mathbb{D}$ функцій. Результати п. 3 мають також самостійний інтерес. Вони є новими і з точки зору наближення класів згорток неперервних 2π-періодичних функцій (на дійсній осі $\mathbb{R}$) з ядром Пуассона середніми Фейєра їхніх рядів Фур'є.

Найновіші огляди результатів за цією тематикою можна знайти в [9, 10] (див. також [11], гл. XII).

2. Результати цього пункту — це наслідки теореми 1, яка має самостійний інтерес також з точки зору екстремальних задач на класах K і B.

Теорема 1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $z \in \mathbb{D}$. Тоді*

$$\max_{f \in K} \left| f(z) - \sigma_n(f)(z) - \frac{z}{n} f'(z) \right| = \frac{|z|^{n+1}}{n(1 - |z|^2)} \tag{8}$$

і

$$\max_{f \in B} \left| (1 - |z|^{2n}) f(z) - \sigma_n(f)(z) \right| = \frac{|z|}{n} \frac{1 - |z|^{2n}}{1 - |z|^2}. \tag{9}$$

При $z \neq 0$ максимуми у (8) і (9) досягаються для єдиних з точністю до унімодулярного множника функцій

$$f_1(t) = t^n \frac{z - t}{1 - t\overline{z}}$$

і

$$f_2(t) = \frac{t - z}{1 - t\overline{z}}$$

відповідно.

***Зауваження* 1.** Оскільки $B \subset K$, а екстремальна у (8) функція f_1 належить B, максимум у лівій частині (8) по класу K можна замінити максимумом по класу B, не порушивши при цьому рівність.

Нехай, як зазвичай, H^∞ позначає банахів простір обмежених голоморфних у $\mathbb{D}$ функцій із нормою $\|\cdot\|_\infty$. За теоремою Фату (див., наприклад, [12, c. 74]) кожна функція f із простору H^∞ має майже скрізь на колі $\mathbb{T}$ кутові граничні значення, що утворюють вимірну істотно обмежену функцію, яку позначатимемо теж f. За принципом максимуму для будь-якої функції $f \in H^\infty$ норма $\|f\|_\infty$ реалізується на її кутових граничних значеннях, тобто $\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$. Таким чином, H^∞ можна розглядати як підпростір простору $L^\infty(\mathbb{T})$ вимірних істотно обмежених на $\mathbb{T}$ функцій, наділеного нормою $\|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$.

***Зауваження* 2.** Для даної функції $\varphi\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, $\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \le 1$, фактор-клас $\varphi + \overline{H}_0^\infty$, де $\overline{H}_0^\infty = \{h\colon \overline{h} \in H^\infty, h(0) = 0\}$, породжує за формулою (5) одну і ту ж функцію f із класу K. В доведенні теореми 1 буде показано, що екстремальна функція f_1 єдина не лише у класі K, але й єдина (з точністю до унімодулярного множника) у фактор-просторі $L^\infty(\mathbb{T})/\overline{H}_0^\infty$ екстремальна функція з нормою не більшою ніж 1.

***Зауваження* 3.** Рівність (9) справджується і при $z \in \mathbb{T}$, а саме, набирає вигляду

$$\max_{f\in B} |\sigma_n(f)(z)| = 1 \quad \forall z \in \mathbb{T},$$

що збігається зі знаменитим результатом Л. Фейєра і Е. Ландау (див., наприклад, [13]).

Доведення теореми 1 спирається на дві леми, перед формулюванням яких нагадаємо такий факт.

Кожна голоморфна функція f із простору Гарді H^q, $q \ge 1$, тобто така, що

$$\|f\|_q := \sup_{\rho\in[0,1)} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(\rho t)|^q \, dm(t) \right)^{1/q} < \infty,$$

де $dm(t) = dt/(2\pi i t)$ — нормована міра Лебега на колі $\mathbb{T}$, має майже скрізь на $\mathbb{T}$ кутові граничні значення f, які утворюють функцію з лебегового простору $L^q(\mathbb{T})$, і до того ж

$$\|f\|_q = \|f\|_{L^q(\mathbb{T})} := \left(\int_{\mathbb{T}} |f|^q dm \right)^{1/q}.$$

Лема 1. *Нехай* $f \in H^1$, $n \in \mathbb{Z}_+$ *і* $z \in \mathbb{D}$. *Тоді*:

1) *для будь-яких* $k \in \mathbb{Z}_+$, $k \le n$, *і будь-якої функції* $g \in H^1$

$$n(f(z) - \sigma_n(f)(z)) - zf'(z) = -z^{n+1} \int_{\mathbb{T}} \left(t^k \overline{g(t)} + f(t) \right) \overline{t}^n \frac{\overline{t} - \overline{z}}{1 - \overline{t}z} \frac{1}{|1 - \overline{t}z|^2} \, dm(t); \tag{10}$$

2) *справджується рівність*

$$n \left((1 - |z|^{2n}) f(z) - \sigma_n(f)(z) \right) = z \int_{\mathbb{T}} f(t) \frac{\overline{t} - \overline{z}}{1 - \overline{t}z} \frac{|1 - \overline{t}^n z^n|^2}{|1 - \overline{t}z|^2} \, dm(t). \tag{11}$$

Доведення. Твердження є тривіальним при $z = n = 0$. Тому далі вважаємо, що $z \neq 0$ і $n \neq 0$.

Виберемо довільну функцію $g \in H^1$ і розглянемо функцію

$$G_k(t) := g(t)t^{n-k}\frac{t-z}{1-t\overline{z}}.$$

Зрозуміло, що $G_k \in H^1$ і $G_k(z) = 0$. Тому за формулою Пуассона

$$0 = \frac{G_k(z)}{1-|z|^2} = \int\limits_{\mathbb{T}} G_k(t)\frac{dm(t)}{|1-\overline{t}z|^2} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}} \overline{t}^k g(t)t^n \frac{t-z}{1-t\overline{z}}\frac{dm(t)}{|1-\overline{t}z|^2}. \tag{12}$$

Отже, інтеграл у правій частині (10) не залежить ні від k, ні від g.

Далі, нехай

$$S_l(f)(z) = \sum_{j=0}^{l-1} \widehat{f}_j z^j$$

— частинна сума порядку $l-1$, $l \in \mathbb{N}$, ряду Тейлора функції f. Оскільки

$$\sigma_n(f)(z) = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} S_l(f)(z)$$

і за формулою Коші

$$f(z) - S_l(f)(z) = z^l \int\limits_{\mathbb{T}} f(t)\frac{\overline{t}^l}{1-\overline{t}z}\,dm(t),$$

то

$$f(z) - \sigma_n(f)(z) = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\left(f(z) - S_l(f)(z)\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\int\limits_{\mathbb{T}} f(t)\sum_{l=1}^{n} z^l\overline{t}^l\frac{dm(t)}{1-\overline{t}z} = \frac{z}{n}\int\limits_{\mathbb{T}} f(t)\overline{t}\frac{1-z^n\overline{t}^n}{(1-\overline{t}z)^2}\,dm(t), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{13}$$

Врахувавши, що

$$f'(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} f(t)\frac{\overline{t}}{(1-\overline{t}z)^2}\,dm(t) \quad \forall z \in \mathbb{D}, \tag{14}$$

і

$$\frac{\bar{t}}{(1-\bar{t}z)^2} = \frac{\bar{t}-\bar{z}}{1-\bar{t}z}\frac{1}{|1-\bar{t}z|^2} \qquad \forall t \in \mathbb{T}, \quad z \in \mathbb{D},$$

із формул (13), (12) одержимо рівність (10).

Для доведення рівності (11) достатньо застосувати формулу (13) до функції $F(t) = f(t)(1 - \bar{z}^n t^n)$ і врахувати, що $\sigma_n(F) = \sigma_n(f)$.

Нехай тепер $n = 0$ і $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Тоді рівність (11) є тривіальною, а (10) з урахуванням співвідношень (12), (14) набирає вигляду

$$zf'(z) = z \int\limits_{\mathbb{T}} \left(\overline{g(t)} + f(t)\right) \frac{\bar{t}-\bar{z}}{1-\bar{t}z}\frac{1}{|1-\bar{t}z|^2}\, dm(t).$$

Функція $I : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ називається внутрішньою, якщо вона є голоморфною в $\mathbb{D}$, а її радіальні граничні значення на колі $\mathbb{T}$ породжують функцію (за якою залишаємо те саме позначення I) таку, що $|I| = 1$ майже скрізь на $\mathbb{T}$. Функція $p\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ називається знакосталою на $\mathbb{T}$, якщо $p \le 0$ або $p \ge 0$ майже скрізь на $\mathbb{T}$.

