УДК 517.929; 517.958:531–133

В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, Рівне)

ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЮВАННЯМИ Й ОБМЕЖЕННЯМИ НА ЗАПІЗНЮВАННЯ ТА ПОХІДНІ РОЗВ'ЯЗКІВ

We establish conditions for the existence and uniqueness of the solutions of nonlinear systems of differential equations with delays and restrictions imposed on the delays and derivatives of the solutions.

Знайдено умови існування та єдиності розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь із запізнюваннями й обмеженнями на запізнювання та похідні розв'язків.

Незважаючи на значні досягнення теорії диференціальних рівнянь із відхилювальним аргументом (див., наприклад, [1 – 11]), деяким класам систем, пов'язаних із цією теорією, не приділено належної уваги. До такого типу систем відносяться гібридні системи, що пов'язують диференціальні рівняння з відхилювальним аргументом, недиференціальні співвідношення між запізнюваннями і значеннями розв'язків у певні моменти часу та обмеження на похідні розв'язків у вигляді нерівностей. Такого типу системи потрібні для небесної механіки, що враховує скінченність швидкості гравітації (див. [12, 13]). Підставою для проведення досліджень таких систем є теорія відносності Ейнштейна, в якій постулюється, що швидкість гравітації збігається зі швидкістю світла, експериментальні дослідження С. М. Копєйкіна і Е. Фомалонта про фундаментальну границю швидкості гравітації [14] та публікації автора [12, 13]. Ці системи мають і самостійний інтерес.

Оскільки методи теорії диференціальних рівнянь із відхилювальним аргументом безпосередньо не застосовні до дослідження такого типу систем, то природними і важливими є дослідження цих складніших у математичному сенсі систем і з'ясування для них насамперед умов існування та єдиності розв'язків.

1. Основний об'єкт досліджень. Розглянемо систему нелінійних диференціальних рівнянь із запізнювальним аргументом

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_1(t) &= \frac{A_1}{|\vec{r}_2(t-\tau_2(t))-\vec{r}_1(t)|^3}\,(\vec{r}_2(t-\tau_2(t))-\vec{r}_1(t)), \\ \ddot{\vec{r}}_2(t) &= \frac{A_2}{|\vec{r}_1(t-\tau_1(t))-\vec{r}_2(t)|^3}\,(\vec{r}_1(t-\tau_1(t))-\vec{r}_2(t)), \end{aligned} \qquad t\in[t_0,T), \tag{1}$$

в якій запізнювання $\tau_1(t)$ і $\tau_2(t)$ задовольняють співвідношення

$$c\tau_1(t) = |\vec{r}_1(t-\tau_1(t))-\vec{r}_2(t)|, \quad t\in[t_0,T), \tag{2}$$

і

$$c\tau_2(t) = |\vec{r}_2(t-\tau_2(t))-\vec{r}_1(t)|, \quad t\in[t_0,T), \tag{3}$$

A_1 і A_2 — додатні сталі, t_0 — довільний початковий момент часу, $T\in(t_0,+\infty)\cup\{+\infty\}$, $\vec{r}_1(t)$ і $\vec{r}_2(t)$ — векторні функції зі значеннями в $\mathbb{R}^2$, $|\vec{r}_2(t-\tau_2(t))-\vec{r}_1(t)|$ і $|\vec{r}_1(t-\tau_1(t))-\vec{r}_2(t)|$ — евклідові довжини векторів $\vec{r}_2(t-\tau_2(t))-\vec{r}_1(t)$ і $\vec{r}_1(t-\tau_1(t))-\vec{r}_2(t)$, c — додатна стала.

Такого типу рівняння є математичною моделлю руху двох тіл з урахуванням скінченної швидкості гравітації [12, 13].

Дослідимо систему рівнянь (1) – (3) при виконанні умови

$$\sup_{t\in[t_0,T)} \max\left\{\left|\dot{\vec{r}}_1(t-\tau_1(t))\right|, \left|\dot{\vec{r}}_2(t-\tau_2(t))\right|, \left|\dot{\vec{r}}_1(t)\right|, \left|\dot{\vec{r}}_2(t)\right|\right\} = v^* < c. \tag{4}$$

Вважатимемо, що для всіх $t \in [t_0, T)$

$$\left|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)\right|\left|\vec{r}_1(t-\tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)\right|\left|\vec{r}_2(t-\tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)\right| \neq 0. \tag{5}$$

Очевидно, що перш ніж досліджувати систему (1) – (3), потрібно показати, що вона має розв'язки. Цій задачі ми приділимо увагу в даній статті і наведемо алгоритм знаходження її розв'язків, зручний для використання обчислювальної техніки.

2. Умови існування розв'язків системи (1) – (4). За теорією диференціальних рівнянь із відхилювальним аргументом (див., наприклад, [1 – 11]) для знаходження розв'язків системи рівнянь (1) – (3) потрібно знати значення функцій $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$, $\dot{\vec{r}}_1(t)$ і $\dot{\vec{r}}_2(t)$ на деякому початковому відрізку $[t_0 - \Delta, t_0]$.

Оскільки запізнювання $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$ і векторні функції $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$ знаходяться в залежності (див. (2), (3)), то Δ можна оцінити з використанням $\vec{r}_1(t)$ і $\vec{r}_2(t)$.

Завдяки (5) і подальшому (див. (10), (11)) для Δ справджуються співвідношення

$$0 < \frac{|\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)|}{c + v^*} \le \Delta \le \frac{|\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)|}{c - v^*}. \tag{6}$$

Наведені оцінки для Δ дають змогу задавати початкові умови для розв'язків системи (1). Точного значення Δ ми не знаємо. Однак, не наносячи шкоди подальшим дослідженням, можна (з певним запасом) в якості Δ використовувати $\dfrac{|\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)|}{c - v^*}$, що можна знайти з початкових умов (значення $\vec{r}_1(t_0)$ і $\vec{r}_2(t_0)$ входять до початкових умов). У цьому випадку деякі „зайві" початкові значення розв'язків системи (1) на $[t_0-\Delta, t_0]$ (поблизу $t_0-\Delta$) не будуть враховуватися при знаходженні її розв'язків і не впливатимуть на їхні властивості.

2.1. Однозначна розв'язність рівнянь (2) і (3) відносно $\tau_1(t)$ і $\tau_2(t)$ у випадку відомих $\vec{r}_1(t)$ і $\vec{r}_2(t)$. Спочатку наведемо важливе для подальшого викладу твердження.

Лема 1. *Нехай*: 1) $\vec{u}_1(t)$, $\vec{u}_2(t)$, $\vec{w}_1(t)$ *і* $\vec{w}_2(t)$ *— неперервно диференційовні на* $[t_0 - \Delta, T)$ *векторні функції, для яких*

$$\vec{u}_1(t) = \vec{u}_2(t), \quad \vec{w}_1(t) = \vec{w}_2(t) \quad \textit{для всіх} \quad t \in [t_0 - \Delta, t_0]$$

і

$$\sup_{t\in[t_0-\Delta,T)} \max\left\{\left|\dot{\vec{u}}_1(t)\right|, \left|\dot{\vec{u}}_2(t)\right|, \left|\dot{\vec{w}}_1(t)\right|, \left|\dot{\vec{w}}_2(t)\right|\right\} = v^* < c;$$

2) $\tau_1(t)$ *і* $\tau_2(t)$ *— неперервно диференційовні на* $[t_0, T)$ *функції, для яких*

$$c\tau_k(t) = \left|\vec{u}_k(t-\tau_k(t)) - \vec{w}_k(t)\right| \quad \textit{для всіх} \quad t \in [t_0, T), \quad k = \overline{1,2}. \tag{7}$$

Тоді

$$|\tau_1(t) - \tau_2(t)| \le \frac{1}{c - v^*}\left(|\vec{u}_1(t-\tau_2(t)) - \vec{u}_2(t-\tau_2(t))| + |\vec{w}_1(t) - \vec{w}_2(t)|\right) \quad \textit{для всіх} \quad t \in [t_0, T) \tag{8}$$

