УДК 517.9

А. М. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ)

СИНГУЛЯРНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ, ЕКВІВАЛЕНТНЕ У ПРОСТОРІ ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ ЗВИЧАЙНОМУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОМУ, МЕТОД ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ ПОБУДОВИ ЙОГО ГЛАДКИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ТА ЙОГО НЕГЛАДКІ РОЗВ'ЯЗКИ

We propose a singular integral equation whose definition is extended to a singular point by additional conditions. In the space of smooth functions, this equation becomes equivalent, by the indicated extended definition, to an ordinary differential equation, whereas in the space of piecewise discontinuous functions, it becomes equivalent to an impulsive differential equation. For smooth solutions of the singular equation, we substantiate the method of successive approximations. For the ordinary differential equation, this method turns into a new algorithm for the construction of successive approximations. For the investigated equation, we specify a solution of new type, which is equivalent, for the impulsive differential equation, to a solution with discontinuity of the second kind (a "solution with needle"). We propose an algorithmic formula for the general solution of the initial-value problem for the impulsive differential equation.

Запропоновано сингулярне інтегральне рівняння, яке в особливій точці довизначається додатковими умовами. У просторі гладких функцій при довизначенні воно стає еквівалентним звичайному диференціальному рівнянню, у просторі кусково-розривних функцій — імпульсному диференціальному рівнянню. Для гладких розв'язків сингулярного рівняння обгрунтовано метод послідовних наближень, який відносно звичайного диференціального рівняння є новим алгоритмом побудови послідовних наближень. Для досліджуваного рівняння визначено новий тип розв'язку, еквівалентний для імпульсного диференціального рівняння розв'язку з розривом другого роду („розв'язок із голкою"). Запропоновано алгоритмічну формулу загального розв'язку початкової задачі для імпульсного диференціального рівняння.

Нехай x і y — точки $\mathbb{R}$, $f(x,y)$ — функція від (x,y), визначена і неперервна на

$$\Pi: |x| \leq a, \quad |y-y_0| \leq b.$$

Сингулярне інтегральне рівняння, про яке йдеться в даній роботі, це рівняння

$$xy(x) = \int\limits_0^x \big(y(\tau) + f(\tau, y(\tau))\tau\big)d\tau, \tag{1}$$

точка 0 для якого є особливою (сингулярною): в цій точці рівняння (1) є тотожністю на всіх функціях, для яких існує інтеграл в (1), отже, рівняння в цій точці недовизначене. Рівняння (1) утворено з інтегрального зображення

$$xy(x) = \int\limits_0^x \big(y(\tau) + y'(\tau)\tau\big)d\tau, \tag{2}$$

справедливого для кожної неперервно диференційовної на $\mathbb{R}$ функції $y(x)$, за припущення, що функція $y(x)$ є розв'язком задачі Коші

$$y' = f(x,y), \quad y(0) = y_0. \tag{3}$$

Згідно з визначенням рівняння (1) через (2), (3) розв'язок задачі (3) є неперервно диференційовним розв'язком рівняння (1) з початковою умовою

$$y(0) = y_0. \tag{4}$$

Відома теорема Пеано [1] гарантує існування розв’язку задачі Коші (3) принаймні на відрізку

$$J : |x| \le \alpha, \tag{5}$$

де

$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \quad M = \max_{\Pi} |f(x, y)|.$$

Отже, ця теорема гарантує існування неперервно диференційовного (гладкого) на J розв’язку початкової задачі (1), (4).

Чи вичерпують розв’язки задачі Коші (3) множину всіх неперервно диференційовних на J розв’язків початкової задачі (1), (4)?

Ствердну відповідь дає така теорема.

Теорема 1. *Розв’язки задачі Коші* (3), *і лише вони, є неперервно диференційовними розв’язками початкової задачі* (1), (4).

При доведенні використаємо „розклад нуля на множники”

$$x\delta_1(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

за допомогою функції точкового носія, зосередженого в точці 0:

$$\delta_1(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases} \tag{7}$$

Дійсно, якщо $y(x)$ є неперервно диференційовним на відрізку (5) розв’язком початкової задачі (1), (4), то для нього справджується рівність (2), віднявши від якої (1), отримаємо

$$\int\limits_0^x \big(y'(\tau) - f(\tau, y(\tau))\tau\big) d\tau = 0,$$

$$\big(y'(x) - f(x, y(x))\big)x = 0 \tag{8}$$

для всіх x із відрізка (5). Згідно з (7) і (8) маємо

$$\big(y'(x) - f(x, y(x))\big) = \delta_1(x)\big(y'(0) - f(x, y(x))\big) \tag{9}$$

для всіх x із відрізка (5). Оскільки ліва частина рівності (9), згідно з умовами теореми 1, неперервна, то ця рівність можлива тоді і тільки тоді, згідно з визначенням функції $\delta_1(x)$, коли

$$y'(0) = f(0, y_0).$$

Отже,

$$y'(x) = f(x, y(x)) \tag{10}$$

для всіх x із відрізка (5). Рівність (10) з урахуванням початкової умови (4) завершує доведення теореми 1.

Перейдемо тепер до дослідження негладких розв'язків рівняння (1). Нехай неперервна на відрізку (5) функція $y(x)$ задовольняє рівняння (1) і початкову умову (4). Тоді, використавши загальну рівність

$$\int_0^x y(\tau)d\tau = \int_0^1 y(tx)dtx, \tag{11}$$

справедливу для довільної неперервної на $\mathbb{R}$ функції $y(x)$, перетворимо праву частину (1) у добуток:

$$\int_0^1 \big(y(tx) + f(tx, y(tx))tx\big)dtx. \tag{12}$$

Умови на t і розв'язок $y(x)$ рівняння (1) гарантують неперервність на відрізку (5) підінтегральної функції в (1), отже, строго обґрунтовують можливість застосування формули (11) до правої частини (1) і перетворення її в добуток (12) для всіх x із відрізка (5). Згідно з (1) і формулою (11)

$$x\left(y(x) - \int_0^1 \big(y(tx) + f(tx, y(tx))tx\big)dt\right) = 0 \tag{13}$$

для всіх x із відрізка (5). Із (13) випливає рівність

$$\left(y(x) - \int_0^1 \big(y(tx) + f\big(tx, y(tx)\big)tx\big)dt\right) = \delta_1(x)\big(y(0) - y(0)\big) = 0$$

для всіх $|x| \leq \alpha$, отже, на відрізку (5)

$$y(x) = \int_0^1 \big(y(tx) + f\big(tx, y(tx)\big)tx\big)dt. \tag{14}$$

Це доводить, що неперервний на відрізку (5) розв'язок задачі (1), (4) є розв'язком початкової задачі (4), (14).