Позначимо

$$H_0^q := \{f \in H^q\colon f(0) = 0\}.$$

Лема 2. *Нехай функція p є знакосталою на $\mathbb{T}$ і I — внутрішня функція. Тоді*

$$\min_{h \in H_0^1} \left\|\bar{I}p + h\right\|_{L^1(\mathbb{T})} = \|p\|_{L^1(\mathbb{T})},$$

а мінімум досягається для единої функції $h \equiv 0$.

Це твердження є компіляцією двох тверджень з роботи [14] (див. теорему 1 і нерівність (14) у [14]).

***Доведення теореми* 1.** Зауважимо спочатку, що $K \subset UH^2$, де UH^2 — одинична куля у просторі H^2. Справді, нехай функція f належить K і має вигляд (5). Тоді

$$\widehat{f}_k = \int\limits_{\mathbb{T}} \varphi(t)\bar{t}^k dm(t), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

і, як наслідок цього, за рівністю Парсеваля

$$\|f\|_2^2 = \sup_{\rho \in [0,1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left|\widehat{f}_k\right|^2 \rho^{2k} \le \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \le \|\varphi\|^2_{L^\infty(\mathbb{T})} \le 1.$$

Отже, функція f із класу K має майже скрізь на $\mathbb{T}$ кутові граничні значення $f \in L^2(\mathbb{T})$. До цього зауважимо, що для інтеграла типу Коші функції $g := \overline{\varphi - f} \in L^2(\mathbb{T})$ справджуються рівності

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{g(t)}{1-\bar{t}z} dm(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\widehat{\varphi}_{-k}} z^k, & |z| < 1, \\ 0, & |z| > 1, \end{cases}$$

де

$$\widehat{\varphi}_{-k} := \int\limits_{\mathbb{T}} \varphi(t) t^k dm(t).$$

Отже, за теоремою Голубєва – Привалова функція g збігається майже скрізь на $\mathbb{T}$ з кутовими граничними значеннями деякої функції з UH^2.

Тому до функції f можна застосувати формулу (10), в якій $k = 0$ і $\overline{g} = \varphi - f + \overline{h}$, а h — довільна функція з H_0^∞. На основі такої формули (10) одержимо низку нерівностей

$$\left| f(z) - \sigma_n(f)(z) - \frac{z}{n} f'(z) \right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{n} \int\limits_{\mathbb{T}} \left| \left(\varphi(t) + \overline{h(t)} \right) \overline{t}^n \frac{\overline{t} - \overline{z}}{1 - \overline{t} z} \right| \frac{1}{|1 - z\overline{t}|^2} \, dm(t) \leq$$

$$\leq \left\| \varphi + \overline{h} \right\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \frac{|z|^{n+1}}{n} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1}{|1 - z\overline{t}|^2} dm(t) = \left\| \varphi + \overline{h} \right\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \frac{|z|^{n+1}}{n(1 - |z|^2)} \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Мінімізуючи праву частину останньої нерівності відносно h по множині H_0^∞, а потім максимізуючи її відносно φ по класу $UL^\infty(\mathbb{T}) := \{\varphi \in L^\infty(\mathbb{T}) \colon \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq 1\}$, отримуємо співвідношення

$$\left| f(z) - \sigma_n(f)(z) - \frac{z}{n} f'(z) \right| \leq \sup_{\varphi \in UL^\infty(\mathbb{T})} d(\varphi; \overline{H_0^\infty}) \frac{|z|^{n+1}}{n(1 - |z|^2)} \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

де

$$d(\varphi; \overline{H_0^\infty}) := \inf_{h \in \overline{H_0^\infty}} \|\varphi + h\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

З іншого боку, при фіксованому $z \in \mathbb{D}$ для функції f_1 маємо зображення (5), в якому $\varphi = f_1$ і

$$f_1(z) - \sigma_n(f_1)(z) - \frac{z}{n} f_1'(z) = \frac{z^{n+1}}{n} \int\limits_{\mathbb{T}} t^n \frac{t - z}{1 - t\overline{z}} \overline{t}^n \frac{\overline{t} - \overline{z}}{1 - \overline{t} z} \frac{1}{|1 - z\overline{t}|^2} \, dm(t) =$$

$$= \frac{z^{n+1}}{n} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1}{|1 - z\overline{t}|^2} \, dm(t) = \frac{z^{n+1}}{n(1 - |z|^2)}.$$

Отже,

$$\sup_{\varphi \in UL^\infty(\mathbb{T})} d(\varphi; \overline{H_0^\infty}) = \|f_1\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = 1,$$

що й доводить рівність (8) і екстремальність функції f_1.

Доведемо тепер єдиність екстремальної функції f_1. Для цього зафіксуємо $z \in \mathbb{D}$, $\theta \in \mathbb{R}$ і означимо на $\mathbb{T}$ функцію

$$k(t) = -e^{i\theta} \overline{t}^n \frac{\overline{t} - \overline{z}}{1 - \overline{t} z} \frac{1}{|1 - z\overline{t}|^2} = e^{i\theta} \overline{f_1(t)} \frac{1}{|1 - z\overline{t}|^2}.$$

Для норми функціонала

$$F_k(f) = \int_{\mathbb{T}} f(t)k(t)dm(t)$$

на просторі H^∞, породженого функцією k, маємо рівність

$$\|F_k\| := \sup_{f \in B} |F_k(f)| = e^{-i\theta} F_k(f_1).$$

З іншого боку, за співвідношенням двоїстості (див., наприклад, [15, с. 138])

$$\|F_k\| = \inf_{h \in H_0^1} \|k + h\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

Оскільки функція $e^{-i\theta} f_1$ є внутрішньою, а $e^{-i\theta} k f_1 \geq 0$ скрізь на $\mathbb{T}$, то за лемою 2 інфімум у правій частині останньої рівності досягається для єдиної функції $h \equiv 0$. Тому всі екстремальні для функціонала F_k функції f^* повинні задовольняти рівняння $f^*(t)k(t) = e^{i\eta}|k(t)|$ для майже всіх $t \in \mathbb{T}$ при деякому $\eta \in \mathbb{R}$, що рівносильно рівності

$$f^*(t) = e^{i\eta} \frac{|k(t)|}{k(t)} = \frac{e^{i(\eta - \theta)}}{\overline{f_1(t)}} = e^{i(\eta - \theta)} f_1(t).$$

Отже, f_1 — єдина з точністю до унімодулярного множника екстремальна функція в класі B для функціонала F_k. Але оскільки згідно з (10)

$$-\frac{z^{n+1}}{n} F_k(f) = f(z) - \sigma_n(f)(z) - \frac{z}{n} f'(z),$$

то f_1 — єдина екстремальна функція в класі B і для рівності (8).

Припустимо тепер, що ψ — інша екстремальна функція в класі $UL^\infty(\mathbb{T})$, тобто та щільність в інтегралі типу Коші, що породжує голоморфну функцію класу K, для якої досягається максимум у лівій частині (8). Тоді, аналогічно щойно встановленим фактам про функцію f_1, повинна виконуватися рівність

$$(\psi + h_*)k = e^{i\theta}|k| \quad \text{майже скрізь на } \mathbb{T},$$

де h_* — функція, яка є єдиним елементом найкращого наближення з $\overline{H_0^\infty}$ функції ψ при деякому $\theta \in \mathbb{R}$ (існування та єдиність такої функції забезпечує теорема 1.3 з [15, с. 139]).

Отже,

$$\psi = e^{i\theta} f_1 - h_* \quad \text{майже скрізь на } \mathbb{T}. \tag{15}$$

Покажемо, що $|\psi| = 1$ майже скрізь на $\mathbb{T}$. Цей факт можна отримати, використавши теорему Адамяна, Арова і Крейна (див., наприклад, [15, с. 154]), а можна отримати безпосередньо зі співвідношення двоїстості, наприклад, таким чином.

Згідно зі співвідношенням двоїстості, норма функціонала F_ψ на просторі H^1, породженого функцією ψ, є такою:

$$\|F_\psi\| = \sup_{g\in H^1}\left|\int\limits_{\mathbb{T}} g\psi\, dm\right| = \inf_{h\in H_0^\infty}\|\psi+h\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

Із доведення леми 1 (див. рівність (12)) випливає, що k належить H^1. Тому

$$1 \geq \|F_\psi\| \geq \frac{e^{-i\theta}}{\|k\|_1}\int\limits_{\mathbb{T}} k\psi\, dm = 1.$$

Таким чином,

$$\frac{e^{-i\theta}}{\|k\|_1}\int\limits_{\mathbb{T}} k\psi\, dm = \inf_{h\in H_0^\infty}\|\psi+h\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = 1,$$

а це згідно з теоремою 1.3 [15, с. 139] забезпечує те, що елементом найкращого наближення ψ є функція $h=0$ і до того ж $|\psi|=1$ майже скрізь на $\mathbb{T}$.