і, отже, для кожного $T^* \in (t_0, T)$

$$\max_{t\in[t_0,T^*]} |\tau_1(t) - \tau_2(t)| \le \frac{\max\limits_{t\in[t_0,T^*]} (|\vec{u}_1(t) - \vec{u}_2(t)| + |\vec{w}_1(t) - \vec{w}_2(t)|)}{c - v^*}. \qquad (9)$$

Доведення. Із (7) та теореми про скінченний приріст [16] випливає, що

$$c|\tau_1(t) - \tau_2(t)| = ||\vec{u}_1(t - \tau_1(t)) - \vec{w}_1(t)| - |\vec{u}_2(t - \tau_2(t)) - \vec{w}_2(t)|| \le$$
$$\le |(\vec{u}_1(t - \tau_1(t)) - \vec{w}_1(t)) - (\vec{u}_2(t - \tau_2(t)) - \vec{w}_2(t))| \le$$
$$\le |\vec{u}_1(t - \tau_1(t)) - \vec{u}_2(t - \tau_2(t))| + |\vec{w}_1(t) - \vec{w}_2(t)| \le$$
$$\le |\vec{u}_1(t - \tau_1(t)) - \vec{u}_1(t - \tau_2(t))| + |\vec{u}_1(t - \tau_2(t)) - \vec{u}_2(t - \tau_2(t))| + |\vec{w}_1(t) - \vec{w}_2(t)| \le$$
$$\le \sup_{s\in[t_0-\Delta,T)} \left|\dot{\vec{u}}_1(s)\right| |\tau_1(t) - \tau_2(t)| + |\vec{u}_1(t - \tau_2(t)) - \vec{u}_2(t - \tau_2(t))| + |\vec{w}_1(t) - \vec{w}_2(t)| =$$
$$= v^*|\tau_1(t) - \tau_2(t)| + |\vec{u}_1(t - \tau_2(t)) - \vec{u}_2(t - \tau_2(t))| + |\vec{w}_1(t) - \vec{w}_2(t)|.$$

Звідси отримуємо (8) і (9).

Лему 1 доведено.

***Зауваження* 1.** У лемі 1 (див. нерівності (8), (9)) функції $\tau_1(t),\ \tau_2(t)$ неперервно залежать від функцій $\vec{u}_1(t),\ \vec{u}_2(t),\ \vec{w}_1(t)$ і $\vec{w}_2(t)$.

Далі наведемо умови існування функцій $\tau_1(t),\ \tau_2(t)$, що задовольняють (2), (3), якщо відомі функції $\vec{r}_1(t)$ і $\vec{r}_2(t)$.

Зазначимо, що у подальшому ми будемо знаходити розв'язки системи (1) – (3) за допомогою методу ітерацій. При цьому на кожному кроці для відомих функцій $\vec{r}_1(t),\ \vec{r}_2(t)$ будемо знаходити для рівнянь (2), (3) функції $\tau_1(t),\ \tau_2(t)$. На завершальній частині кожного кроку будемо знаходити розв'язки системи (1), використовуючи знайдені $\tau_1(t),\ \tau_2(t)$. Тому важливим для подальшого є таке твердження.

Теорема 1. *Для кожних неперервно диференційовних на* $[t_0-\Delta, T)$ *функцій* $\vec{r}_1(t),\ \vec{r}_2(t)$, *що задовольняють* (4), (5), *існують єдині визначені і неперервно диференційовні на* $[t_0, T)$ *функції* $\tau_1(t),\ \tau_2(t)$, *що задовольняють* (2), (3), *для яких*

$$0 < \tau_-(t) \le \tau_i(t) \le \tau_+(t), \qquad t \in [t_0, T), \quad i = \overline{1, 2}, \qquad (10)$$

де

$$\tau_-(t) = \frac{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|}{c + v^*}, \qquad \tau_+(t) = \frac{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|}{c - v^*}. \qquad (11)$$

Доведення. Розглянемо рівняння (2), (3), що неявно визначають функції $\tau_1(t)$ і $\tau_2(t)$, а також розглянемо відповідні функції

$$F_1(\tau_1, t) = c\tau_1 - |\vec{r}_1(t - \tau_1) - \vec{r}_2(t)|, \qquad F_2(\tau_2, t) = c\tau_2 - |\vec{r}_1(t - \tau_2) - \vec{r}_2(t)|.$$

Завдяки умовам теореми ці функції неперервні і мають неперервні частині похідні $\dfrac{\partial F_i(\tau_i, t)}{\partial \tau_i}$, $\dfrac{\partial F_i(\tau_i, t)}{\partial t}$, $i = \overline{1, 2}$, в точках областей визначення, причому

$$\frac{\partial F_i(\tau_i, t)}{\partial \tau_i} \ne 0, \quad i = \overline{1, 2}.$$

Справді, враховуючи, що

$$F_1(\tau_1, t) = c\tau_1 - \sqrt{(\vec{r}_1(t-\tau_1) - \vec{r}_2(t), \vec{r}_1(t-\tau_1) - \vec{r}_2(t))},$$

де $\big(\vec{r}_1(t-\tau_1)-\vec{r}_2(t), \vec{r}_1(t-\tau_1)-\vec{r}_2(t)\big)$ — скалярний квадрат вектора $\vec{r}_1(t-\tau_1)-\vec{r}_2(t)$, і формулу для похідної складної функції [15, с. 202], отримуємо

$$\frac{\partial F_1(\tau_1, t)}{\partial \tau_1} = c - \frac{\left(\dfrac{\partial(\vec{r}_1(t-\tau_1) - \vec{r}_2(t))}{\partial \tau_1}, \vec{r}_1(t-\tau_1) - \vec{r}_2(t)\right)}{\sqrt{(\vec{r}_1(t-\tau_1) - \vec{r}_2(t), \vec{r}_1(t-\tau_1) - \vec{r}_2(t))}} =$$

$$= c + \frac{\left(\dfrac{\partial(\vec{r}_1(t-\tau_1) - \vec{r}_2(t))}{\partial \tau_1}, \vec{r}_1(t-\tau_1) - \vec{r}_2(t)\right)}{|\vec{r}_1(t-\tau_1) - \vec{r}_2(t)|} \geq$$

$$\geq c - \left|\frac{\partial(\vec{r}_1(t-\tau_1) - \vec{r}_2(t))}{\partial \tau_1}\right| \geq c - v^* > 0.$$

Аналогічно

$$\frac{\partial F_2(\tau_2, t)}{\partial \tau_2} \geq c - v^* > 0.$$

Тому завдяки теоремі про неявну функцію [15, с. 451 – 453] функції $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$, що задовольняють (2), (3), є неперервно диференційовними на $[t_0, T)$.

Покажемо виконання для $\tau_1(t)$ і $\tau_2(t)$ співвідношення (10).

Із рівності (2) та співвідношень

$$|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| - v^*\tau_1(t) \leq |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| - \max_{s\in[t-\tau_1(t),t]} \left|\dot{\vec{r}}_1(s)\right| \tau_1(t) \leq$$

$$\leq |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| - |\vec{r}_1(t-\tau_1(t)) - \vec{r}_1(t)| \leq$$

$$\leq |\vec{r}_1(t-\tau_1(t)) - \vec{r}_1(t) + \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| =$$

$$= |\vec{r}_1(t-\tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)| = c\,\tau_1(t) \leq |\vec{r}_1(t-\tau_1(t)) - \vec{r}_1(t)| + |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| \leq$$

$$\leq \max_{s\in[t-\tau_1(t),t]} \left|\dot{\vec{r}}_1(s)\right| \tau_1(t) + |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| = v^*\tau_1(t) + |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|$$

(тут враховано теорему про скінченний приріст [16]) отримуємо

$$\frac{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|}{c + v^*} \leq \tau_1(t) \leq \frac{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|}{c - v^*}, \quad t \in [t_0, T).$$

Аналогічно

$$\frac{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|}{c + v^*} \leq \tau_2(t) \leq \frac{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|}{c - v^*}, \quad t \in [t_0, T).$$

Завдяки (5) $\tau_-(t) > 0$ для всіх $t \in [t_0, T)$.

Теорему 1 доведено.