З іншого боку, якщо $y(x)$ є неперервним на відрізку (5) розв'язком рівняння (14), то підінтегральна функція в (14) при $t = 1$ неперервна по x, отже, до неї можна застосувати формулу (11) та отримати із (14) рівність (1) для всіх $|x| \leq \alpha$. Це доводить, що неперервний на відрізку (5) розв'язок рівняння (14) є розв'язком рівняння (1).

Підсумовуючи наведені міркування, отримуємо такий результат про еквівалентність рівнянь (1) і (14).

Теорема 2. *Кожен визначений і неперервний на відрізку* (5) *розв'язок одного з рівнянь* (1) *чи* (14) *є розв'язком і другого з цих рівнянь.*

Наслідком теорем 1 і 2 є твердження про еквівалентність диференціального рівняння (3) інтегральному (14) у просторі неперервно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій.

***Наслідок* 1.** *Розв'язки задачі Коші* (3), *і лише вони, є гладкими розв'язками початкової задачі* (4), (6).

Щодо рівностей (2), (6) і (11), використаних при доведенні отриманих результатів дослідження рівняння (1), зауважимо таке: перша з них є наслідком тотожності

$$xy(x) = \int_0^x (\tau y(\tau))' d\tau,$$

друга — очевидна на підставі визначення функції $\delta_1(x)$, а остання — результат перетворення її лівої частини у праву заміною τ на tx.

Обґрунтуємо метод послідовних наближень побудови неперервних розв'язків початкової задачі (4), (14).

Теорема 3. *Нехай функція $f(x, y)$ задовольняє щодо змінної y умову Ліпшиця*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le K|y_1 - y_2|$$

для довільної пари точок $(x, y_i) \in \Pi$, $i = 1, 2$. Тоді на відрізку J рекурентними формулами методу послідовних наближень

$$y_0(x) = y_0,$$

$$y_n(x) = \int_0^1 \big(y_{n-1}(\tau x) + f(\tau x, y_{n-1}(\tau x))\tau x\big) d\tau, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

визначається послідовність $y_1(x), \ldots, y_n(x), \ldots$ неперервних функцій, яка задовольняє як початкову умову (4), *так і нерівність*

$$|y_n(x) - y_0| \le \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) M|x|, \quad n \in \mathbb{N},$$

а на відрізку

$$J_0 : |x| \le h,$$

де h — довільне додатне число, що задовольняє нерівність

$$h < \min\left(\alpha, \frac{3}{2K}\right),$$

послідовність (15) *рівномірно збігається до розв'язку $y(x)$ початкової задачі* (4), (14).

Дійсно, оскільки при $n = 1$

$$y_1(x) = y_0 + \int_0^1 f(tx, y_0) tx dt, \tag{16}$$

то, згідно з теоремою про неперервність інтеграла від параметра, $y_1(x)$ є неперервною функцією змінної x для всіх $|x| \le a$, причому $y_1(0) = y_0$.

З умов теореми 3 випливає також оцінка

$$|y_1(x) - y_0| \leq \int_0^1 |f(tx, y_0)|tdt|x| \leq \frac{M}{2}|x| \tag{17}$$

для всіх $|x| \leq a$, а з (17) — оцінка

$$|y_1(x) - y_0| \leq b$$

для всіх x із відрізка J.

Припустимо тепер, що члени послідовності (15) до n включно визначені, неперервні, задовольняють початкову умову $y(0) = y_0$ й оцінку

$$|y_k(x) - y_0| \leq \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) M|x| \leq b \tag{18}$$

для всіх $x \in J$. Тоді підінтегральна функція у формулі (15), що визначає $(n+1)$-ше наближення $y_{n+1}(x)$, задовольняє умови теореми про неперервність інтеграла від параметра і доводить, що $y_{n+1}(x)$ є визначеною, неперервною на J функцією. Ця функція задовольняє початкову умову $y(0) = y_0$ й оцінку

$$|y_{n+1}(x) - y_0| \leq \int_0^1 \big(|y_n(tx) - y_0| + Mt|x|\big)dt \leq$$

$$\leq \int_0^1 \left(\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + 1\right) tdtM|x| = \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) M|x| \leq b$$

для всіх $x \in J$. Цього достатньо, щоб за індукцією стверджувати, що процес побудови послідовних наближень (15) можна продовжувати до нескінченності та отримувати наближення $y_n(x)$ із властивостями, вказаними в теоремі 3.

Оцінимо різницю $y_n(x) - y_{n-1}(x)$. Нехай

$$r_n(x) = |y_n(x) - y_{n-1}(x)|, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{19}$$

З оцінки (17) та позначень (19) випливає, що

$$r_1(x) \leq \frac{M}{2}|x| \tag{20}$$

для всіх $x \in J$. З урахуванням (20) для $r_2(x)$ отримуємо оцінку

$$r_2(x) \leq \int_0^1 r_1(tx)\big(1 + Kt|x|\big)dt \leq$$

$$\leq \frac{M}{2} \int_0^1 t\big(1 + Kt|x|\big)|x|dt = \frac{M}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{K}{3}|x|\right)|x| \tag{21}$$

для всіх $x \in J$.

Припустимо, що аналогічна (21) оцінка

$$r_k(x) \leq \frac{M}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{K}{3}|x|\right)^{k-1}|x| \tag{22}$$

є справедливою для всіх $x \in J$ і $k = 1, 2, \ldots, n$. Тоді, згідно з позначеннями, умовами теореми 3 та оцінкою (22) при $k = n$, для $r_{n+1}(x)$ отримуємо оцінку при $k = n + 1$:

$$r_{n+1}(x) \leq \int\limits_0^1 r_n(tx)\big(1 + Kt|x|\big)dt \leq \frac{M}{2}\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} + \frac{K}{3}|tx|\right)^{n-1}\big(1 + Kt|x|\big)tdt|x| \leq$$

$$\leq \frac{M}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{K}{3}|x|\right)^{n-1}\int\limits_0^1 \big(1 + Kt|x|\big)tdt|x| = \frac{M}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{K}{3}|x|\right)^{n}$$

для всіх $x \in J$. Цього достатньо, щоб за індукцією стверджувати про справедливість оцінки (22) для кожного $k \in \mathbb{N}$.