Покажемо тепер, що рівності (15) і $|\psi|=1$ майже скрізь на $\mathbb{T}$ одночасно можливі лише тоді, коли $h_*=0$.

Справді, за лемою 2

$$\inf_{h\in H_0^1}\left\|\overline{e^{i\theta}f_1}\cdot 1 + h\right\|_{L^1(\mathbb{T})} = \|1\|_{L^1(\mathbb{T})} = 1,$$

а інфімум досягається для єдиної функції $h\equiv 0$. Але разом із цим внаслідок того, що $\overline{h_*}\in$ $\in H_0^\infty\subset H_0^1$, маємо співвідношення

$$1 = \inf_{h\in H_0^1}\left\|\overline{e^{i\theta}f_1}\cdot 1 + h\right\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \left\|\overline{e^{i\theta}f_1} - \overline{h_*}\right\|_{L^1(\mathbb{T})} = |\psi| = 1.$$

Отже, функція $\overline{h_*}$ також є елементом найкращого наближення в метриці простору $L^1(\mathbb{T})$ для функції $\overline{e^{i\theta}f_1}$, що можливо лише тоді, коли $h_*=0$ майже скрізь на $\mathbb{T}$.

Це завершує доведення єдиності екстремальної функції f_1 і першої частини теореми 1.

Друга частина теореми доводиться аналогічно. А саме, рівність (9) випливає з оцінки

$$\left|(1-|z|^{2n})f(z)-\sigma_n(f)(z)\right| \leq \frac{|z|}{n}\int\limits_{\mathbb{T}}\left|f(t)\frac{\bar t-\bar z}{1-\bar t z}\right|\frac{|1-\bar t^n z^n|^2}{|1-\bar t z|^2}dm(t) \leq$$

$$\leq \frac{|z|}{n}\int\limits_{\mathbb{T}}\left|\frac{1-\bar t^n z^n}{1-\bar t z}\right|^2 dm(t) = \frac{|z|}{n}\frac{1-|z|^{2n}}{1-|z|^2},$$

яка ґрунтується на формулі (11) і екстремальності функції f_2, яка реалізує рівності у цих співвідношеннях. Єдиність функції f_2 у класі B встановлюється дослівним повторенням міркувань із доведення єдиності функції f_1 у класі B з використанням позначення

$$k(t) = e^{i\theta}\frac{\bar t-\bar z}{1-\bar t z}\frac{|1-\bar t^n z^n|^2}{|1-\bar t z|^2}.$$

Теорему 1 доведено.

***Наслідок* 1.** *Нехай функція f має вигляд* (5), *де φ належить $L^\infty(\mathbb{T})$, і*

$$R_n(f)(z) := \left(\frac{z}{|z|}\right)^{n+1} \int\limits_{\mathbb{T}} \varphi(t)\bar{t}^n \frac{\bar{t}-\bar{z}}{1-\bar{t}z} \frac{1-|z|^2}{|1-z\bar{t}|^2}\, dm(t) \qquad (0/0=1)\,.$$

Тоді для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ і $z \in \mathbb{D}$

$$f(z) - \sigma_n(f)(z) = \frac{z}{n} f'(z) - R_n(f)(z) \frac{|z|^{n+1}}{n(1-|z|^2)}, \tag{16}$$

а для величини $R_n(f)(z)$ справджується точна оцінка

$$\|R_n(f)\|_\infty \le \inf_{h \in \overline{H^\infty} + \mathcal{P}_n} \|\varphi + h\|_{L^\infty(\mathbb{T})}, \tag{17}$$

де $\mathcal{P}_n$ — множина алгебраїчних многочленів степеня не вищого за n.

Доведення. Оскільки f належить H^2 (див. доведення теореми 1), то рівність (16) випливає з формули (10), в якій $k=0$ і $\overline{g(t)} = \varphi(t) - f(t) + t^n \overline{h(t)}$, а h — довільна функція з H^∞.

Для встановлення оцінки (17) зауважимо, що згідно з (12) для будь-якої функції $h \in H^\infty$

$$R_n(f)(z) = \left(\frac{z}{|z|}\right)^{n+1} \int\limits_{\mathbb{T}} \left(\varphi(t) + t^n\overline{h(t)}\right) \bar{t}^n \frac{\bar{t}-\bar{z}}{1-\bar{t}z} \frac{1-|z|^2}{|1-z\bar{t}|^2}\, dm(t),$$

а також $t^n \overline{h(1/\bar{t})} = \sum_{k=0}^n a_k t^k + O(1/t)$, $t \to \infty$, і тому $t^n\overline{h(t)}\big|_{t\in\mathbb{T}} \in \overline{H^\infty} + \mathcal{P}_n$.

Отже,

$$|R_n(f)(z)| \le \int\limits_{\mathbb{T}} \left|\varphi(t) + t^n\overline{h(t)}\right| \frac{1-|z|^2}{|1-z\bar{t}|^2}\, dm(t) \le$$

$$\le \inf_{h \in \overline{H^\infty} + \mathcal{P}_n} \|\varphi + h\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

що й доводить (17).

Знак рівності в (17) досягається, наприклад, для функції

$$f_*(t) = t^n \frac{t-z}{1-t\bar{z}},$$

де z — деяка точка в $\mathbb{D}$. Справді, за теоремою 1

$$1 = |R_n(f_*)(z)| \le \|R_n(f_*)\|_\infty.$$

З іншого боку, оскільки f_* зображується у вигляді (5) з $\varphi = f_*$, то

$$\|R_n(f_*)\|_\infty \le \inf_{h \in \overline{H^\infty} + \mathcal{P}_n} \|f_* + h\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \le \|f_*\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = 1,$$

що й потрібно було довести.

Нехай

$$E_n(f) := \inf_{P\in\mathcal{P}_{n-1}} \|f-P\|_\infty, \quad n\in\mathbb{N},$$

— найкраще наближення функції f алгебраїчними многочленами степеня не вищого за $n-1$ у просторі H^∞ і $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}_{k=r}^\infty$ — послідовність невід'ємних чисел, монотонно спадних до нуля при $k\to\infty$, $r\in\mathbb{Z}_+$.

Розглянемо клас $B_r(\varepsilon)$ обмежених голоморфних у $\mathbb{D}$ функцій f, для яких

$$E_n(f)\le\varepsilon_n \quad \forall n\ge r.$$

Наслідок 2. *Співвідношення*

$$f(z)-\sigma_n(f)(z) = \frac{z}{n}f'(z) + O\left(\frac{\varepsilon_n|z|^{n+1}}{n(1-|z|^2)}\right) \tag{18}$$

справджується для всіх натуральних $n\ge\max([r],1)$ *рівномірно відносно* $z\in\mathbb{D}$ *і рівномірно відносно класу* $B_r(\varepsilon)$.

Справді, використовуючи формулу (16) і оцінку (17), отримуємо

$$\|R_n(f)\|_\infty \le \inf_{h\in\overline{H^\infty}+\mathcal{P}_n} \|f+h\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \le E_{n+1}(f)\le\varepsilon_n,$$

що й потрібно було довести.

Наведемо один важливий приклад. Нехай $r\ge 0$ і

$$\varepsilon = \left\{\frac{\Gamma(k-r+1)}{k!}\right\}_{k=r}^\infty .$$

Тоді $B^r\subset B_{[r]}(\varepsilon)$. Цей факт випливає з рівності

$$\sup_{f\in B^r} E_n(f) = \frac{\Gamma(n-r+1)}{n!} \quad \forall n\ge [r],$$

доведеної в [16] при натуральних r і в [17, 18] при дробових r.

Оскільки (див., наприклад, [19, с. 35])

$$\frac{\Gamma(n-r+1)}{n!} \le \frac{1}{(n-[r])^r} = O\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad \forall n>[r],$$

то з (18) випливає співвідношення

$$f(z)-\sigma_n(f)(z) = \frac{z}{n}f'(z) + O\left(\frac{|z|^{n+1}}{n^{r+1}(1-|z|^2)}\right), \tag{19}$$

яке справджується для всіх натуральних $n\ge\max([r],1)$ рівномірно відносно $z\in\mathbb{D}$ і рівномірно відносно класу B^r.

Співвідношення (19) при натуральних $r\ge 2$ не є наслідком співвідношення Стєчкіна (2), оскільки при фіксованому $z\in\mathbb{D}$ залишковий член у (19) має більший порядок мализни, ніж залишковий член у (2). Однак при фіксованому n другий доданок у правій частині (19) необмежено зростає при $|z|\to 1-$.

***Наслідок* 3.** *Нехай функція f є голоморфною в $\mathbb{D}$ і z належить $\mathbb{D}$. Рівність*

$$\lim_{n\to\infty} n|f(z) - \sigma_n(f)(z)| = 0,$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $f'(z) = 0$.