***Зауваження* 2.** У формулюванні теореми 1 та її доведенні T можна замінити будь-яким числом $t_1 \in (t_0, T)$.

***Зауваження* 3.** Для кожного розв'язку $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$ системи рівнянь (1)–(3) виконуються рівності

$$\left|\ddot{\vec{r}}_1(t)\right| = \frac{A_1}{c^2\tau_2^2(t)}, \qquad \left|\ddot{\vec{r}}_2(t)\right| = \frac{A_2}{c^2\tau_1^2(t)}, \quad t \in [t_0, T),$$

і, отже, на підставі (4) та теореми 1

$$\frac{c}{c-v^*}\,|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| \geq |\vec{r}_2(t-\tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)| \geq \frac{c}{c+v^*}\,|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|\,, \quad t \in [t_0, T), \tag{12}$$

$$\frac{c}{c-v^*}\,|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| \geq |\vec{r}_1(t-\tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)| \geq \frac{c}{c+v^*}\,|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|\,, \quad t \in [t_0, T). \tag{13}$$

2.2. Знаходження розв'язків рівнянь* (2), (3) *відносно* $\boldsymbol{\tau_1(t)}$, $\boldsymbol{\tau_2(t)}$ *із заданими* $\boldsymbol{\vec{r}_1(t)}$, $\boldsymbol{\vec{r}_2(t)}$ *методом ітерацій. Оскільки важливим для подальшого є знаходження розв'язків рівнянь (2), (3) відносно $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$ на скінченних проміжках часу, то в межах цього підпункту будемо вважати, що $T \neq +\infty$. Тоді завдяки (4) і (11) величина

$$\Delta^* = \sup_{t\in[t_0,T)} \tau_+(t) \tag{14}$$

буде скінченною. Тому, не зменшуючи загальності, можна вважати, що в цьому підпункті

$$\Delta = \Delta^*. \tag{15}$$

Зазначимо, що твердження теореми 1 не зміниться, якщо в ній Δ замінити на Δ^*.

Далі будемо вважати, що в рівняннях (2), (3) функції $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$ задані, неперервно диференційовні на $[t_0 - \Delta, T)$ і задовольняють (4), (5). За теоремою 1 ці рівняння мають єдині неперервно диференційовні на $[t_0 - \Delta, T)$ розв'язки. Покажемо, як їх можна знайти за допомогою методу ітерацій.

Зафіксуємо довільне $t \in [t_0, T)$ і розглянемо відображення

$$f_{t,1}(\tau) = \frac{1}{c}\,|\vec{r}_1(t-\tau) - \vec{r}_2(t)|, \qquad f_{t,2}(\tau) = \frac{1}{c}\,|\vec{r}_2(t-\tau) - \vec{r}_1(t)|,$$

для яких відрізок $[0, t+\Delta]$ є інваріантним. Справді, ці відображення визначені в кожній точці $\tau \in [0, t+\Delta]$ і для кожного $\tau \in [0, t+\Delta]$

$$0 \leq f_{t,1}(\tau) = \frac{1}{c}\,|\vec{r}_1(t-\tau) - \vec{r}_2(t)| \leq \frac{1}{c}\big(|\vec{r}_1(t-\tau) - \vec{r}_1(t)| + |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|\big) \leq$$

$$\leq \frac{v^*}{c}\,\tau + \frac{1}{c}\,|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| = \frac{v^*}{c}\,\tau + \frac{c-v^*}{c}\,\tau_+(t) \leq \frac{v^*}{c}\,(t+\Delta) + \frac{c-v^*}{c}\,\Delta \leq t+\Delta$$

(тут враховано (14) і (15)). Аналогічні співвідношення виконуються і для $f_{t,2}(\tau)$.

Розглянуті відображення є стискаючими, оскільки на підставі теореми про скінченний приріст [16] для довільних $\tau_*, \tau_{**} \in [0, t+\Delta]$, $\tau_* \leq \tau_{**}$,

$$|f_{t,1}(\tau_*) - f_{t,1}(\tau_{**})| = \left|\frac{1}{c}\,|\vec{r}_1(t-\tau_*) - \vec{r}_2(t)| - \frac{1}{c}\,|\vec{r}_1(t-\tau_{**}) - \vec{r}_2(t)|\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{c}\,|(\vec{r}_1(t-\tau_*) - \vec{r}_2(t)) - (\vec{r}_1(t-\tau_{**}) - \vec{r}_2(t))| = \frac{1}{c}\,|\vec{r}_1(t-\tau_*) - \vec{r}_1(t-\tau_{**})| \leq$$

$$\leq \frac{1}{c}\max_{t-\tau_{**}\leq s\leq t-\tau_*}\left|\dot{\vec{r}}_1(s)\right| |\tau_* - \tau_{**}| \leq \frac{v^*}{c}\,|\tau_* - \tau_{**}|$$

і $v^* < c$ (завдяки (4)). Аналогічні співвідношення можна отримати і для $f_{t,2}(\tau)$.

Згідно з принципом стискаючих відображень [17, с. 114, 115] відображення $f_{t,1},\ f_{t,2}$ мають єдині нерухомі точки $\tau_1^*, \tau_2^{**} \in [0, t+\Delta]$. Тоді

$$\tau_1^* = \frac{1}{c}\left|\vec{r}_1\left(t-\tau_1^*\right)-\vec{r}_2(t)\right|, \qquad \tau_1^{**} = \frac{1}{c}\left|\vec{r}_2\left(t-\tau_1^{**}\right)-\vec{r}_1(t)\right| \tag{16}$$

і точки τ_1^*, τ_2^{**} можна подати у вигляді

$$\tau_1^* = \lim_{n\to\infty}\tau_{n,1}, \qquad \tau_1^{**} = \lim_{n\to\infty}\tau_{n,2},$$

де $\tau_{n,1}$ і $\tau_{n,2}$ знаходяться за допомогою рекурентних співвідношень

$$\tau_{n+1,1} = \frac{1}{c}\left|\vec{r}_1(t-\tau_{n,1})-\vec{r}_2(t)\right|, \qquad \tau_{n+1,2} = \frac{1}{c}\left|\vec{r}_2(t-\tau_{n,2})-\vec{r}_1(t)\right|, \quad n \geq 0.$$

За $\tau_{0,1}$ і $\tau_{0,2}$ можна взяти довільні точки з $[0, t+\Delta]$.

Очевидно, що τ_1^*, τ_2^{**} і $\tau_{n,1}, \tau_{n,2},\ n \geq 1$, залежать від t ($\tau_1^* = \tau_1^*(t),\ \tau_2^{**} = \tau_2^{**}(t),\ \tau_{n,1} = \tau_{n,1}(t),\ \tau_{n,2} = \tau_{n,2}(t)$) і завдяки (16)

$$\tau_1^*(t) = \frac{1}{c}\left|\vec{r}_1\left(t-\tau_1^*(t)\right)-\vec{r}_2(t)\right|, \qquad \tau_1^{**}(t) = \frac{1}{c}\left|\vec{r}_2\left(t-\tau_1^{**}(t)\right)-\vec{r}_1(t)\right|.$$

***Зауваження* 4.** Якщо $\tau_1(t),\ \tau_2(t)$ — розв'язки рівнянь (2), (3) для заданих неперервно диференційовних на $[t_0-\Delta, T)$ функцій $\vec{r}_1(t),\ \vec{r}_2(t)$, що задовольняють (4), то згідно з принципом стискаючих відображень [17, с. 115] для кожного $t \in [t_0, T)$

$$|\tau_{n,k}(t)-\tau_k(t)| \leq \frac{c}{c-v^*}\left(\frac{v^*}{c}\right)^n|\tau_{0,k}(t)-\tau_{1,k}(t)|, \qquad n \geq 1, \quad k=\overline{1,2}, \tag{17}$$

де $\tau_{n,1}(t),\ \tau_{n,2}(t)$ визначаються за допомогою співвідношень

$$\tau_{n,1}(t) = \frac{1}{c}|\vec{r}_1(t-\tau_{n-1,1}(t))-\vec{r}_2(t)|, \qquad \tau_{n,2}(t) = \frac{1}{c}|\vec{r}_2(t-\tau_{n-1,2}(t))-\vec{r}_1(t)|, \quad n \geq 1.$$