Нехай

$$\lambda = \frac{1}{2} + \frac{Kh}{3}.$$

Тоді з (22) випливає нерівність

$$r_k(x) \leq \frac{M}{2}\lambda^{k-1}|x|, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{23}$$

для всіх $x \in J$.

Використаємо нерівність (23) для доведення збіжності послідовності наближень (15) рівномірно по x на відрізку $J_0 \subseteq J$. При цьому скористаємося тим, що $y_n(x) - y_0$ є n-ю частинною сумою функціонального ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty}\big(y_k(x) - y_{k-1}(x)\big), \tag{24}$$

який згідно з (23) мажорується на J_0 збіжним рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}\frac{M}{2}|x| = \frac{M}{2(1-\lambda)}|x|.$$

На підставі ознаки Вейєрштрасса функціональний ряд (24) рівномірно на відрізку J_0 збігається до деякої неперервної на J_0 функції $y(x)$. Це доводить рівність

$$\lim_{k\to\infty} y_k(x) = y(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\big(y_k(x) - y_{k-1}(x)\big) \tag{25}$$

рівномірно на J_0 і рівність (4).

Для завершення доведення теореми 3 залишилося лише показати, що $y(x)$ є розв'язком рівняння (14). Дійсно, згідно з умовою Ліпшиця

$$|f(x, y_n(x)) - f(x, y(x))| \leq K|y_n(x) - y(x)| \tag{26}$$

для всіх $x \in J_0$. Тоді з (25), (26) випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} f(x, y_n(x)) = f(x, y(x))$$

рівномірно на J_0. Це дозволяє використати відому теорему про граничний перехід під знаком інтеграла у формулі (15) та отримати в результаті, що $y(x)$, як границя послідовних наближень (15), задовольняє рівняння (1) для всіх $x \in J_0$.

Оцінимо різницю між $y(x)$ і його n-м наближенням $y_n(x)$: згідно з (23), (25) для неї маємо оцінку

$$|y(x) - y_n(x)| \le \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda^{k-1} M|x| = \frac{M\lambda^n}{2(1-\lambda)}|x|$$

для всіх $x \in J_0$ і $n \in \mathbb{N}$.

Оцінимо також різницю між $y(x)$ і його початковим значенням y_0: згідно з (18), переходячи до границі при $n \to \infty$, маємо

$$|y(x) - y_0| \le M|x| \le b$$

для всіх $x \in J_0$.

З'ясуємо тепер питання про гладкість неперервних на J функцій, визначених рекурентними формулами (15). При цьому суттєву роль відіграватиме така лема.

Лема 1. *Для довільної неперервної на $\mathbb{R}$ функції $y(x)$ функція*

$$I(x) = \int_0^1 y(tx)tx dt \tag{27}$$

є неперервно диференційовною на $\mathbb{R}$, а її похідна визначається формулою

$$I'(x) = \left(\int_0^1 y(tx)tx dt\right)' = y(x) - \int_0^1 y(\tau x)\tau d\tau. \tag{28}$$

Дійсно,

$$xI(x) = \int_0^1 y(tx)tx dtx = \int_0^x y(\tau)\tau d\tau = \int_0^x \left(\int_0^\tau y(t)dt\right)' \tau d\tau =$$

$$= \int_0^x y(t)dtx - \int_0^x \int_0^\tau y(t)dt d\tau = F(x)x - \int_0^x F(\tau)d\tau, \quad x \in \mathbb{R},$$

де

$$F(x) = \int_0^x y(t)dt. \tag{29}$$

Оскільки функція (29) неперервно диференційовна на $\mathbb{R}$, то застосовуючи до неї рівність (11), отримуємо

$$xI(x) = F(x)x - \int\limits_0^1 F(\tau x)d\tau x = x\left(F(x) - \int\limits_0^1 F(\tau x)d\tau\right), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{30}$$

Із (30) випливає

$$x\left(I(x) - F(x) + \int\limits_0^1 F(\tau x)d\tau x\right) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Отже, маємо

$$I(x) - F(x) + \int\limits_0^1 F(\tau x)d\tau = \delta_1(x)\big(I(0) - F(0) + F(0)\big) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Це доводить, що

$$\int\limits_0^1 y(tx)txdt = \int\limits_0^x y(t)dt - \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\tau x} y(t)dtd\tau, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{31}$$

Оскільки інтеграли у правій частині (31) неперервно диференційовні на $\mathbb{R}$, то і ліва частина (31) є неперервно диференційовною на $\mathbb{R}$. Більше того, з огляду на те, що підінтегральна функція другого інтеграла у правій частині (31) є неперервно диференційовною на $\mathbb{R}$, (31) можна здиференціювати з використанням теореми про диференціювання інтеграла по параметру й отримати рівність (28) для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Для доведення теореми 3 достатньо показати, що послідовність визначених теоремою 3 функцій (15) є неперервно диференційовною на J і такою, що послідовність її похідних рівномірно збігається на J_0 до похідної границі послідовності функцій (15), неперервних на J.

Переходячи до доведення, розглянемо послідовність функцій $y_1(x), \ldots, y_n(x), \ldots$, визначених теоремою 3. Згідно з цією теоремою кожна з функцій цієї послідовності неперервна на J, задовольняє початкову умову $y(0) = y_0$ й оцінку (18).

Згідно з викладеним і лемою 1 $y_1(x)$ є неперервно диференційовною на J функцією, похідна якої

$$y_1'(x) = f(x, y_0) - \int\limits_0^1 f(tx, y_0)tdt \tag{32}$$

для всіх $x \in J$.