Справді, при будь-якому $\rho \in (0,1)$ функція $t \to f(\rho t)/\|f(\rho\cdot)\|_\infty$ належить класу B і тому для неї, згідно з (19),

$$n(f(\rho t) - \sigma_n(f)(\rho t)) = \rho t f'(\rho t) + O\left(\frac{|t|^{n+1}}{1-|t|^2}\|f(\rho\cdot)\|_\infty\right).$$

Звідси при $\rho = \sqrt{|z|}$ і $t = e^{i\arg z}\sqrt{|z|}$ маємо співвідношення

$$n(f(z) - \sigma_n(f)(z)) = zf'(z) + O\left(\frac{|z|^{\frac{n+1}{2}}}{1-|z|}\left\|f\left(\sqrt{|z|}\cdot\right)\right\|_\infty\right),$$

яке справджується для всіх $n \in \mathbb{N}$ рівномірно відносно $z \in \mathbb{D}$, звідки й випливає наслідок 3.

***Наслідок* 4.** *Нехай функція f є голоморфною в $\mathbb{D}$. Для того щоб функція f належала B^1, необхідно і достатньо, щоб рівномірно всередині круга $\mathbb{D}$*

$$\limsup_{n\to\infty} n|f(z) - \sigma_n(f)(z)| \le 1. \tag{20}$$

Нагадаємо, що під рівномірною збіжністю всередині круга $\mathbb{D}$ розуміється рівномірна збіжність на будь-яких компактах, які лежать в $\mathbb{D}$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай E — замкнена підмножина у крузі $\mathbb{D}$. Тоді з (10) випливає нерівність

$$n|f(z) - \sigma_n(f)(z)| \le 1 + \frac{(1-d(E,\mathbb{T}))^{n+1}}{d(E,\mathbb{T})} \qquad \forall z \in E, \quad n \in \mathbb{N},$$

де $d(E,\mathbb{T})$ — евклідова відстань від E до кола $\mathbb{T}$. Оскільки другий доданок у правій частині нерівності прямує до нуля при $n \to \infty$ або ж є нулем, якщо $E = \{0\}$, то внаслідок довільності E останнє співвідношення доводить, що (20) справджується рівномірно всередині $\mathbb{D}$.

Достатність. Нехай z належить E. Розглянемо функцію $g(t) := f(tz)/M$, де $M := := \max_{t\in\mathbb{T}}|f(tz)|$. Зрозуміло, що g належить B. Тому, згідно з наслідком 1, для будь-якого натурального n

$$|tg'(t)| \le n|g(t) - \sigma_n(g)(t)| + \frac{|t|^{n+1}}{1-|t|^2} \quad \forall t \in \mathbb{D}. \tag{21}$$

Оскільки для будь-якої замкненої підмножини $E' \subset \mathbb{D}$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(E',\varepsilon)$, що

$$\frac{|t|^{n+1}}{1-|t|^2} \le \varepsilon \quad \forall t \in E', \quad n \ge N,$$

то з нерівності (21) випливає, що

$$|tg'(t)| \le \sup_{n\ge N} n|g(t)-\sigma_n(g)(t)| + \varepsilon \quad \forall t \in E'. \tag{22}$$

Але якщо виконується (20) рівномірно всередині круга $\mathbb{D}$, то

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sup_{n\ge N}\ n|g(t)-\sigma_n(g)(t)|\right) \le M^{-1} \quad \forall t\in E'.$$

Тому, оскільки ліва частина (22) не залежить від N,

$$|tg'(t)| \le M^{-1} + \varepsilon \quad \forall t \in E'.$$

Внаслідок довільності ε, E і E', а також згідно з рівністю $g'(t) = M^{-1}zf'(tz)$ це означає, що $|zf'(z)| \le 1$ для всіх $z \in \mathbb{D}$.

Отже, за лемою Шварца $|zf'(z)| \le |z|$ для всіх $z\in\mathbb{D}$, тобто f належить B^1.

***Наслідок* 5.** *Нехай* $n\in\mathbb{N}$. *Тоді*:

1) *для будь-якого* $z\in\mathbb{D}$

$$\frac{|z|}{n}\frac{1-|z|^{2n}}{1-|z|^2} \le \sup_{f\in B}|f(z)-\sigma_n(f)(z)| \le \frac{|z|}{n}\frac{1-|z|^{2n}}{1-|z|^2} + |z|^{2n}; \tag{23}$$

2) $\sup_{f\in B}\|f-\sigma_n(f)\|_\infty = 2$.

Перша частина цього твердження є безпосереднім наслідком рівності (11), а друга випливає з першої (оцінки зверху) і таких міркувань. Зафіксуємо $z\in\mathbb{T}$ і розглянемо сім'ю функцій $\{f_a\}_{0\le a<1}$,

$$f_a(t) = \frac{\overline{z}t - a}{1-\overline{z}ta} = -a + (1-a^2)\sum_{k=1}^{\infty} a^{k-1}(\overline{z}t)^k.$$

Зрозуміло, що f_a належить B. Тому згідно з (23)

$$2 \ge |f_a(z) - \sigma_n(f_a)(z)| = \frac{1-a^2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} ka^{k-1} + (1-a^2)\frac{a^n}{1-a} >$$
$$> (1+a)a \to 2, \quad a\to 1,$$

що й потрібно було довести.

Об'єднуючи наслідки 2 і 5, одержуємо твердження, в якому йдеться про асимптотичний розклад першого порядку для точної верхньої межі похибки наближення середніми Фейєра на класі B^r при всіх $r\ge 0$ і $z\in\mathbb{D}$. В термінології О. І. Степанця знайти такий розклад — означає розв'язати задачу Колмогорова – Нікольського [20, с. 198] для класу B^r і середніх Фейєра.

Наслідок 6. *Нехай* $r \geq 0$. *Тоді співвідношення*

$$\sup_{f\in B^r} |f(z) - \sigma_n(f)(z)| = \begin{cases} \dfrac{|z|}{n}\dfrac{1-|z|^{2n}}{1-|z|^2} + O\left(|z|^{2n}\right), & r = 0, \\ \dfrac{|z|}{n} + O\left(\dfrac{|z|^{n+1}}{n^2(1-|z|^2)}\right), & r = 1, \\ \dfrac{|z|}{n}\sup_{f\in B^r}\left|f'(z)\right| + O\left(\dfrac{|z|^{n+1}}{n^{r+1}(1-|z|^2)}\right), & r \neq 1, \end{cases} \tag{24}$$

справджується для всіх натуральних $n \geq \max([r], 1)$ *рівномірно відносно* $z \in \mathbb{D}$.

Зауважимо, що у випадку, коли $r > 0$, ліва частина (24) є обмеженою при $|z| \to 1$, тоді як залишковий член у правій частині необмежено зростає. Це наштовхує на думку, що наявність множника $1/(1-|z|^2)$ в залишковому члені у правій частині (24) не викликана суттю питання. Більше того, виявляється, що у випадку, коли $r = 1$, залишковий член у правій частині (24) при достатньо малих значеннях $|z|$ дорівнює нулю. А саме, справедливою є така теорема.

Теорема 2. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$ *і*

$$\rho_n := \begin{cases} 1, & n = 1, \\ \dfrac{n+1-\sqrt{n+1}}{n}, & n \geq 2, \end{cases}$$

— єдиний корінь на проміжку $[0,1]$ *рівняння* $n+1-2(n+1)x+nx^2 = 0$ *при* $n \geq 2$. *Тоді для всіх* z *таких, що* $|z| \leq \rho_n$, *справджується рівність*

$$\max_{f\in B^1} |f(z) - \sigma_n(f)(z)| = \frac{|z|}{n}. \tag{25}$$

Рівність (25) *справджується для будь-яких* $n \in \mathbb{N}$ *і* z *таких, що* $|z| \leq \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$.

При $z \neq 0$ *максимум у* (25) *досягається лише для функцій вигляду* $f(t) = at + b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$.

Доведення. За теоремою 3 з роботи [2] рівність (25) при даному $n \in \mathbb{N}$ і $z \in \mathbb{D}$ справджується тоді і тільки тоді, коли

$$K_{n,z}(t) := 1 + 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n-1} |z|^k \bar{t}^k + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{n}{k+1}|z|^k\bar{t}^k\right) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{D}, \tag{26}$$

де сума вигляду $\sum_{k=l}^{m}$ при $l > m$ покладається рівною нулю.

Таким чином, для доведення теореми 2 достатньо перевірити виконання умови (26) при зазначених обмеженнях на $|z|$.