Нерівності (17) можна використовувати і при $\tau_{0,k}(t) \equiv 0$. Тоді $\tau_{1,k}(t) \equiv \dfrac{|\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t)|}{c}$ і (17) набере вигляду

$$|\tau_{n,k}(t)-\tau_k(t)| \leq \frac{1}{c-v^*}\left(\frac{v^*}{c}\right)^n|\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t)|, \qquad n \geq 1, \quad k=\overline{1,2}. \tag{18}$$

2.3. Існування розв'язку системи* (1) – (4) *на відрізку* $[t_0, t_1]$ *малої довжини. Знаходження цього розв'язку методом ітерацій. Будемо вважати, що нам відомі значення $\vec{r}_1(t),\ \vec{r}_2(t)$ на відрізку $[t_0-\Delta, t_0]$, ці функції є двічі неперервно диференційовними на $[t_0-\Delta, t_0]$,

$$\sup_{t\in[t_0-\Delta,t_0]}\max\left\{\left|\dot{\vec{r}}_1(t)\right|, \left|\dot{\vec{r}}_2(t)\right|\right\} \leq v^* \tag{19}$$

і

$$|\vec{r}_1(t_0)-\vec{r}_2(t_0)| > 0. \tag{20}$$

Зафіксуємо довільне число $\varepsilon > 0$, для якого

$$v^* + \varepsilon < c,$$

і деякий момент часу $t_1 > t_0$ (значення t_1 уточнимо пізніше).

Нехай $C^1\big([t_0 - \Delta, t_1], \mathbb{R}^2\big)$ — банаховий простір неперервно диференційовних на $[t_0 - \Delta, t_1]$ векторних функцій $\vec{r} = \vec{r}(t)$ зі значеннями в $\mathbb{R}^2$ і нормою

$$\|\vec{r}\|_{C^1([t_0-\Delta,t_1],\mathbb{R}^2)} = \sup_{t\in[t_0-\Delta,t_1]} \max\left\{|\vec{r}(t)|, \left|\dot{\vec{r}}(t)\right|\right\}.$$

Розглянемо обмежені у просторі $C^1\left([t_0 - \Delta, t_1], \mathbb{R}^2\right)$ множини $\mathcal{A}_{1,[t_0,t_1]}$ і $\mathcal{A}_{2,[t_0,t_1]}$, елементами яких є всі неперервно диференційовні на $[t_0 - \Delta, t_1]$ функції $\vec{r}_1^{\,*}(t)$ і $\vec{r}_2^{\,*}(t)$ відповідно, для яких

$$\vec{r}_i^{\,*}(t) = \vec{r}_i(t), \qquad t \in [t_0 - \Delta, t_0], \quad i = \overline{1, 2}, \tag{21}$$

і

$$\max_{t_0\le t\le t_1} \left\{\left|\dot{\vec{r}}_1^{\,*}(t)\right|, \left|\dot{\vec{r}}_2^{\,*}(t)\right|\right\} \le v^* + \varepsilon. \tag{22}$$

Завдяки (12), (13), (20) – (22) можна вибрати $t_1 > t_0$ так, щоб

$$a_1(t_0, t_1) = \sup_{\vec{r}_1^{\,*}\in\mathcal{A}_{1,[t_0,t_1]},\ \vec{r}_2^{\,*}\in\mathcal{A}_{2,[t_0,t_1]}} \max_{t\in[t_0,t_1]} \frac{A_1}{|\vec{r}_2^{\,*}(t - \tau_2^*(t)) - \vec{r}_1^{\,*}(t)|^2} < +\infty \tag{23}$$

і

$$a_2(t_0, t_1) = \sup_{\vec{r}_1^{\,*}\in\mathcal{A}_{1,[t_0,t_1]},\ \vec{r}_2^{\,*}\in\mathcal{A}_{2,[t_0,t_1]}} \max_{t\in[t_0,t_1]} \frac{A_2}{|\vec{r}_1^{\,*}(t - \tau_1^*(t)) - \vec{r}_2^{\,*}(t)|^2} < +\infty, \tag{24}$$

де $\tau_1^*(t)$ і $\tau_2^*(t)$ — розв'язки рівнянь

$$c\tau_1(t) = |\vec{r}_1^{\,*}(t - \tau_1(t)) - \vec{r}_2^{\,*}(t)| \quad \text{і} \quad c\tau_2(t) = |\vec{r}_2^{\,*}(t - \tau_2(t)) - \vec{r}_1^{\,*}(t)|$$

відповідно (за теоремою 1 ці розв'язки існують і єдині).

Позначимо через $\mathcal{M}_{1,[t_0,t_1]}$ і $\mathcal{M}_{2,[t_0,t_1]}$ підмножини множин $\mathcal{A}_{1,[t_0,t_1]}$ і $\mathcal{A}_{2,[t_0,t_1]}$ відповідно (ці підмножини обмежені у просторі $C^1\left([t_0 - \Delta, t_1], \mathbb{R}^2\right)$), для елементів яких виконуються співвідношення

$$|\vec{r}_i^{\,*}(t) - \vec{r}_i(0)| \le v^*(t - t_0) + \frac{a_i(t_0, t_1)}{2}(t - t_0)^2, \qquad t \in [t_0, t_1], \quad i = \overline{1, 2}. \tag{25}$$

Такі підмножини завдяки (19), (21), (23) і (24) є непорожніми, якщо різниця $t_1 - t_0$ є достатньо малою.

Зазначимо, що множини $\mathcal{A}_{1,[t_0,t_1]}$, $\mathcal{A}_{2,[t_0,t_1]}$, $\mathcal{M}_{1,[t_0,t_1]}$ і $\mathcal{M}_{2,[t_0,t_1]}$ є замкненими у просторі $C^1\big([t_0 - \Delta, t_1], \mathbb{R}^2\big)$; це можна показати аналогічно, як і повноту цього простору.

Нехай $C^0([t_0, t_1], \mathbb{R})$ — банаховий простір неперервних на $[t_0, t_1]$ функцій $u = u(t)$ зі значеннями в $\mathbb{R}$ і нормою

$$\|u\|_{C^0([t_0,t_1],\mathbb{R})} = \max_{t\in[t_0,t_1]} |u(t)|.$$

Позначимо через $\mathcal{N}_{[t_0,t_1]}$ множину всіх неперервно диференційовних на $[t_0,t_1]$ функцій зі значеннями в $[0,\gamma]$, де

$$\gamma = \sup_{\vec{r}_1^{\,*}\in\mathcal{M}_{1,[t_0,t_1]},\ \vec{r}_2^{\,*}\in\mathcal{M}_{2,[t_0,t_1]}} \max_{t\in[t_0,t_1]} \frac{|\vec{r}_1^{\,*}(t)-\vec{r}_2^{\,*}(t)|}{c-v^*-\varepsilon}. \tag{26}$$

Зауважимо, що значення функцій із множини $\mathcal{N}_{[t_0,t_1]}$ не суперечать теоремі 1 (див. (10), (11)).

Перейдемо до розв'язання основної задачі цього підпункту.

Використаємо функції

$$\vec{F}_1(\vec{u},\vec{w}) = \frac{A_1}{|\vec{u}-\vec{w}|^3}(\vec{u}-\vec{w}), \qquad \vec{F}_2(\vec{u},\vec{w}) = \frac{A_2}{|\vec{u}-\vec{w}|^3}(\vec{u}-\vec{w}). \tag{27}$$

Зінтегруємо обидві частини кожного рівняння системи (1) на відрізку $[t_0,t]\subset[t_0,t_1]$, припустивши, що система (1)–(3) має розв'язок, і врахувавши значення цього розв'язку на відрізку $[t_0-\Delta,t_0]$. Тоді отримаємо рівності

$$\dot{\vec{r}}_1(t) = \dot{\vec{r}}_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{F}_1(\vec{r}_2(s-\tau_2(s)),\vec{r}_1(s))\,ds, \tag{28}$$

$$\dot{\vec{r}}_2(t) = \dot{\vec{r}}_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{F}_2(\vec{r}_1(s-\tau_1(s)),\vec{r}_2(s))\,ds. \tag{29}$$

Зінтегруємо обидві частини цих рівностей на відрізку $[t_0,t]$:

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_1(t_0) + (t-t_0)\,\dot{\vec{r}}_1(t_0) + \int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{\tau} \vec{F}_1(\vec{r}_2(s-\tau_2(s)),\vec{r}_1(s))\,ds\right)d\tau \tag{30}$$

і

$$\vec{r}_2(t) = \vec{r}_2(t_0) + (t-t_0)\,\dot{\vec{r}}_2(t_0) + \int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{\tau} \vec{F}_2(\vec{r}_1(s-\tau_1(s)),\vec{r}_2(s))\,ds\right)d\tau. \tag{31}$$

Очевидно, що задача про існування та єдиність розв'язку системи рівнянь (1)–(3), що задовольняє початкові умови на відрізку $[t_0-\Delta,t_0]$ (задача 1), рівносильна задачі про існування та єдиність розв'язку системи рівнянь (2), (3), (30) і (31) (задача 2).