Припустимо, що визначена теоремою 3 послідовність функцій $y_1(x), \ldots, y_n(x), \ldots$ для всіх $k = 1, 2, \ldots, n$ є неперервно диференційовною на J. Більше того, нехай похідні функцій $y_1(x), \ldots, y_n(x), \ldots$ для всіх $k = 1, 2, \ldots, n$ визначаються на J формулами

$$\begin{gathered} y_0'(x) = 0, \\ y_k'(x) = f(x, y_{k-1}(x)) + \int\limits_0^1 (y_{k-1}'(tx) - f(tx, y_{k-1}(tx)))tdt. \end{gathered} \tag{33}$$

Тоді згідно з теоремою 3 неперервна на J функція $y_{n+1}(x)$, визначена формулою (15),

$$y_{n+1}(x) = \int_0^1 \big(y_n(tx) + f(tx, y_n(tx))tx\big)tdt,$$

з урахуванням припущень, умов теореми 3, теореми про диференціювання інтеграла за параметром і леми 1, є неперервно диференційовною на J, а її похідна визначається формулою

$$y'_{n+1}(x) = \int_0^1 y'_n(tx)tdt + \left(\int_0^1 f(tx, y_n(tx))txdt\right)' =$$

$$= \int_0^1 y'_n(tx)tdt + f(x, y_n(x)) - \int_0^1 f(\tau x, y_n(\tau x))\tau d\tau =$$

$$= f(x, y_n(x)) + \int_0^1 \big(y'_n(tx) - f(tx, y_n(tx))\big)tdt \tag{34}$$

для всіх $x \in J$. Цього достатньо, щоб процес побудови неперервно диференційовних на J наближень (15) можна було продовжити до нескінченності й отримати для похідної цієї послідовності формулу (33). Із (33) отримуємо рівність

$$y'_k(x) - f(x, y_k(x)) = f(x, y_{k-1}(x)) - f(x, y_k(x)) +$$
$$+ \int_0^1 \big(y'_{k-1}(tx) - f(tx, y_{k-1}(tx))\big)tdt \tag{35}$$

для всіх $x \in J$ і $k \in \mathbb{N}$.

Покладемо

$$\begin{gathered} Y_0(x) = -f(x, y_0), \\ Y_k(x) = y'_k(x) - f(x, y_k(x)), \quad k \in \mathbb{N}, \end{gathered} \tag{36}$$

і запишемо (35) у вигляді

$$Y_k(x) = f(x, y_{k-1}(x)) - f(x, y_k(x)) + \int_0^1 Y_{k-1}(tx)tdt, \quad x \in J, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{37}$$

З урахуванням умови Ліпшиця з (37) отримуємо нерівність

$$|Y_k(x)| \leq K|y_k(x) - y_{k-1}(x)| + \int_0^1 |Y_{k-1}(tx)|tdt \tag{38}$$

для всіх $x \in J$ і $k \in \mathbb{N}$.

З урахуванням оцінки (22) із (38) отримуємо нерівність

$$|Y_k(x)| \leq \frac{KM}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{K}{3}|x|\right)^{k-1}|x| + \int\limits_0^1 |Y_{k-1}(tx)|tdt \tag{39}$$

для всіх $x \in J$ і $k \in \mathbb{N}$, зокрема, враховуючи позначення, маємо

$$|Y_1(x)| \leq \frac{KM}{2}|x| + \int\limits_0^1 |f(tx, y_0)|tdt \leq \frac{1}{2}\left(1+K|x|\right)M \tag{40}$$

для всіх $x \in J$. Із (39), (40) одержуємо

$$|Y_2(x)| \leq \frac{KM}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{K}{3}|x|\right)|x| + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \big(1+Kt|x|\big)tdtM =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{K}{3}|x|\right)\big(1+K|x|\big)M, \quad x \in J.$$

Припустимо тепер, що всі функції $Y_k(x)$ до n-ї включно задовольняють оцінку

$$|Y_k(x)| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{K}{3}|x|\right)^{k-1}\big(1+K|x|\big)M, \quad x \in J. \tag{41}$$

Тоді згідно з (39) і (41) для $Y_{n+1}(x)$ отримуємо оцінку (41) при $k=n+1$:

$$|Y_{n+1}(x)| \leq \frac{KM}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{K}{3}|x|\right)^{n}|x| + \int\limits_0^1 |Y_n(tx)|tdt \leq$$

$$\leq \frac{KM}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{K}{3}|x|\right)^{n}|x| + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2}+\frac{K}{3}t|x|\right)^{n-1}\big(1+Kt|x|\big)tdtM \leq$$

$$\leq \frac{KM}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{K}{3}|x|\right)^{n}|x| + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{K}{3}|x|\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{K}{3}|x|\right)M =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{K}{3}|x|\right)^{n}\big(1+K|x|\big)M, \quad x \in J.$$

Цього достатньо, щоб за індукцією стверджувати про справедливість оцінки (41) для кожного $k \in \mathbb{N}$.

Використаємо (41) для оцінки різниці $y_n'(x) - y_{n-1}'(x)$. Нехай

$$r_n'(x) = |y_n'(x) - y_{n-1}'(x)|, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Тоді згідно з (41) і позначеннями маємо

$$r_{n+1}'(x) = |Y_{n+1}(x) - Y_n(x) + f(x, y_{n+1}(x)) - f(x, y_n(x))| \leq$$

$$\leq |Y_{n+1}(x)| + |Y_n(x)| + K|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{K}{3}|x|\right)^{n} + \left(\frac{1}{2}+\frac{K}{3}|x|\right)^{n-1}\right)\big(1+K|x|\big)M + Kr_{n+1}(x) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{K}{3}|x|\right)^{n-1}\left(\frac{3}{2}+\frac{K}{3}|x|\right)\big(1+K|x|\big)M + Kr_{n+1}(x) \tag{42}$$

для всіх $x \in J$ і $n \in \mathbb{N}$.

З урахуванням оцінки (22) при $k = n+1$ нерівність (42) можна продовжити таким чином:

$$r'_{n+1}(x) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{K}{3}|x|\right)^{n-1}\left[\left(\frac{3}{2}+\frac{K}{3}|x|\right)\big(1+K|x|\big) + K\left(\frac{1}{2}+\frac{K}{3}|x|\right)|x|\right] M =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{K}{3}|x|\right)^{n-1} M\beta(x), \tag{43}$$

де $\beta(x)$ — функція, що стоїть у квадратних дужках. Згідно з (43)

$$|y'_{n+1}(x) - y'_n| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{K}{3}|x|\right)^{n-1} M\beta(x) \tag{44}$$

для всіх $x \in J$ і $n \in \mathbb{N}$.

Стандартні міркування, аналогічні наведеним при доведенні теореми 3, приводять згідно з оцінкою (41) до того, що

$$\lim_{n\to\infty} Y_n(x) = 0$$

рівномірно на J_0, отже, згідно з позначеннями доводять, що

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

для всіх $x \in J_0$. Ці ж міркування згідно з оцінками (44) доводять, що

$$y'(x) = \lim_{n\to\infty} y'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\big(y'_n(x) - y'_{n-1}(x)\big) \tag{45}$$

для всіх $x \in J_0$.