З цією метою позначимо

$$\lambda_{k,n}(z) := \begin{cases} 2|z|^k, & k = 0, 1, \ldots, n-1, \\ \dfrac{2n}{k+1}|z|^k, & k = n, n+1, \ldots, \end{cases}$$

і запишемо $K_{n,z}(e^{ix})$ у вигляді суми тригонометричного ряду

$$K_{n,z}(e^{ix}) = \frac{\lambda_{0,n}(z)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k,n}(z)\cos(kx), \quad x \in [0, 2\pi].$$

Нескладно переконатися, що для других різниць

$$\Delta^2 \lambda_{k,n}(z) := \lambda_{k+2,n}(z) - 2\lambda_{k+1,n}(z) + \lambda_{k,n}(z)$$

послідовностей $\{\lambda_{k,n}(z)\}_{k=0}^{\infty}$, $n = 1, 2, \ldots$, справджуються рівності

$$\Delta^2 \lambda_{k,n}(z) = \begin{cases} 2|z|^k (1-\rho)^2, & k = 0, 1, \ldots, n-3, \quad n \geq 3, \\ 2\dfrac{|z|^{n-2}}{n+1}\left(n + 1 - 2|z|(n+1) + n|z|^2\right), & k = n-2, \quad n \geq 2, \\ 2n|z|^k \left(\dfrac{1}{k+1} - 2\dfrac{|z|}{k+2} + \dfrac{|z|^2}{k+3}\right), & k = n-1, n, \ldots, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Тому нерівності

$$\Delta^2 \lambda_{k,n}(z) \geq 0$$

виконуються для всіх $k = 0, 1, \ldots$ і $z \in \mathbb{D}$ у випадках, коли $n = 1$, та для всіх $k = 0, 1, \ldots$ і $z, |z| \leq \rho_n$, при $n \geq 2$.

Отже, послідовності $\{\lambda_{k,n}(z)\}_{k=0}^{\infty}$ при $|z| \leq \varrho_n$ є опуклими і спадними до нуля при $k \to \to \infty$ для кожного натурального n. Тому за відомою теоремою (див., наприклад, [21, с. 100]) $K_{n,z}(e^{ix}) \geq 0$ для всіх $x \in [0, 2\pi]$, а отже, виконується (26).

Опишемо тепер екстремальні функції в рівності (25). Безпосередньою перевіркою можна переконатись, що має місце формула

$$f(z) - \sigma_n(f)(z) = \frac{z}{n} \int_{\mathbb{T}} f'(t) K_{n,z}(t)\, dm(t), \quad z \in \mathbb{D}, \quad n \in \mathbb{N},$$

з якої за допомогою співвідношень двоїстості (див., наприклад, [15, с. 138]) випливають рівності

$$\sup_{f \in B^1} |f(z) - \sigma_n(f)(z)| =$$

$$= \frac{|z|}{n} \sup_{g \in B} \left| \int_{\mathbb{T}} g(t) K_{n,z}(t)\, dm(t) \right| = \frac{|z|}{n} \inf_{h \in H_0^1} \|K_{n,z} + h\|_{L^1(\mathbb{T})},$$

причому існують єдині функції $g_* \in B$ і $h_* \in H_0^1$, для яких

$$\int_{\mathbb{T}} g_*(t) K_{n,z}(t)\, dm(t) = \|K_{n,z} + h_*\|_{L^1(\mathbb{T})}. \tag{27}$$

Оскільки функція $t \mapsto K_{n,z}(t)$ при $|z| \le \rho_n$ є невід'ємною на колі $\mathbb{T}$, то за лемою 2 $h_* \equiv 0$ і

$$\inf_{h \in H_0^1} \|K_{n,z}(t) + h\|_{L^1(\mathbb{T})} = \|K_{n,z}\|_{L^1(\mathbb{T})} = 1.$$

Тому функція $g_* \equiv 1$ єдина екстремальна у (27), а відтак функція

$$f_*(z) = \int\limits_b^{az} g_*(t)dt = az + b, \qquad a, b \in \mathbb{C}, \quad |a| = 1,$$

що породжується функцією g_*, — єдина екстремальна функція у (25).

3. Для обмежених гармонічних функцій у крузі $\mathbb{D}$ мають місце твердження, аналогічні наслідкам 2–6.

Наведемо необхідні означення і нагадаємо деякі факти.

Якщо дійснозначна функція f є обмеженою гармонічною в крузі $\mathbb{D}$, то (див., наприклад, [12, с. 12]) існує дійснозначна функція φ, вимірна на колі $\mathbb{T}$, $\operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{T}} |\varphi(t)| < \infty$, така, що

$$f(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} \varphi(t) \frac{1 - |z|^2}{|1 - \bar{t}z|^2} dm(t) \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

За теоремою Фату (див., наприклад, [12, с. 27]) така функція f має майже скрізь на $\mathbb{T}$ радіальні (навіть кутові) граничні значення

$$f^*(t) := \lim_{\rho \to 1-} f(\rho t), \quad t \in \mathbb{T},$$

причому $f^* = \varphi$ майже скрізь на $\mathbb{T}$.

Таким чином, обмежена гармонічна функція f однозначно визначається своїми радіальними граничними значеннями на $\mathbb{T}$.

На основі розкладу

$$\frac{1 - |z|^2}{|1 - \bar{t}z|^2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e_k(z)\overline{e_k(t)}, \quad e_k(z) := \begin{cases} \overline{z}^{|k|}, & k \le -1, \\ z^k, & k \ge 0, \end{cases}$$

який збігається абсолютно і рівномірно відносно (z, t) в області $\mathbb{D} \times \mathbb{T}$, функцію f можна зобразити у вигляді суми ряду

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_k e_k(z) \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

де

$$\widehat{f}_k = \widehat{\varphi}_k = \int\limits_{\mathbb{T}} \varphi \overline{e_k}\, dm.$$

Гармонічна функція

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} (-i\operatorname{sign} k)\widehat{f}_k e_k(z)$$

називається гармонічно спряженою до f.

Нехай $r \geq 0$. Позначимо через $f^{(r)}$ дробову похідну в розумінні Вейля за аргументом $z = \rho e^{ix}$ функції f (див., наприклад, [22, с. 263]), тобто

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i\frac{\pi r}{2}\operatorname{sign} k} |k|^r \widehat{f}_k e_k(z).$$

Розглянемо класи hB^r і $\widetilde{hB^r}$, які складаються з гармонічних функцій у крузі $\mathbb{D}$, для яких $\|f^{(r)}\|_\infty \leq 1$ і $\left\|\widetilde{f}^{(r)}\right\|_\infty \leq 1$ відповідно. Позначимо $hB = hB^0$ і $\widetilde{hB} = \widetilde{hB^0}$.

Середніми Фейєра порядку n гармонічної функції f називається гармонічний многочлен

$$\sigma_n(f)(z) = \sum_{|k|\leq n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \widehat{f}_k e_k(z).$$

Нехай функція f є гармонічною в $\mathbb{D}$ і має майже скрізь на $\mathbb{T}$ кутові граничні значення $f \in L^1(\mathbb{T})$. Розглянемо дві функції, визначені у крузі $\mathbb{D}$:

$$f_+(z) := \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(t)}{1 - \bar{t}z} dm(t), \qquad f_-(z) := \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(t)t\overline{z}}{1 - t\overline{z}}\, dm(t), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Тоді за формулами Сохоцького майже скрізь на $\mathbb{T}$

$$f_- + f_+ = f, \qquad if_- - if_+ + i\widehat{f}_0 = \widetilde{f}. \tag{28}$$

Наступне твердження є основним у цьому пункті. Воно є аналогом теореми 1.

Теорема 3. *Нехай $\mathfrak{H}$ — один із класів hB або $\widetilde{hB}$, $n \in \mathbb{N}$ і $z \in \mathbb{D}$. Тоді*

$$\max_{f\in\mathfrak{H}} \left| f(z) - \sigma_n(f)(z) - \frac{1}{n}\widetilde{f}'(z) \right| = \frac{4|z|^{n+1}}{\pi n(1 - |z|^2)}. \tag{29}$$

При $z \neq 0$ максимум досягається для єдиної з точністю до унімодулярного множника функції

$$f_3(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \arg \dfrac{1 + iB_n(t)e^{-i(n+1)\arg z}}{1 - iB_n(t)e^{-i(n+1)\arg z}}, & \text{якщо } \mathfrak{H} = hB, \\[2ex] \dfrac{2}{\pi} \ln \left| \dfrac{1 + B_n(t)e^{-i(n+1)\arg z}}{1 - B_n(t)e^{-i(n+1)\arg z}} \right|, & \text{якщо } \mathfrak{H} = \widetilde{hB}, \end{cases}$$

де

$$B_n(t) := t^n \frac{t - z}{1 - t\overline{z}}.$$

***Зауваження* 4.** Якщо записати рівність (29) у вигляді

$$\max_{f\in\mathfrak{H}}\left|n(f(z)-\sigma_n(f)(z))-\widetilde{f}'(z)\right|=\frac{4|z|^{n+1}}{\pi(1-|z|^2)},$$

то вона буде справедливою і при $n=0$:

$$\max_{f\in\mathfrak{H}}\left|\widetilde{f}'(z)\right|=\frac{4|z|}{\pi(1-|z|^2)}.$$

Це співвідношення вперше знайдено, мабуть, у [23]. Його можна також отримати з результатів [24].