У зв'язку з рівносильністю задач 1 і 2 обмежимося розглядом задачі 2. Цю задачу на відрізку $[t_0,t_1]$ можна розв'язати за допомогою методу ітерацій.

Зафіксуємо довільні неперервно диференційовні на $[t_0-\Delta,t_1]$ функції $\vec{r}_{0,1}(t)$ і $\vec{r}_{0,2}(t)$, що є елементами множин $\mathcal{M}_{1,[t_0,t_1]}$ і $\mathcal{M}_{2,[t_0,t_1]}$ відповідно. Розглянемо рівняння

$$c\tau_1(t) = |\vec{r}_{0,1}(t-\tau_1(t)) - \vec{r}_{0,2}(t)|$$

і

$$c\tau_2(t) = |\vec{r}_{0,2}(t-\tau_2(t)) - \vec{r}_{0,1}(t)|, \quad t\in[t_0,t_1],$$

відносно $\tau_1(t)$ і $\tau_2(t)$. Кожне з цих рівнянь має єдиний розв'язок $\tau_{0,1}(t)$ і $\tau_{0,2}(t)$ відповідно (за теоремою 1). Ці розв'язки можна знайти за допомогою методу ітерацій (див. пп. 2.2 і зауваження 4).

Далі розглянемо послідовності функцій $\vec{r}_{n,1}(t)$, $\vec{r}_{n,2}(t)$, $\tau_{n,1}(t)$ і $\tau_{n,2}(t)$, $n \geq 1$, що визначаються рівностями

$$\vec{r}_{n,1}(t) = \vec{r}_{n-1,1}(t_0) + (t - t_0)\dot{\vec{r}}_{n-1,1}(t_0) + \\ + \int\limits_{t_0}^{t} \left(\int\limits_{t_0}^{\tau} \vec{F}_1(\vec{r}_{n-1,2}(s - \tau_{n-1,2}(s)), \vec{r}_{n-1,1}(s))\, ds \right) d\tau, \tag{32}$$

$$\vec{r}_{n,2}(t) = \vec{r}_{n-1,2}(t_0) + (t - t_0)\, \dot{\vec{r}}_{n-1,2}(t_0) + \\ + \int\limits_{t_0}^{t} \left(\int\limits_{t_0}^{\tau} \vec{F}_2(\vec{r}_{n-1,1}(s - \tau_{n-1,1}(s)), \vec{r}_{n-1,2}(s))\, ds \right) d\tau, \tag{33}$$

$$\tau_{n,1}(t) = \frac{1}{c}\, |\vec{r}_{n,1}(t - \tau_{n,1}(t)) - \vec{r}_{n,2}(t)| \tag{34}$$

і

$$\tau_{n,2}(t) = \frac{1}{c}\, \big|\vec{r}_{n,2}(t - \tau_{n,2}(t)) - \vec{r}_{n,1}(t)\big|, \tag{35}$$

де $t \in [t_0, t_1]$ і $n \geq 1$.

Зазначимо, що на n-му кроці спочатку знаходимо функції $\vec{r}_{n,1}(t)$, $\vec{r}_{n,2}(t)$ за допомогою (32), (33) і функцій $\vec{r}_{n-1,1}(t)$, $\vec{r}_{n-1,2}(t)$, $\tau_{n-1,1}(t)$, $\tau_{n-1,2}(t)$. Далі за допомогою функцій $\vec{r}_{n,1}(t)$, $\vec{r}_{n,2}(t)$ і співвідношень (34), (35) знаходимо функції $\tau_{n,1}(t)$ і $\tau_{n,2}(t)$. Знайдені функції $\vec{r}_{n,1}(t)$, $\vec{r}_{n,2}(t)$, $\tau_{n,1}(t)$ і $\tau_{n,2}(t)$ дозволяють перейти до реалізації наступного ($(n+1)$-го) кроку, тобто до знаходження функцій $\vec{r}_{n+1,1}(t)$, $\vec{r}_{n+1,2}(t)$, $\tau_{n+1,1}(t)$ і $\tau_{n+1,2}(t)$.

Цей процес можна продовжувати як завгодно довго.

***Зауваження* 5.** На n-му кроці функції $\tau_{n,1}(t)$, $\tau_{n,2}(t)$ визначаються за допомогою не розв'язаних відносно цих функцій співвідношень (34), (35). Ці функції можна знайти методом ітерацій, використавши результати пп. 2.2. У цьому випадку співвідношення (17) і (18) (див. зауваження 4) є правильними, якщо в них замінити $v*$ на $v^* + \varepsilon$.

Теорема 2. *При достатньо малій різниці* $t_1 - t_0 > 0$ *послідовності функцій, що визначаються рівностями* (32) – (35), *є рівномірно збіжними на* $[t_0, t_1]$, *їхні границі не залежать від вибору початкових функцій* $\vec{r}_{0,1}(t)$, $\vec{r}_{0,2}(t)$ *і є єдиними розв'язками системи* (1) – (4).

Доведення. Розглянемо відображення

$$\Gamma_{[t_0,t_1]} : \mathcal{M}_{1,[t_0,t_1]} \times \mathcal{M}_{2,[t_0,t_1]} \to \mathcal{M}_{1,[t_0,t_1]} \times \mathcal{M}_{2,[t_0,t_1]},$$
$$\Gamma_{1,[t_0,t_1]} : \mathcal{M}_{1,[t_0,t_1]} \times \mathcal{M}_{2,[t_0,t_1]} \to \mathcal{M}_{1,[t_0,t_1]},$$
$$\Gamma_{2,[t_0,t_1]} : \mathcal{M}_{1,[t_0,t_1]} \times \mathcal{M}_{2,[t_0,t_1]} \to \mathcal{M}_{2,[t_0,t_1]},$$

що визначаються таким чином. Зафіксуємо довільну точку

$$(\vec{r}_{0,1}, \vec{r}_{0,2}) \in \mathcal{M}_{1,[t_0,t_1]} \times \mathcal{M}_{2,[t_0,t_1]}. \tag{36}$$

Цій точці співставимо елементи

$$(\vec{r}_{1,1},\vec{r}_{1,2})=\Gamma_{[t_0,t_1]}(\vec{r}_{0,1},\vec{r}_{0,2}),\qquad \vec{r}_{1,1}=\Gamma_{1,[t_0,t_1]}(\vec{r}_{0,1},\vec{r}_{0,2}),\qquad \vec{r}_{1,2}=\Gamma_{2,[t_0,t_1]}(\vec{r}_{0,1},\vec{r}_{0,2}),$$

що визначаються з використанням рівнянь

$$\tau_{0,1}(t)=\frac{1}{c}\left|\vec{r}_{0,1}(t-\tau_{0,1}(t))-\vec{r}_{0,2}(t)\right| \tag{37}$$

і

$$\tau_{0,2}(t)=\frac{1}{c}\left|\vec{r}_{0,2}(t-\tau_{0,2}(t))-\vec{r}_{0,1}(t)\right|. \tag{38}$$