Очевидно, що швидкість збіжності похідних наближень (15) до $y'(x)$ аналогічна такій швидкості збіжності самих наближень (15): згідно з (44), (45)

$$|y'(x) - y'_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} r_k(x) \leq \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda^{k-2}M\beta(x) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\lambda^{k-1}M\beta(x) = \frac{M\lambda^{n-1}}{2(1-\lambda)}\beta(x) \tag{46}$$

для всіх $x \in J_0$ і $n \in \mathbb{N}$. Зазначимо також, що оскільки згідно з формулами (32), (34)

$$y'_1(0) = \frac{1}{2}f(0, y_0), \quad y'_{n+1}(0) = \frac{1}{2}y'_n(0) + \frac{1}{2}f(0, y_0) \tag{47}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$, то з (47) за індукцією отримуємо точне значення для $y'_n(0)$:

$$y'_n(0) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) f(0, y_0), \quad n \in \mathbb{N},$$

а з нього — точне значення різниці

$$y'(0) - y'_n(0) = \frac{1}{2^n} f(0, y_0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Оцінки (22), (46) доводять наступне твердження про швидкість збіжності ітераційного процесу (15) і (33).

***Наслідок* 2.** *Нехай виконуються умови теореми* 3. *Тоді визначені рекурентними формулами* (15) *і* (33) *функції* $y_n(x) - y_0$ *і* $y'_n(x)$ *рівномірно на* J_0 *збігаються до своїх граничних функцій* $y(x) - y_0$ *і* $y'(x)$ *зі швидкістю геометричної прогресії зі знаменником*

$$q_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{K}{3}|x| \le \lambda.$$

Відмітимо нарешті характеристичну особливість неперервно диференційовних наближень, визначених рекурентними формулами (15), (33). Для цього запишемо диференціальне рівняння (3) у вигляді операторного рівняння

$$L(y) = 0 \tag{48}$$

й отримаємо згідно з (36), що на J

$$L(y_n) = Y_n(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отже, згідно із загальноприйнятою термінологією $Y_n(x)$ є нев'язкою $y_n(x)$ як наближеного розв'язку рівняння (48) та однією з характеристик величини відхилення $y_n(x)$ від точного розв'язку $y(x)$ рівняння (48).

***Наслідок* 3.** *Нехай виконуються умови теореми* 3. *Тоді на* J_0

$$y(x) = y_1(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 Y_n(tx) tx dt. \tag{49}$$

Для доведення наслідку використаємо формулу (2) і отримаємо на J

$$xy_n(x) = \int_0^x \big(y_n(\tau) + y'_n(\tau)\tau\big) d\tau, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{50}$$

Використавши формулу (11), рівність (50) перетворимо у рівність

$$xy_n(x) = \int_0^1 \big(y_n(tx) + y'_n(tx)tx\big) dtx,$$

а останню „скоротимо" на x за допомогою розкладу (6):

$$x\left(y_n(x) - \int_0^1 \big(y_n(tx) + y'_n(tx)tx\big) dtx\right) = 0,$$

$$y_n(x) - \int_0^1 \big(y_n(tx) + y'_n(tx)tx\big) dtx = \delta_1(x)(y_n(0) - y_n(0)) = 0. \tag{51}$$

Отже, згідно з (51)

$$y_n(x) = \int\limits_0^1 \big(y_n(tx) + y_n'(tx)tx\big)dtx, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{52}$$

на J. Із формул (15), (52) випливає, що

$$y_{n+1}(x) - y_n(x) = \int\limits_0^1 \big(f(tx, y_n(tx)) - y_n'(tx)tx\big)dtx$$

для всіх $x \in J$ і $n \in \mathbb{N}$, або, враховуючи позначення (36),

$$y_{n+1}(x) - y_n(x) = -\int\limits_0^1 Y_n(tx)txdt, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{53}$$

для всіх $x \in J$. Ця рівність зберігається і для $n = 0$, що випливає з означення $Y_0(x)$ і формули (16)

$$y_1(x) - y(0) = \int\limits_0^1 f(tx, y_0)txdt = -\int\limits_0^1 Y_0(tx)txdt \tag{54}$$

для всіх $x \in J$.

Підставивши замість $y_k(x) - y_{k-1}(x)$ у формулу (25) її значення (53) і (54), отримаємо рівність (49):

$$y(x) = y_0 + \sum_{k=n}^{\infty}(y_k(x) - y_{k-1}(x)) = y_0 - \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^1 Y_{k-1}(tx)txdt =$$

$$= y_0 - \int\limits_0^1 Y_0(tx)txdt - \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^1 Y_n(tx)txdt =$$

$$= y_0 + y_1(x) - y_0 - \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^1 Y_n(tx)txdt = y_1(x) - \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^1 Y_n(tx)txdt$$

для всіх $x \in J_0$.

***Наслідок* 4.** *Нехай виконуються умови теореми* 3. *Тоді на* J_0

$$y'(x) = y_1'(x) - \sum_{n=1}^{\infty}\left(Y_n(x) - \int\limits_0^1 Y_n(\tau x)\tau d\tau\right).$$

Дійсно, згідно з позначеннями (36) і неперервною диференційовністю функцій $y_n(x)$ на J маємо неперервність на J функцій $Y_n(x)$. Тоді з (53) випливає, що

$$y_{n+1}'(x) - y_n'(x) = \left(-\int\limits_0^1 Y_n(tx)txdt\right)', \quad n \in \mathbb{N},$$

для всіх $x \in J$. Застосовуючи до правої частини (54) лему 1, отримуємо рівність

$$y'_{n+1}(x) - y'_n(x) = -Y_n(x) + \int_0^1 Y_n(\tau x)\tau d\tau, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{55}$$

для всіх $x \in J$.

Підставляючи замість $y'_{n+1}(x) - y'_n(x)$ у формулу (45) її значення (55), маємо

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(y'_n(x) - y'_{n-1}(x)\big) = y'_1(x) + \sum_{k=2}^{\infty} \left(-Y_{k-1}(x) + \int_0^1 Y_{k-1}(\tau x)\tau d\tau\right) =$$

$$= y'_x - \sum_{n=1}^{\infty} \left(Y_n(x) - \int_0^1 Y_n(\tau x)\tau d\tau\right)$$

для всіх $x \in J_0$.