***Доведення теореми* 3.** При $z=0$ рівність (29) є тривіальною. Тому скрізь далі в доведенні вважаємо, що $z\neq 0$.

Нехай $\mathfrak{H}=hB$. Оскільки

$$\left\|\overline{f_-}\right\|_2^2+\|f_+\|_2^2=\|f\|_2^2\leq\|f\|_\infty^2<\infty,$$

то $f_-\in\overline{H_0^1}$ і $f_+\in H^1$.

Тому, застосувавши до функції f_+ формулу (10), одержимо

$$f_+(z)-\sigma_n(f_+)(z)-\frac{z}{n}f_+'(z)=-\frac{z^{n+1}}{n}\int\limits_{\mathbb{T}}(f_-(t)+f_+(t))\overline{t}^n\frac{\overline{t}-\overline{z}}{1-\overline{t}z}\frac{1}{|1-\overline{t}z|^2}\,dm(t)=$$

$$=-\frac{|z|^{n+1}}{n}\int\limits_{\mathbb{T}}f(t)\omega_{n,z}(t)\frac{1}{|1-\overline{t}z|^2}\,dm(t), \tag{30}$$

де

$$\omega_{n,z}(t):=\overline{t}^n\frac{\overline{t}-\overline{z}}{1-\overline{t}z}e^{i(n+1)\arg z}.$$

Позначимо

$$f_-'(t):=\frac{d}{d\overline{t}}f_-(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_{-k}k\overline{t}^{k-1}.$$

Оскільки функція f дійснозначна, то $f_+=\overline{f_-}+\widehat{f}_0$, і тому

$$f_-(z)-\sigma_n(f_-)(z)-\frac{\overline{z}}{n}f_-'(z)=-\frac{|z|^{n+1}}{n}\int\limits_{\mathbb{T}}f(t)\overline{\omega_{n,z}(t)}\frac{1}{|1-\overline{t}z|^2}\,dm(t). \tag{31}$$

Додаючи рівності (30) і (31), одержуємо формулу

$$f(z)-\sigma_n(f)(z)-\frac{1}{n}\widetilde{f}'(z)=-\frac{2|z|^{n+1}}{n}\int\limits_{\mathbb{T}}f(t)\cos(\theta_{n,z}(t))\frac{1}{|1-\overline{t}z|^2}\,dm(t),$$

в якій

$$\theta_{n,z}(t) := \arg \omega_{n,z}(t).$$

Звідси випливає оцінка

$$\left| f(z) - \sigma_n(f)(z) - \frac{1}{n}\widetilde{f}'(z) \right| \leq \frac{2|z|^{n+1}}{n} \int\limits_{\mathbb{T}} |\cos(\theta_{n,z}(t))| \frac{1}{|1-\bar{t}z|^2}\, dm(t). \tag{32}$$

Доведемо її точність.

Оскільки функція f_3 є уявною частиною голоморфної в $\mathbb{D}$ функції

$$F(t) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1 + iB_n(t)e^{-i(n+1)\arg z}}{1 - iB_n(t)e^{-i(n+1)\arg z}}$$

і $\|f_3\|_\infty = 1$, то $f_3 \in hB$. З рівності

$$f_3(t) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{2|B_n(t)|\cos(\theta_{n,z}(t))}{1 - |B_n(t)|^2} \quad \forall t \in \mathbb{D}$$

випливає, що для радіальних граничних значень функції f_* справджується рівність

$$f_3^*(t) = \lim_{\rho\to 1-} f_3(\rho t) = \left\{ \begin{matrix} 1, & \cos(\theta_{n,z}(t)) > 0, \\ 0, & \cos(\theta_{n,z}(t)) = 0, \\ -1, & \cos(\theta_{n,z}(t)) < 0 \end{matrix} \right\} = \operatorname{sign}\left(\cos(\theta_{n,z}(t))\right).$$

Отже, за теоремою єдиності для гармонічних функцій f_3 — єдина з точністю до унімодулярного множника екстремальна функція, для якої має місце знак рівності у (32).

З'ясуємо тепер, який вигляд матиме ліва частина (32) для функції f_3.

Оскільки $B_n(t) = O(t^n)$ і $\ln\dfrac{1+t}{1-t} = O(t)$ при $t \to 0$, то $f_3(t) = O(F(t)) = O(t^n)$. Це означає, що

$$\widehat{(f_3)}_k = 0, \quad |k| \leq n-1,$$

і внаслідок цього $\sigma_n(f_3)(t) = 0$ для всіх $t \in \mathbb{D}$.

Нескладно переконатися, що $\widetilde{f}_3'(t) = \operatorname{Im}(tF'(t))$ і

$$F'(t) = i\frac{4}{\pi} \frac{e^{-i(n+1)\arg z} B_n'(t)}{1 + e^{-i2(n+1)\arg z} B_n^2(t)}.$$

Тому

$$\widetilde{f}_3'(z) = \operatorname{Im}(zF'(z)) = \operatorname{Im}\left(i\frac{4|z|^{n+1}}{\pi(1-|z|^2)} \right) = \frac{4|z|^{n+1}}{\pi(1-|z|^2)}.$$

Легко бачити також, що $f_3(z) = \sigma_n(f_3)(z) = 0$.

Отже,

$$\left| f_3(z) - \sigma_n(f_3)(z) - \frac{1}{n}\widetilde{f}_3'(z) \right| = \frac{1}{n}\widetilde{f}_3'(z) =$$

$$= \frac{2|z|^{n+1}}{n} \int\limits_{\mathbb{T}} |\cos(\theta_{n,z}(t))| \frac{1}{|1-\bar{t}z|^2} dm(t) = \frac{4|z|^{n+1}}{\pi n(1-|z|^2)}.$$

Нехай тепер $\mathfrak{H} = \widetilde{hB}$. Тоді за допомогою (28) аналогічно попередньому випадку доводиться рівність

$$\widetilde{f}(z) - \sigma_n(\widetilde{f})(z) + \frac{1}{n} f'(z) = \frac{2|z|^{n+1}}{n} \int\limits_{\mathbb{T}} f(t) \sin(\theta_{n,z}(t)) \frac{1}{|1-\bar{t}z|^2}\, dm(t).$$

Оскільки $\widetilde{\left(\widetilde{f}\right)} = -f$, то підставляючи в останню рівність $\widetilde{f}$ замість f, отримуємо

$$f(z) - \sigma_n(f)(z) - \frac{1}{n} \widetilde{f}'(z) = -\frac{2|z|^{n+1}}{n} \int\limits_{\mathbb{T}} \widetilde{f}(t) \sin(\theta_{n,z}(t)) \frac{1}{|1-\bar{t}z|^2}\, dm(t).$$

Звідси випливає оцінка

$$\left| f(z) - \sigma_n(f)(z) - \frac{1}{n} \widetilde{f}'(z) \right| \le \frac{2|z|^{n+1}}{n} \int\limits_{\mathbb{T}} |\sin(\theta_{n,z}(t))| \frac{1}{|1-\bar{t}z|^2}\, dm(t).$$

Функція f_3 є уявною частиною функції

$$F(t) = \frac{2i}{\pi} \ln \frac{1 + B_n(t) e^{-i(n+1)\arg z}}{1 - B_n(t) e^{-i(n+1)\arg z}}.$$

Оскільки для спряженої функції $\widetilde{f}_3$ справджується рівність

$$\widetilde{f}_3(t) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{2|B_n(t)| \sin(\theta_{n,z}(t))}{1 - |B_n(t)|^2} \quad \forall t \in \mathbb{D},$$

то f_3 належить $\widetilde{hB}$.

Для радіальних граничних значень функції $\widetilde{f}_3^{\,*}$ справджується рівність

$$\widetilde{f}_3^{\,*}(t) = \lim_{\rho \to 1-} \widetilde{f}_3(\rho t) = \left\{ \begin{matrix} 1, & \sin(\theta_{n,z}(t)) > 0, \\ 0, & \sin(\theta_{n,z}(t)) = 0, \\ -1, & \sin(\theta_{n,z}(t)) < 0 \end{matrix} \right\} = \operatorname{sign}(\sin(\theta_{n,z}(t))).$$

Оскільки $\widetilde{f}_3'(t) = \operatorname{Re}(tF'(t))$ і

$$F'(t) = \frac{4}{\pi} \frac{e^{-i(n+1)\arg z} B_n'(t)}{1 - e^{-i2(n+1)\arg z} B_n^2(t)},$$

то

$$\widetilde{f}_3'(z) = \frac{4|z|^{n+1}}{\pi(1-|z|^2)}.$$

Отже,

$$\left|f_3(z)-\sigma_n(f_3)(z)-\frac{1}{n}\widetilde{f}_3'(z)\right|=\frac{1}{n}\widetilde{f}_3'(z)=$$

$$=\frac{2|z|^{n+1}}{n}\int\limits_{\mathbb{T}}|\sin(\theta_{n,z}(t))|\,\frac{1}{|1-\bar{t}z|^2}dm(t)=\frac{4|z|^{n+1}}{\pi n(1-|z|^2)}.$$

Теорему 3 доведено.