Завдяки (36), теоремі 1 і (26) розв'язки $\tau_{0,1}(t),\ \tau_{0,2}(t)$ цих рівнянь є елементами множини $\mathcal{N}_{[t_0,t_1]}$. Із урахуванням співвідношень (32), (33) елементи $\vec{r}_{1,1},\ \vec{r}_{1,2}$ знайдемо за допомогою формул

$$\vec{r}_{1,1}(t)=\vec{r}_{0,1}(t_0)+(t-t_0)\dot{\vec{r}}_{0,1}(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}\left(\int\limits_{t_0}^{\tau}\vec{F}_1(\vec{r}_{0,2}(s-\tau_{0,2}(s)),\vec{r}_{0,1}(s))\,ds\right)d\tau, \tag{39}$$

$$\vec{r}_{1,2}(t)=\vec{r}_{0,2}(t_0)+(t-t_0)\,\dot{\vec{r}}_{0,2}(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}\left(\int\limits_{t_0}^{\tau}\vec{F}_2(\vec{r}_{0,1}(s-\tau_{0,1}(s)),\vec{r}_{0,2}(s))\,ds\right)d\tau. \tag{40}$$

Так визначена точка $(\vec{r}_{1,1},\vec{r}_{1,2})$ на підставі (39), (40), (21), (23)–(25) є елементом множини $\mathcal{M}_{1,[t_0,t_1]}\times\mathcal{M}_{2,[t_0,t_1]}$, якщо різниця $t_1-t_0>0$ є достатньо малою.

Відображення $\Gamma_{[t_0,t_1]}$ є неперервним. Ця властивість відображення $\Gamma_{[t_0,t_1]}$, згідно з (39), (40), є наслідком неперервності функцій $\vec{F}_1(\vec{u},\vec{w})$ і $\vec{F}_2(\vec{u},\vec{w})$ на областях визначення, неперервності функцій $\vec{r}_{0,1}(s)$, $\vec{r}_{0,2}(s)$ і неперервної залежності розв'язків рівнянь (37), (38) від $\vec{r}_{0,1}(t)$ і $\vec{r}_{0,2}(t)$, що випливає з леми 1 (див. також зауваження 1).

Відображення $\Gamma_{[t_0,t_1]}$ також є цілком неперервним, що на підставі теореми Арцела [18] випливає з рівномірної обмеженості і рівностепеневої неперервності на відрізку $[t_0,t_1]$ елементів множини $\Gamma_{[t_0,t_1]}\left(\mathcal{M}_{1,[t_0,t_1]}\times\mathcal{M}_{2,[t_0,t_1]}\right)$. Ці властивості елементів множини

$$\Gamma_{[t_0,t_1]}\left(\mathcal{M}_{1,[t_0,t_1]}\times\mathcal{M}_{2,[t_0,t_1]}\right)$$

випливають із (23), (24), (39), (40) і обмеженості у просторі $C^1\left([t_0-\Delta,t_1],\mathbb{R}^2\right)$ множин $\mathcal{M}_{1,[t_0,t_1]},\ \mathcal{M}_{2,[t_0,t_1]}$.

Завдяки замкнености множин $\mathcal{M}_{1,[t_0,t_1]},\ \mathcal{M}_{2,[t_0,t_1]}$ у просторі $C^1([t_0-\Delta,t_1],\mathbb{R}^2)$ множина $\mathcal{M}_{1,[t_0,t_1]}\times\mathcal{M}_{2,[t_0,t_1]}$ також є замкненою. Крім того, ця множина є опуклою, оскільки опуклими є множини $\mathcal{M}_{1,[t_0,t_1]},\ \mathcal{M}_{2,[t_0,t_1]}$, що випливає з визначення цих множин.

Отже, до відображення $\Gamma_{[t_0,t_1]}:\mathcal{M}_{1,[t_0,t_1]}\times\mathcal{M}_{2,[t_0,t_1]}\to\mathcal{M}_{1,[t_0,t_1]}\times\mathcal{M}_{2,[t_0,t_1]}$ при достатньо малій різниці t_1-t_0 застосовна теорема теорема Шаудера про нерухому точку [19, с. 37].

За цією теоремою $\Gamma_{[t_0,t_1]}$ має нерухому точку $\left(\vec{r}^{\,*}_{0,1},\vec{r}^{\,*}_{0,2}\right)\in\mathcal{M}_{1,[t_0,t_1]}\times\mathcal{M}_{2,[t_0,t_1]}$, тобто $\Gamma_{[t_0,t_1]}\left(\vec{r}^{\,*}_{0,1},\vec{r}^{\,*}_{0,2}\right)=\left(\vec{r}^{\,*}_{0,1},\vec{r}^{\,*}_{0,2}\right)$. Із визначення відображення $\Gamma_{[t_0,t_1]}$ випливає, що також існують неперервно диференційовні на $[t_0,t_1]$ функції $\tau^*_{0,1}(t),\ \tau^*_{0,2}(t)$, для яких

$$c\tau_1^*(t)=\left|\vec{r}_1^{\,*}\left(t-\tau_1^*(t)\right)-\vec{r}_2^{\,*}(t)\right|,\qquad c\tau_2^*(t)=\left|\vec{r}_2^{\,*}\left(t-\tau_2^*(t)\right)-\vec{r}_1^{\,*}(t)\right|,\quad t\in[0,t_1].$$

Таким чином, з урахуванням (39), (40)

$$\vec{r}_1^{\,*}(t) \equiv \vec{r}_1^{\,*}(t_0) + (t-t_0)\,\dot{\vec{r}}_1^{\,*}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t}\left(\int\limits_{t_0}^{\tau}\vec{F}_1\left(\vec{r}_2^{\,*}\left(s-\tau_2^*(s)\right), \vec{r}_1^{\,*}(s)\right)\, ds\right)d\tau,$$

$$\vec{r}_2^{\,*}(t) \equiv \vec{r}_2^{\,*}(t_0) + (t-t_0)\,\dot{\vec{r}}_2^{\,*}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t}\left(\int\limits_{t_0}^{\tau}\vec{F}_2\left(\vec{r}_1^{\,*}\left(s-\tau_1^*(s)\right), \vec{r}_2^{\,*}(s)\right)\, ds\right)d\tau.$$

Звідси та з неперервності функцій $\vec{F}_1\left(\vec{r}_2^{\,*}(s-\tau_2^*(s)),\, \vec{r}_1^{\,*}(s)\right)$, $\vec{F}_2\left(\vec{r}_1^{\,*}(s-\tau_1^*(s)),\, \vec{r}_2^{\,*}(s)\right)$ на $[t_0, t_1]$ випливає, що функції $\vec{r}_1^{\,*}(t),\ \vec{r}_2^{\,*}(t)$ двічі неперервно диференційовні на $[t_0, t_1]$ і є розв'язками системи (1) – (4) на відрізку $[t_0, t_1]$.

Далі покажемо єдиність розв'язку системи (1) – (4) у випадку заданих початкових значень $\vec{r}_1(t),\ \vec{r}_2(t)$ на початковому проміжку $[t_0-\Delta, t_0]$ і при достатньо малій різниці t_1-t_0.

Ця властивість розв'язків випливає з того, що відображення $\Gamma_{[t_0,t_1]}$ при малій різниці t_1-t_0 є стискаючим. Справді, використаємо диференційовність функцій $\vec{F}_k(\vec{u},\vec{w}),\ k=\overline{1,2}$, в точках $(\vec{u},\vec{w})$, де $\vec{u}\neq\vec{w}$. Завдяки цій властивості для кожного числа $\delta>0$ існують такі залежні від δ додатні сталі $L_1,\ L_2$, що

$$\left|\vec{F}_k(\vec{u}_1,\vec{w}_1)-\vec{F}_k(\vec{u}_2,\vec{w}_2)\right| \le L_k(|\vec{u}_1-\vec{u}_2|+|\vec{w}_1-\vec{w}_2|), \quad k=\overline{1,2}, \tag{41}$$

для всіх векторів $\vec{u}_1,\ \vec{w}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{w}_2$, для яких

$$\min_{k=\overline{1,2}}\ |\vec{u}_k-\vec{w}_k|>\delta. \tag{42}$$

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що завдяки (23) і (24) нерівність (41) справджується.