Перейдемо до розгляду негладких розв'язків рівняння (1) і вияснимо насамперед чи є серед них неперервні.

Нехай $y(x)$ — такий розв'язок і він визначений на деякому відрізку $J \subseteq \mathbb{R}$, що містить точку 0 та має початковим значенням $y(0) = y_0$. Тоді згідно з теоремою 2 $y(x)$ є розв'язком на J рівняння (14), отже, для $y(x)$ на J справджується рівність (14):

$$y(x) = \int_0^1 y(tx)dt + \int_0^1 f(tx, y(tx))tx\, dt. \tag{56}$$

Оскільки функція $f(x, y)$ неперервна відносно (x, y) на прямокутнику П, то підінтегральна функція другого з інтегралів формули (56) неперервна як функція змінних (t, x) для $(t, x) \in$ $\in [0, 1] \times J$. Тоді

$$\int_0^1 f(tx, y(tx))txdt = \int_0^1 \frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau x, y(\tau x))d\tau txdt = \int_0^1 f(\tau x, y(\tau x))d\tau x-$$

$$-\int_0^1 \int_0^t f(\tau x, y(\tau x))d\tau dtx = \int_0^x f(t, y(t))dt - \int_0^1 \int_0^{tx} f(\tau_1, y(\tau_1))d\tau_1 dt, \quad x \in J. \tag{57}$$

З урахуванням (57) рівність (56) набирає вигляду

$$y(x) - \int_0^x f(t, y(t))dt = \int_0^1 \left(y(tx) - \int_0^{tx} f(\tau, y(\tau))d\tau\right) dt. \tag{58}$$

Позначимо різницю у лівій частині формули (58) через $F(x)$:

$$F(x) = y(x) - \int_0^x f(t, y(t))dt \tag{59}$$

і запишемо (58) відносно $F(x)$:

$$F(x) = \int\limits_0^1 F(\tau x)d\tau, \quad x \in J. \tag{60}$$

Одним із розв'язків рівняння (60) є стала, тоді

$$F(x) = F(0) = y_0, \quad x \in J. \tag{61}$$

Чи є функція (61) єдиною серед неперервних на J розв'язків рівняння (60), що задовольняють початкову умову $F(0) = y_0$?

Очевидно, що відповідь на це питання зводиться до того, чи єдиним неперервним розв'язком на $\mathbb{R}$ початкової задачі

$$z(x) = \int\limits_0^1 z(tx)dt, \quad z(0) = 0, \tag{62}$$

є тривіальний розв'язок $z(x) = 0$? Ствердну відповідь на питання дає така лема.

Лема 2. *Єдиним неперервним на* $\mathbb{R}$ *розв'язком рівняння* (62) *є тривіальний розв'язок* $z(x) = 0$.

Дійсно, нехай лема 2 не має місця. Тоді на $\mathbb{R}$ існує розв'язок $z(x)$ рівняння (62), для якого

$$z(x) \not\equiv z(0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тепер, очевидно, з неперервності розв'язку $z(x)$ випливає існування на $\mathbb{R}$ відрізка J_1 такого, згідно з теоремою Вейєрштрасса про найменше та найбільше значення, що

$$m = \min_{J_1} z(x) = z(x_1) \le z(x) \le \max_{J_1} z(x) = z(x_2) = m_1 \tag{63}$$

для всіх $x \in J_1$ і сталих m, m_1, що задовольняють умову

$$m < m_1. \tag{64}$$

Оскільки поряд із $z(x)$ розв'язком рівняння (62) є стала, можна вважати, що $m > 0$.

Припустимо, що $0 < x_1 < x_2$. Тоді, оскільки згідно з (11) із (62) випливає рівність

$$xz(x) = \int\limits_0^x z(\tau)d\tau, \quad x \in \mathbb{R},$$

згідно з (63) маємо

$$xz(x) = \int\limits_0^{x_1} z(\tau)d\tau + \int\limits_{x_1}^x z(\tau)d\tau = x_1 z(x_1) + \int\limits_{x_1}^x z(\tau)d\tau \le$$
$$\le x_1 m + m_1(x - x_1), \quad x > x_1, \quad x \in J_1. \tag{65}$$

Отже, згідно з (65)

$$x_2 z(x_2) = x_2 m_1 \le x_1 m + (x_2 - x_1)m_1,$$

$$x_1(m - m_1) \geq 0, \quad m \geq m_1,$$

що суперечить умові (64). Це доводить, що $z(x)$ є сталою на J_1, коли

$$x_2 > x_1 > 0. \tag{66}$$

Припустимо тепер, що

$$x_1 > x_2 > 0. \tag{67}$$

Тоді згідно з (63)

$$xz(x) = \int_0^{x_2} z(\tau)d\tau + \int_{x_2}^{x} z(\tau)d\tau = x_2 z(x_2) +$$

$$+ \int_{x_2}^{x} z(\tau)d\tau \geq x_2 m_1 + m(x - x_2), \quad x \geq x_2, \quad x \in J_1. \tag{68}$$

Отже, згідно з (68)

$$x_1 z(x_1) = x_1 m \geq x_2 m_1 + (x_1 - x_2)m, \quad x_2(m_1 - m) \leq 0, \quad m_1 \leq m,$$

що суперечить умові (64).

Це доводить, що $z(x)$ є сталою на J_1, якщо виконується умова (67).

Оскільки згідно з (63), (64) $x_1 \neq x_2$, то нерівності (66), (67) вичерпують всі можливі розміщення точок x_1, x_2 на півосі

$$x > 0. \tag{69}$$

Це доводить, що на півосі (69) немає відрізка, на якому неперервний розв'язок рівняння (62) відмінний від сталої.

З інваріантності рівняння (62) відносно заміни x на $-x$ випливає, що такого відрізка немає і на півосі

$$x < 0. \tag{70}$$

Це означає, що на довільному відрізку півосі (69), а отже, на всій півосі (69)

$$z(x) = c_1,$$

а на довільному відрізку півосі (70), а отже, на всій півосі (70)

$$z(x) = c,$$

де c та c_1 — сталі. Неперервність функції $z(x)$ на $\mathbb{R}$, а отже, і в точці $x = 0$, доводить рівність

$$c_1 = c$$

для всіх $x \in \mathbb{R}$, що завершує доведення леми 2.