Позначимо через h^∞ простір обмежених дійснозначних гармонічних у $\mathbb{D}$ функцій із нормою $\|\cdot\|_\infty$, і нехай

$$\widetilde{E}_n(f):=\inf_{\substack{a_k\in\mathbb{C}\\ a_{-k}=\bar{a}_k}}\left\|f-\sum_{|k|\le n-1}a_ke_k\right\|_\infty$$

— найкраще наближення функції $f\in h^\infty$ гармонічними многочленами у просторі h^∞.

Нехай, як і раніше, $\varepsilon=\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ — послідовність невід'ємних чисел, монотонно спадних до нуля при $k\to\infty$, і $hB(\varepsilon)$ — клас обмежених гармонічних у $\mathbb{D}$ функцій f, для яких

$$\widetilde{E}_n(f)\le\varepsilon_n\quad\forall n\ge r.$$

Аналогічно означимо клас $\widetilde{hB(\varepsilon)}:=\left\{f \text{ гармонічна в } \mathbb{D}:\ \widetilde{f}\in hB(\varepsilon)\right\}$.

Наслідок 7. *Нехай $\mathfrak{H}$ — один із класів $hB(\varepsilon)$ або $\widetilde{hB(\varepsilon)}$. Тоді співвідношення*

$$f(z)-\sigma_n(f)(z)=\frac{1}{n}\widetilde{f}'(z)+O\left(\frac{\varepsilon_n|z|^{n+1}}{n(1-|z|^2)}\right)\tag{33}$$

справджується для всіх натуральних $n\ge1$ рівномірно відносно $z\in\mathbb{D}$ і рівномірно відносно класу $\mathfrak{H}$.

Доведення. Нехай f належить $\mathfrak{H}=hB(\varepsilon)$. Тоді функція

$$F=\frac{f-T_n}{\varepsilon_n},$$

де $T_n=\sum_{|k|\le n-1}a_k^*e_k$ — гармонічний многочлен степеня $n-1$ найкращого наближення функції f, належить класу hB. Тому з урахуванням тотожності $T_n-\sigma_n(T_n)=\dfrac{1}{n}\widetilde{T}_n'$ за теоремою 3 маємо рівність (33).

Аналогічно доводиться випадок, коли $f\in\mathfrak{H}=\widetilde{hB(\varepsilon)}$.

Наслідок 8. *Нехай функція f є гармонічною в $\mathbb{D}$ і $z\in\mathbb{D}$. Рівність*

$$\lim_{n\to\infty}n|f(z)-\sigma_n(f)(z)|=0$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $\widetilde{f}'(z)=0$.

Це твердження доводиться майже дослівним повторенням міркувань із доведення наслідку 3 з урахуванням (33).

В роботі [25] (див. також [4, с. 350]) знайдено конструктивну характеристику класу абсолютно неперервних функцій $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, для яких похідна f' задовольняє умову Ліпшиця, в термінах наближення многочленами Бернштейна, а в роботі [26] — конструктивну характеристику аналогічного класу 2π-періодичних функцій у термінах наближення тригонометричними многочленами Валле Пуссена.

Наступне твердження є аналогом цих результатів для наближень гармонічних функцій середніми Фейєра.

***Наслідок* 9.** *Нехай функція f є гармонічною в $\mathbb{D}$. Для того щоб f належала $\widetilde{hB^1}$, необхідно і достатньо, щоб рівномірно всередині круга $\mathbb{D}$*

$$\limsup_{n\to\infty} n|f(z) - \sigma_n(f)(z)| \le 1.$$

При доведенні *необхідності* слід врахувати, що $\widetilde{hB^1} \subset \widetilde{hB(\varepsilon)}$, де $\varepsilon = \left\{\dfrac{\pi}{2k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ (див., наприклад, [11, с. 95]), а потім скористатися співвідношенням (33). *Достатність* доводиться так само, як і в доведенні наслідку 4.

Розв'язок задачі Колмогорова – Нікольського для класів hB^r, $\widetilde{hB^r}$ і сум Фейєра дає такий наслідок.

***Наслідок* 10.** *Нехай $r \ge 0$ і $\mathfrak{H}^r$ — один із класів hB^r або $\widetilde{hB^r}$. Тоді співвідношення*

$$\sup_{f\in\mathfrak{H}^r} |f(z) - \sigma_n(f)(z)| = \begin{cases} \dfrac{4|z|}{\pi n(1-|z|^2)}\left(1 + O\left(|z|^n\right)\right), & r = 0, \\ \left.\begin{matrix} \dfrac{2}{\pi n}\log\dfrac{1+|z|}{1-|z|} + O\left(\dfrac{|z|^{n+1}}{n^2(1-|z|^2)}\right), & \mathfrak{H}^r = hB^r, \\ \dfrac{4}{\pi n}\arctan|z| + O\left(\dfrac{|z|^{n+1}}{n^2(1-|z|^2)}\right), & \mathfrak{H}^r = \widetilde{hB^r} \end{matrix}\right\}, & r = 1, \\ \dfrac{1}{n}\sup\limits_{f\in\mathfrak{H}^r}\left|\widetilde{f}'(z)\right| + O\left(\dfrac{|z|^{n+1}}{n^{r+1}(1-|z|^2)}\right), & r \ne 0, 1, \end{cases}$$

справджується для всіх $n \in \mathbb{N}$ рівномірно відносно $z \in \mathbb{D}$.

Доведення. Зауважимо, що співвідношення

$$\widetilde{E}_n(f) = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

справджується рівномірно відносно n і рівномірно відносно класу $\mathfrak{H}^r$ (див., наприклад, [11, с. 86]).

Тому за наслідком 7 справедливою є формула

$$\sup_{f\in\mathfrak{H}^r} |f(z) - \sigma_n(f)(z)| = \frac{A_n(\mathfrak{H}^r, z)}{n} + O\left(\frac{|z|^{n+1}}{n^{r+1}(1-|z|^2)}\right),$$

де

$$A_n(\mathfrak{H}^r, z) := \sup_{f \in \mathfrak{H}^r} \left| \widetilde{f}'(z) \right|.$$

Згідно із зауваженням 4 маємо рівності

$$A_n(B, z) = A_n\left(\widetilde{B}, z\right) = \frac{4|z|}{\pi(1-|z|^2)},$$

які доводять наслідок 10 у випадку, коли $r = 0$.

У випадку, коли $r = 1$, за лемою Шварца [27] (див. також [28]) маємо рівності

$$A_n\left(hB^1, z\right) = \max_{f \in hB, f(0)=0} \left| \widetilde{f}(z) \right| = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

і

$$A_n\left(\widetilde{hB^1}, z\right) = \max_{f \in hB, f(0)=0} |f(z)| = \frac{4}{\pi} \arctan |z|.$$

Прокоментуємо наслідок 10, зіставивши його з відомими результатами про наближення дійснозначних неперервних на дійсній осі $\mathbb{R}$ 2π-періодичних функцій із класів згорток з ядром Пуассона.

Нехай $0 \le q < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ і C^q_β — клас неперервних 2π-періодичних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які мають вигляд

$$f(x) = a_0 + \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-y) P_{q,\beta}(y) \frac{dy}{\pi}, \quad x \in \mathbb{R},$$

де $a_0 \in \mathbb{R}$ і

$$P_{q,\beta}(y) := \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(ky - \frac{\beta\pi}{2}\right).$$

Нескладно зрозуміти, що

$$C^q_\beta = \begin{cases} hB\big|_{|z|=q}, & \beta \in 2\mathbb{Z}, \\ \widetilde{hB}\big|_{|z|=q}, & \beta + 1 \in 2\mathbb{Z}, \end{cases}$$

тобто при цілих β функція f належить C^q_β тоді і тільки тоді, коли функція $F(e^{ix}) := f(x)$ є звуженням на коло радіуса q деякої функції з класу hB або $\widetilde{hB}$.