Покажемо, що відображення $\Gamma_{[t_0,t_1]}:\mathcal{M}_{1,[t_0,t_1]}\times\mathcal{M}_{2,[t_0,t_1]}\to\mathcal{M}_{1,[t_0,t_1]}\times\mathcal{M}_{2,[t_0,t_1]}$ при малій різниці t_1-t_0 є стискаючим.

Розглянемо довільні $\vec{r}_{1,*},\vec{r}_{1,**}\in\mathcal{M}_{1,[t_0,t_1]}$ і $\vec{r}_{2,*},\vec{r}_{2,**}\in\mathcal{M}_{2,[t_0,t_1]}$. Нехай $\tau_{1,*}(t),\ \tau_{2,*}(t),\ \tau_{1,**}(t)$ і $\tau_{2,**}(t)$ — функції, для яких

$$c\tau_{1,*}(t)\equiv\left|\vec{r}_{1,*}\left(t-\tau_{1,*}(t)\right)-\vec{r}_{2,*}(t)\right|,$$

$$c\tau_{2,*}(t)\equiv\left|\vec{r}_{2,*}\left(t-\tau_{2,*}(t)\right)-\vec{r}_{1,*}(t)\right|,$$

$$c\tau_{1,**}(t)\equiv\left|\vec{r}_{1,**}\left(t-\tau_{1,**}(t)\right)-\vec{r}_{2,**}(t)\right|,$$

$$c\tau_{2,**}(t)\equiv\left|\vec{r}_{2,**}\left(t-\tau_{2,**}(t)\right)-\vec{r}_{1,**}(t)\right|.$$

Оцінимо зверху величини $\left\|\Gamma_{\nu,[t_0,t_1]}\left(\vec{r}_{1,*},\vec{r}_{2,*}\right)-\Gamma_{\nu,[t_0,t_1]}(\vec{r}_{1,**},\vec{r}_{2,**})\right\|_{C^1([t_0-\Delta,t_1],\mathbb{R}^2)},\ \nu = \overline{1,2}$, використавши формули (39), (40), пов'язані з означенням відображення $\Gamma_{\nu,[t_0,t_1]}$. Оскільки для всіх $t,s\in[t_0,t_1]$

$$\left(\Gamma_{1,[t_0,t_1]}(\vec{r}_{1,*},\vec{r}_{2,*})\right)(t)-\left(\Gamma_{1,[t_0,t_1]}\left(\vec{r}_{1,**},\vec{r}_{2,**}\right)\right)(t)=$$

$$=\vec{r}_{1,*}(t_0)+(t-t_0)\,\dot{\vec{r}}_{1,*}(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}\left(\int\limits_{t_0}^{\tau}\vec{F}_1\left(\vec{r}_{2,*}(s-\tau_{2,*}(s)),\vec{r}_{1,*}(s)\right)\,ds\right)d\tau-$$

$$-\left(\vec{r}_{1,**}(t_0)+(t-t_0)\,\dot{\vec{r}}_{1,**}(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}\left(\int\limits_{t_0}^{\tau}\vec{F}_1(\vec{r}_{2,**}(s-\tau_{2,**}(s)),\vec{r}_{1,**}(s))\,ds\right)d\tau\right)=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t}\left(\int\limits_{t_0}^{\tau}\vec{F}_1(\vec{r}_{2,*}(s-\tau_{2,*}(s)),\vec{r}_{1,*}(s))\,ds\right)d\tau-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t}\left(\int\limits_{t_0}^{\tau}\vec{F}_1(\vec{r}_{2,**}(s-\tau_{2,**}(s)),\vec{r}_{1,**}(s))\,ds\right)d\tau=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t}\left(\int\limits_{t_0}^{\tau}\left(\vec{F}_1(\vec{r}_{2,*}(s-\tau_{2,*}(s)),\vec{r}_{1,*}(s))-\vec{F}_1(\vec{r}_{2,**}(s-\tau_{2,**}(s)),\vec{r}_{1,**}(s))\right)\,ds\right)d\tau,$$

$$\frac{d\left(\Gamma_{1,[t_0,t_1]}(\vec{r}_{1,*},\vec{r}_{2,*})\right)(t)}{dt}-\frac{d\left(\Gamma_{1,[t_0,t_1]}(\vec{r}_{1,**},\vec{r}_{2,**})\right)(t)}{dt}=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t}\left(\vec{F}_1(\vec{r}_{2,*}\left(s-\tau_{2,*}(s)\right),\vec{r}_{1,*}(s))-\vec{F}_1\left(\vec{r}_{2,**}(s-\tau_{2,**}(s)),\vec{r}_{1,**}(s)\right)\right)\,ds,$$

$$\left|\vec{F}_1(\vec{r}_{2,*}(s-\tau_{2,*}(s)),\vec{r}_{1,*}(s))-\vec{F}_1(\vec{r}_{2,**}(s-\tau_{2,**}(s)),\vec{r}_{1,**}(s))\right|\leq$$

$$\leq L_1\left(\left|\vec{r}_{2,*}\left(s-\tau_{2,*}(s)\right)-\vec{r}_{2,**}\left(s-\tau_{2,**}(s)\right)\right|+\left|\vec{r}_{1,*}(s)-\vec{r}_{1,**}(s)\right|\right)$$

(тут враховано (41) і те, що $\vec{r}_{1,*}(t_0)=\vec{r}_{1,**}(t_0),\ \dot{\vec{r}}_{1,*}(t_0)=\dot{\vec{r}}_{1,**}(t_0)$) і для всіх $s\in[t_0,t_1]$

$$|\vec{r}_{2,*}(s-\tau_{2,*}(s))-\vec{r}_{2,**}(s-\tau_{2,**}(s))|\leq$$

$$\leq|\vec{r}_{2,*}(s-\tau_{2,*}(s))-\vec{r}_{2,*}(s-\tau_{2,**}(s))|+|\vec{r}_{2,*}(s-\tau_{2,**}(s))-\vec{r}_{2,**}(s-\tau_{2,**}(s))|\leq$$

$$\leq(v^*+\varepsilon)\,|\tau_{2,*}(s)-\tau_{2,**}(s)|+|\vec{r}_{2,*}(s-\tau_{2,**}(s))-\vec{r}_{2,**}(s-\tau_{2,**}(s))|\,,$$

$$|\tau_{2,*}(s)-\tau_{2,**}(s)|\leq$$

$$\leq\frac{1}{c-v^*-\varepsilon}\,\left(|\vec{r}_{2,*}(s-\tau_{2,**}(s))-\vec{r}_{2,**}(s-\tau_{2,**}(s))|+|\vec{r}_{1,*}(s)-\vec{r}_{1,**}(s)|\right)$$

(тут використано лему 1, в якій v^* замінено на $v^*+\varepsilon$), і тому

$$\left|\vec{r}_{2,*}(s-\tau_{2,*}(s))-\vec{r}_{2,**}(s-\tau_{2,**}(s))\right|\leq$$

$$\leq\frac{v^*+\varepsilon}{c-v^*-\varepsilon}\,\left(\left|\vec{r}_{2,*}(s-\tau_{2,**}(s))-\vec{r}_{2,**}(s-\tau_{2,**}(s))\right|+\left|\vec{r}_{1,*}(s)-\vec{r}_{1,**}(s)\right|\right)+$$

$$+\,|\vec{r}_{2,*}(s-\tau_{2,**}(s))-\vec{r}_{2,**}(s-\tau_{2,**}(s))|=$$

$$=\frac{c}{c-v^*-\varepsilon}\left|\vec{r}_{2,*}(s-\tau_{2,**}(s))-\vec{r}_{2,**}(s-\tau_{2,**}(s))\right|+\frac{v^*+\varepsilon}{c-v^*-\varepsilon}\,\left|\vec{r}_{1,*}(s)-\vec{r}_{1,**}(s)\right|,$$

то

$$\left|\vec{F}_1\big(\vec{r}_{2,*}(s-\tau_{2,*}(s)),\vec{r}_{1,*}(s)\big)-\vec{F}_1\big(\vec{r}_{2,**}(s-\tau_{2,**}(s)),\vec{r}_{1,**}(s)\big)\right|\leq$$

$$\leq \frac{L_1 c}{c - v^* - \varepsilon} \left(\left| \vec{r}_{2,*}(s - \tau_{2,**}(s)) - \vec{r}_{2,**}(s - \tau_{2,**}(s)) \right| + \left| \vec{r}_{1,*}(s) - \vec{r}_{1,**}(s) \right| \right).$$