Лема 2 дає ствердну відповідь на питання про єдиність неперервного на $\mathbb{R}$ розв'язку початкової задачі (62).

Відносно позначення (59) лема 2 стверджує справедливість рівності (61), тобто доводить такий результат.

Теорема 4. *Кожен неперервний на J розв'язок початкової задачі* (1), (4) *є розв'язком інтегрального рівняння*

$$y(x) = y_0 + \int_0^x f(\tau, y(\tau))d\tau.$$

Згідно з теоремою 4 серед негладких розв'язків рівняння (1) немає неперервних розв'язків: всі негладкі розв'язки рівняння (1) є розривними.

Враховуючи властивості функції $f(x, y)$, природно розривні розв'язки $y(x)$ рівняння (1) вважати інтегровними на відрізку їх визначення J і такими, для яких точки $(x, y(x)) \in \Pi$ для $x \in J$. Останнє означає, що $y(x)$ не лише інтегровна, а й обмежена на J функція. Тоді, згідно з теоремою про абсолютну неперервність інтеграла Лебега [2], права частина рівності (1) для $y(x)$ визначає абсолютно неперервну на J функцію. Тепер неперервною на відрізках $J_\varepsilon :$ $|x| \geq \varepsilon, x \in J$, де ε — довільно мала додатна стала, є функція

$$y(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \big(y(\tau) + f(\tau, y(\tau))\tau\big) d\tau. \tag{71}$$

Згідно з (71)

$$y(x) = \frac{1}{x} \int_0^\varepsilon \big(y(\tau) + f(\tau, y(\tau))\tau\big) d\tau + \int_\varepsilon^x \big(y(\tau) + f(\tau, y(\tau))\tau\big) d\tau =$$

$$= \frac{\varepsilon}{x} y(\varepsilon) + \frac{1}{x} \int_\varepsilon^x \big(y(\tau) + f(\tau, y(\tau))\tau\big) d\tau \tag{72}$$

на J_ε, і права частина (72) є неперервно диференційовною на J_ε.

Диференціюючи (72), отримуємо

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{x} + \frac{y(x)}{x} + \frac{1}{x} f(x, y(x))\varepsilon = f(x, y(x)) \tag{73}$$

для всіх $x \in J_\varepsilon$.

Це означає, оскільки ε — довільно мала додатна стала, що рівність (73) виконується в півінтервалах J, розділених точкою $x = 0$.

Підсумовуючи викладене, отримуємо таке твердження.

Теорема 5. *На множині визначених і інтегровних на J функцій $y(x)$, для яких $(x, y(x)) \in$ $\in \Pi$ при всіх $x \in J$, розв'язки початкової задачі* (1), (4) *задовольняють на J початкову задачу*

$$y' = f(x, y), \quad x \neq 0, \quad y(0) = y_0. \tag{74}$$

Доповнимо задачу (74) умовами поведінки її розв'язку, позначивши його через $y(x, y_0)$, в околі точки $x = 0$, визначивши їх умовами „миттєвого перекидання" $y(x, y_0)$ із граничного значення

$$y(0-, y_0) = \lim_{x \uparrow 0} y(x, y_0) \tag{75}$$

спочатку в точку y_0, а з неї — у граничне значення

$$y(0+, y_0) = \lim_{x \downarrow 0} y(x, y_0). \tag{76}$$

Умови „перекидання” визначимо функціями стрибків $I(y)$ та $I_1(y)$:

$$y_0 - y(0-, y_0) = I(y_0), \quad y(0+, y_0) - y_0 = I_1(y_0), \tag{77}$$

заданими тим чи іншим чином в околі точки y_0.

Формули (75) – (77) однозначно довизначають початкову задачу (74) і приводять до такого результату.

Теорема 6. *Кожен визначений на відрізку* $J_1 \subseteq J$, *що містить точку* 0, *розв'язок задачі* (74), (77) *є розв'язком початкової задачі* (1), (4) *для всіх* $x \in J_1$.

Дійсно, оскільки розв'язок задачі (74), (77), згідно з його визначенням, є кусково-диференційовною на J_1 функцією з можливими розривами лише в точці $x = 0$, то він належить множині інтегровних на J_1 функцій, для яких $(x, y(x)) \in \Pi$ при всіх $x \in J_1$, і задовольняє на J_1 задачу (74), отже,

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

для всіх $x \in J_\varepsilon$ з достатньо малим $\varepsilon > 0$.

Це приводить до ланцюга рівностей на J_ε від (71) до (73), а з ними і до (1), отже, до справедливості рівності (1) в півінтервалах J_1, розділених точкою $x = 0$. Цей розв'язок задачі (74), (77) є розв'язком початкової задачі (1), (4), доповненої умовами (77).

Зауважимо, що задача (74), (77), яка виникла у зв'язку з дослідженням розривних розв'язків сингулярного рівняння (1), в частинному випадку, коли

$$I(y_0) = 0,$$

є однією з найпростіших задач теорії диференціальних рівнянь із миттєвою зміною [3 – 5] — теорії імпульсних диференціальних рівнянь. Такі задачі цілком „фізичні” і можуть виникати при дослідженні еволюційних процесів із миттєвими в часі змінами еволюцій у фіксованому моменті часу, зокрема, як для задачі (74) в момент часу $t = 0$ при $x = t$.

У зв'язку з викладеним актуальним є дослідження самої задачі (74), (77) без її зв'язку з розв'язками рівняння (1).

Наведемо кілька результатів такого дослідження. Почнемо розгляд із простішого з рівнянь (74), коли $f \equiv 0$. Тоді (74) набирає вигляду

$$y' = 0, \quad x \neq 0, \quad y(0) = y_0, \tag{78}$$

з умовою (77).