Нехай

$$V_{n,m}(f)(x) = \sum_{|k| \le n-1} \lambda_{k,n,m} \widehat{f}_k e^{ikx}, \qquad m, n \in \mathbb{N}, \quad m \le n,$$

— сума Валле Пуссена неперервної 2π-періодичної функції f, де

$$\lambda_{k,n,m} = \begin{cases} 1, & |k| \le n - m, \\ 1 - \dfrac{|k| - n + m}{m}, & n - m + 1 \le |k| \le n - 1, \end{cases}$$

і

$$\widehat{f}_k = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi}.$$

Зрозуміло, що $V_{n,n}(f) = \sigma_n(f)$.

У роботі [29] доведено (див. також [30; 31, с. 217]), що *при* $0 < q < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, $m \to +\infty$ *і* $n - m \to +\infty$ *справджується асимптотична рівність*

$$\sup_{f \in C^q_\beta} \|f - V_{n,m}(f)\|_C = \frac{4q^{n-m+1}}{\pi m (1 - q^2)} \left(1 + O\left(q^m + \frac{q}{(n - m + 1)(1 - q)^2}\right)\right), \qquad (34)$$

де $\|f\|_C = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)|$, $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно* n, q, m *і* β.

Співвідношення (34) є правильним і при $n = m$, але при цьому воно вже не є асимптотичною рівністю. Наслідок 10 (випадок, коли $r = 0$) уточнює (34), а саме, показує, що при $n = m$ і $\beta \in \mathbb{Z}$ другий доданок у залишковому члені у правій частині (34) фактично дорівнює нулю, що забезпечує справедливість асимптотичної рівності й у цьому випадку.

Цікаво зауважити також, як наслідок 10 узгоджується з відомим результатом С. М. Нікольського [32].

Нехай W^1 — клас абсолютно неперервних 2π-періодичних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, в яких похідна f' там, де вона існує, задовольняє умову $|f'(x)| \le 1$. Тоді

$$hB^1\big|_{\mathbb{T}} = W^1.$$

Справді, якщо f належить W^1, то інтеграл Пуассона

$$F(z) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x - y) \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos y + \rho^2} \frac{dy}{2\pi}, \qquad z = \rho e^{ix},$$

породжує гармонічну функцію, неперервну в $\overline{\mathbb{D}}$ (див., наприклад, [21, с. 154]), для похідної якої справджується рівність

$$F'(\rho e^{ix}) = \frac{\partial}{\partial x} F(\rho e^{ix}) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x - y) \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos y + \rho^2} \frac{dy}{2\pi}.$$

Отже, F належить hB^1 і $F|_{\mathbb{T}} = f|_{[-\pi,\pi]}$.

Навпаки, якщо F належить hB^1, то F задовольняє дугову умову Ліпшиця:

$$|F(\rho e^{ix_1}) - F(\rho e^{ix_2})| \le \rho |e^{ix_1} - e^{ix_2}| \quad \forall x_1, x_2 \in [0, 2\pi], \quad \rho \in [0, 1).$$

Тому радіальні граничні значення F^* на множині тих точок кола $\mathbb{T}$, де вони існують, задовольняють умову Ліпшиця:

$$|F^*(e^{ix_1}) - F^*(e^{ix_2})| \leq |e^{ix_1} - e^{ix_2}|.$$

Отже, F можна неперервно продовжити в $\overline{\mathbb{D}}$, $F|_{\mathbb{T}} = F^*$ і за відомою теоремою (див., наприклад, [21, с. 156])

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} F^*\right| \leq 1 \quad \text{майже скрізь на } \mathbb{T}.$$

За принципом максимуму і наслідком 10 маємо співвідношення

$$\sup_{f \in W^1} \|f - \sigma_n(f)\|_C = \sup_{f \in hB^1} \|f - \sigma_n(f)\|_\infty \geq$$

$$\geq \sup_{f \in hB^1} \left| f\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \sigma_n(f)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right| = \frac{2}{\pi n}\log n + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

З іншого боку, за теоремою Нікольського [32] при $n \to \infty$ справджується асимптотична рівність

$$\sup_{f \in W^1} \|f - \sigma_n(f)\|_C = \frac{2}{\pi n}\log n + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким чином, ми довели такий наслідок.

***Наслідок* 11.** *При $n \to \infty$ справджується асимптотична рівність*

$$\sup_{f \in hB^1} |f(z) - \sigma_n(f)(z)| = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi n}\log\dfrac{1+|z|}{1-|z|} + O\left(\dfrac{|z|^{n+1}}{n^2(1-|z|^2)}\right), & z \in \mathbb{D}, \\ \dfrac{2}{\pi n}\log n + O\left(\dfrac{1}{n}\right), & z \in \mathbb{T}. \end{cases}$$

Література

1. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1953. – **17**, № 5. – С. 462 – 472.
2. *Meremelia I., Savchuk V.* Approximations of holomorphic functions by generalized Zygmund sums // Cas. J. Appl. Math., Ecol. and Econ. – 2013. – **1**, № 1. – P. 70 – 81.
3. *Butzer P., Nessel J. R.* Fourier analysis and approximation. – Basel: Birkhäuser, 1971. – 553 p.
4. *Bustamente J.* Bernstein operators and their properties. – Basel: Birkhäuser, 2017. – 420 p.
5. *Zygmund A.* On the degree of approximation of functions by Fejér means // Bull. Amer. Math. Soc. – 1945. – **51**. – P. 274 – 278.
6. *Савчук В. В.* Приближения средними Фейера функций класса Дирихле // Мат. заметки. – 2007. – **81**, № 5. – С. 744 – 750.
7. *Савчук В. В.* Наближення голоморфних функцій сумами Фейєра // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. – 2011. – **8**, № 1. – С. 162 – 180.
8. *Савчук В. В., Савчук М. В., Чайченко С. О.* Наближення аналітичних функцій сумами Валле Пуссена // Мат. студ. – 2010. – **34**, № 2. – С. 207 – 219.

9. *Степанец А. И.* Аппроксимационные свойства метода Зигмунда // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 4. – С. 493 – 518.
10. *Степанец А. И., Рукасов В. И.* Аппроксимационные свойства метода Валле Пуссена // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 8. – С. 1100 – 1125.
11. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 2. – 467 с.
12. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. – М.: Мир, 1984. – 368 с.
13. *Landau E., Gaier D.* Darstellung und Bergrundung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. – Berlin; New York: Springer-Verlag, 1986. – 201 p.
14. *Савчук В. В.* Найкращі наближення голоморфними функціями. Застосування до найкращих многочленних наближень класів голоморфних функцій // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 8. – С. 1047 – 1067.
15. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 469 с.
16. *Бабенко К. И.* Наилучшие приближения классов аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1958. – **22**, № 5. – С. 631 – 640.
17. *Scheick J. T.* Polynomial approximation of functions analytic in a disk // Proc. Amer. Math. Soc. – 1966. – **17**. – P. 1238 – 1243.
18. *Белый В. И.* К вопросу о наилучших линейных методах приближения функций, аналитических в единичном круге // Укр. мат. журн. – 1967. – **19**, № 2. – С. 104 – 109.
19. *Риекстыньш Э. Я.* Оценки остатков в асимптотических разложениях. – Рига: Зинатне, 1986. – 360 с.
20. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 1. – 427 с.
21. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
22. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
23. *Khavinson D.* An extremal problem for harmonic functions in the ball // Canad. Math. Bull. – 1992. – **35**, № 2. – P. 218 – 220 .
24. *Colonna F.* The Bloch constant of bounded harmonic mappings // Indiana Univ. Math. J. – 1989. – **38**, № 4. – P. 829 – 840.
25. *Lorentz G. G.* Inequalities and the saturation classes of Bernstein polynomials // On Approximation Theory: Proc. Conf. Oberwolfach, 1963. – Basel: Birkhäuser, 1964. – P. 200 – 207.
26. *Тиман А. Ф., Трофимов В. Н.* О точных константах в некоторых обратных теоремах для приближений тригонометрическими полиномами // Мат. заметки. – 1976. – **20**, № 5. – С. 787 – 792.
27. *Koebe P.* Über das Schwarzssche Lemma und einige damit zusammenhängende Ungleichheitsbeziehungen der Potentialtheorie und Funktionentheorie // Math. Z. – 1920. – **6**. – S. 52 – 84.
28. *Савчук В. В.* Найкращі лінійні методи наближення та оптимальні ортонормовані системи простору Гарді // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 5. – С. 661 – 671.
29. *Сердюк А. С.* Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 1. – С. 97 – 107.
30. *Рукасов В. И., Новиков О. А.* Приближение аналитических функций суммами Валле Пуссена // Ряди Фур'є: теорія і застосування. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – С. 228 – 241.
31. *Степанец А. И., Рукасов В. И., Чайченко С. О.* Приближения суммами Валле Пуссена. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 386 с.
32. *Никольский С. М.* Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1940. – **4**, № 6. – С. 501 – 508.

Одержано 13.08.18