Розв'язком задачі (78) з умовою (77) для всіх $x \in \mathbb{R}$ є функція

$$y(x) = \begin{cases} y_0 - I(y_0), & x < 0, \\ y_0, & x = 0, \\ y_0 + I_1(y_0), & x > 0. \end{cases}$$

За допомогою функцій $\theta(x)$ і $\delta_1(x)$, де

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

— функція Хевісайда, розв'язок задачі (74), (77) можна записати у вигляді суми

$$y(x) = c + c_1\theta(x) + c_2\delta_1(x), \tag{79}$$

де c, c_1 та c_2 — довільні сталі, пов'язані зі значеннями $y_0, I(y_0)$ і $I_1(y_0)$ формулами

$$c = y_0 - I(y_0), \quad c + c_1 = y_0 + I_1(y_0), \quad c + c_1 + c_2 = y_0.$$

Згідно з (79) розривними розв'язками задачі (74), (77) є як розривні функції з розривом першого роду:

$$y(x) = c + c_1\theta(x), \quad c_1 \neq 0, \tag{80}$$

так і розривні функції з розривом другого роду — „сталі з голкою" (по аналогії з „игольчатыми вариациями" Понтрягіна [6]):

$$y(x) = c + c_2\delta_1(x), \quad c_2 \neq 0. \tag{81}$$

Розв'язки (80), (81) набувають лише двох значень. Серед загального розв'язку (79) такими є ще

$$y(x) = c + c_1\big(\theta(x) - \delta_1(x)\big), \quad c_1 \neq 0,$$

та ті, що набувають трьох значень, — це розв'язки (79), для яких або

$$c_1c_2 \neq 0,$$

або

$$c_1 + c_2 \neq 0.$$

Розв'язки (80) і (81) є розривними з розривом першого роду, які відрізняються лише значеннями в точці $x = 0$, інакше це розривні розв'язки зі стрибками в точці розриву, рівними за значенням.

Розв'язки (79), що набувають трьох значень, — це розривні розв'язки зі стрибками в точці розриву і значенням у цій точці, відмінним від його граничних значень зліва та справа від цієї точки, зокрема рівним середньому їхньому значенню.

Розглянемо нарешті загальну задачу (74), (77) і доведемо для неї теорему існування розривних розв'язків.

Теорема 7. *Нехай*

$$y(x, y_0)$$

є розв'язком на J *задачі Коші* (11). *Тоді якщо*

$$|I(y_0)| \leq b\lambda, \quad |I_1(y_0)| \leq b\lambda \tag{82}$$

для довільного фіксованого $\lambda \in (0, 1)$, *то функція*

$$y(x) = y\big(x, y_0 - I(y_0) + (I(y_0) + I_1(y_0))\theta(x) - I_1(y_0)\delta_1(x)\big) \tag{83}$$

для всіх x *із відрізка*

$$J_1 : |x| \leq \alpha_1, \quad \alpha_1 = \min\left(a, (1-\lambda)\frac{b}{M}\right), \tag{84}$$

є розв'язком задачі (74), (77).

Дійсно, згідно з позначеннями для $x < 0$ функція (83) збігається з функцією

$$y(x, c),$$

отже, є розв'язком задачі Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = c. \tag{85}$$

Згідно з першою з нерівностей (82) прямокутник

$$\Pi_1 : |x| \leq a, \quad |y - c| \leq (1-\lambda)b$$

лежить в П: якщо $(x, y) \in \Pi_1$, то

$$|y - y_0| \leq |y - c| + |c - y_0| \leq (1-\lambda)b + b\lambda = b.$$

Отже, права частина рівняння (84) для всіх $(x, y) \in \Pi_1$ визначена, неперервна і задовольняє нерівність

$$\max_{\Pi_1} |f(x, y)| \leq M.$$

Згідно з теоремою Пеано цього достатньо, щоб задача Коші (85) мала розв'язок для всіх x із відрізка

$$|x| \leq \alpha_1 = \min\left(a_1, \frac{b}{M}(1-\lambda)\right),$$

а отже, достатньо, щоб функція (83) була розв'язком задачі (74), (77) для всіх x із півінтервалу

$$[-\alpha_1, 0).$$

Аналогічно, згідно з позначеннями для $x > 0$ функція (83) збігається з функцією

$$y(x, c + c_1), \tag{86}$$

а отже, є розв'язком задачі Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = c + c_1.$$

Повторюючи міркування, наведені для задачі Коші (85), доводимо, що функція (86) є розв'язком задачі (74), (77) для всіх x із півінтервалу

$$(0, \alpha_1].$$

Нарешті, згідно з позначеннями для $x = 0$ функція (83) збігається зі сталою $y(0, c + c_1 + c_2) = = y(0, y_0) = y_0$, а отже, задовольняє початкову умову задачі (74).

Це доводить, що на J_1 функція (83) є розв'язком задачі (74), (77).

Із теорем 6 і 7 випливає такий наслідок.

Наслідок 5. *При виконанні умов теореми* 7 *функція* (83) *для всіх* x *із відрізка* J_1 *є розв'язком початкової задачі* (1), (4).

Очевидним доповненням наведених результатів є припущення, що одна з функцій $I_{\upsilon}(x)$, $\upsilon = 1, 2,$ задовольняє умову

$$|I_{\upsilon}(y_0)| > b,$$

яке включає в задачу (74), (77) непродовжувані поза точку $x = 0$ розв'язки.

За термінологією теорії еволюційних систем Т. Вожеля [7] такі розв'язки „вмирають”, викинуті миттєво стрибком при досягненні точки $x = 0$ за межі області П.

Суттєві доповнення отримують наведені результати, якщо вважати добуток $f(x, y)y$ в (1) єдиною функцією

$$g(x, y) = f(x, y)x$$

із властивостями функції $f(x, y)$.

У таких рівняннях можливі вже неперервні розв'язки, які не є неперервно диференційовними в області їх визначення.

Зрештою результати, наведені в даній роботі, очевидним чином залишаються справедливими для системи рівнянь (1).

Література

1. *Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.* Диференціальні рівняння. — Київ: Вид.-поліграф. центр „Київ. ун-т”, 2010. — 527 с.
2. *Соболев В. И.* Лекции по дополнительным главам математического анализа. — М.: Наука, 1968. — 288 с.
3. *Самойленко А. М., Мышкис А. Д.* Системы с толчками в заданные моменты времени // Мат. сб. — 1967. — **74**, № 2. — С. 202 – 208.
4. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 287 с.
5. *Трофимчук Е. П., Трофимчук С. И.* Импульсные системы с фиксированными моментами толчков общего расположения: существование, единственность решения и корректность задачи Коши // Укр. мат. журн. — 1990. — **42**, № 2. — С. 230 – 237.
6. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1983. — 392 с.
7. *Vogel T.* Théorie des systémes evolutifis. — Paris: Gautnier-Villous, 1965. — 172 p.

Одержано 05.03.19