Звідси випливає, що для кожного $t \in [t_0, t_1]$

$$\left| \left(\Gamma_{1,[t_0,t_1]}(\vec{r}_{1,*}, \vec{r}_{2,*}) \right)(t) - \left(\Gamma_{1,[t_0,t_0]}(\vec{r}_{1,**}, \vec{r}_{2,**}) \right)(t) \right| \leq$$

$$\leq \frac{L_1 c t_1^2}{2(c - v^* - \varepsilon)} \left(\|\vec{r}_{2,*} - \vec{r}_{2,**}\|_{C^1([t_0 - \Delta, t_1], \mathbb{R}^2)} + \|\vec{r}_{1,*} - \vec{r}_{1,**}\|_{C^1([t_0 - \Delta, t_1], \mathbb{R}^2)} \right) \tag{43}$$

і

$$\left| \frac{d\left(\left(\Gamma_{1,[t_0,t_1]}(\vec{r}_{1,*}, \vec{r}_{2,*}) \right)(t) - \left(\Gamma_{1,[t_0,t_1]}(\vec{r}_{1,**}, \vec{r}_{2,**}) \right)(t) \right)}{dt} \right| \leq$$

$$\leq \frac{L_1 c t_1}{c - v^* - \varepsilon} \left(\|\vec{r}_{2,*} - \vec{r}_{2,**}\|_{C^1([t_0 - \Delta, t_1], \mathbb{R}^2)} + \|\vec{r}_{1,*} - \vec{r}_{1,**}\|_{C^1([t_0 - \Delta, t_1], \mathbb{R}^2)} \right). \tag{44}$$

Нерівності (43) і (44) виконуються і для $\left(\Gamma_{2,[t_0,t_1]}(\vec{r}_{1,*}, \vec{r}_{2,*}) \right)(t) - \left(\Gamma_{2,[t_0,t_1]}(\vec{r}_{1,**}, \vec{r}_{2,**}) \right)(t)$ та $\dfrac{d\left(\left(\Gamma_{2,[t_0,t_1]}(\vec{r}_{1,*}, \vec{r}_{2,*}) \right)(t) - \left(\Gamma_{2,[t_0,t_1]}(\vec{r}_{1,**}, \vec{r}_{2,**}) \right)(t) \right)}{dt}$.

Отже, якщо t_1 є таким, що

$$\frac{L_1 c}{c - v^* - \varepsilon} \max\left\{ \frac{(t_1 - t_0)^2}{2}, t_1 - t_0 \right\} < 1, \tag{45}$$

то відображення $\Gamma_{[t_0,t_1]}$ є стискаючим.

Тоді за принципом стискаючих відображень [17, 18] відображення $\Gamma_{[t_0,t_1]}$ має єдину нерухому точку $\left(\vec{r}^{\,*}_{0,1}, \vec{r}^{\,*}_{0,2} \right) \in \mathcal{M}_{1,[t_0,t_1]} \times \mathcal{M}_{2,[t_0,t_1]}$.

Таким чином, система (1) – (4) у випадку заданих початкових значень $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$ на початковому відрізку $[t_0 - \Delta, t_0]$ і t_1, для якого виконується (45), має єдиний розв'язок. Цей розв'язок можна знайти у вигляді границь послідовностей функцій (32), (33). Зазначимо, що ці послідовності збігаються до розв'язку системи (1) рівномірно на $[t_0 - \Delta, t_1]$ (на підставі властивостей принципу стискаючих відображень). Завдяки цьому і лемі 1 послідовності функцій (34) і (35) також збігаються рівномірно на $[t_0, t_1]$ до розв'язків рівнянь (2) і (3) відповідно.

Очевидно, що швидкість збіжності послідовностей (32) – (35) у випадку (45) залежить від мализни величини

$$q = \frac{L_1 c}{c - v^* - \varepsilon} \max\left\{ \frac{(t_1 - t_0)^2}{2}, t_1 - t_0 \right\}.$$

Теорему 2 доведено.

3. Знаходження розв'язку системи (1) – (4) на великих проміжках часу. Зазначимо, що теорема 2 є локальною теоремою існування розв'язку системи (1) – (4), оскільки вона гарантує існування та єдиність розв'язку цієї системи на деякому відрізку $[t_0, t_1]$ малої довжини (значення t_1 можна оцінити, використавши (45)).

Знайдений із використанням теореми 2 і методу ітерацій розв'язок системи (1) – (4) на відрізку $[t_0, t_1]$ можна продовжити на деякий відрізок $[t_1, t_2]$, $t_1 < t_2 < T$, з малою довжиною, що залежить від розв'язку. Продовження цього розв'язку здійснюється із застосуванням теореми 2 до системи (1) – (4), методу ітерацій до системи інтегральних рівнянь

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_1(t_1) + (t - t_1)\,\dot{\vec{r}}_1(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t} \left(\int\limits_{t_1}^{\tau} \vec{F}_1(\vec{r}_2(s - \tau_2(s)), \vec{r}_1(s))\, ds \right) d\tau$$

і

$$\vec{r}_2(t) = \vec{r}_2(t_1) + (t - t_1)\,\dot{\vec{r}}_2(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t} \left(\int\limits_{t_1}^{\tau} \vec{F}_2(\vec{r}_1(s - \tau_1(s)), \vec{r}_2(s))\, ds \right) d\tau, \quad t \in [t_1, T),$$

що аналогічна системі (30), (31), і з урахуванням значень розв'язку системи на відрізку $[t_0, t_1]$, знайденого на попередньому кроці.

Операцію продовження розв'язку можна повторювати як завгодно багато разів. Так, на k-му кроці ($k \geq 2$) при знаходженні продовження розв'язку системи (1)–(4) на відрізок $[t_k, t_{k+1}]$, $t_k < t_{k+1} < T$, використовуються інтегральні рівняння

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_1(t_k) + (t - t_k)\,\dot{\vec{r}}_1(t_k) + \int\limits_{t_k}^{t} \left(\int\limits_{t_k}^{\tau} \vec{F}_1(\vec{r}_2(s - \tau_2(s)), \vec{r}_1(s))\, ds \right) d\tau$$

і

$$\vec{r}_2(t) = \vec{r}_2(t_k) + (t - t_k)\,\dot{\vec{r}}_2(t_k) + \int\limits_{t_k}^{t} \left(\int\limits_{t_k}^{\tau} \vec{F}_2(\vec{r}_1(s - \tau_1(s)), \vec{r}_2(s))\, ds \right) d\tau, \quad t \in [t_k, T).$$

Очевидно, що на кожному кроці також потрібно знаходити функції $\tau_1(t)$ і $\tau_2(t)$.

Такий метод знаходження розв'язку, пов'язаний із продовженням його з відрізка $[t_{k-1}, t_k]$ на відрізок $[t_k, t_{k+1}]$ при кожному $k \geq 1$, називатимемо методом кроків.

У результаті за допомогою методу кроків отримаємо непродовжуваний (глобальний) розв'язок або розв'язок на відносно великому відрізку $[0, T^*] \subset [0, T)$. Цей розв'язок єдиний завдяки єдиності на кожному кроці продовжень розв'язку на відповідні відрізки. Зазначимо, що при побудові глобального розв'язку системи довжини відрізків, на які продовжується розв'язок, можуть прямувати до нуля.

Виділимо випадок, коли знаходження розв'язку системи (1)–(4) є більш ефективним.

Результати статті [13] показують, що система (1)–(4) може мати розв'язки $\vec{r}_1(t)$ і $\vec{r}_2(t)$, для яких $|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Врахування цього та дослідження пп. 2.3 приводять до висновку, що такого типу розв'язки також можна знаходити методами кроків та ітерацій. При цьому сталі L_1 і L_2 в (41) будуть зменшуватися, а величина $\inf_{k \geq p}(t_{k+1} - t_k)$ буде монотонно зростати зі зростанням p. Це буде прискорювати процес знаходження розв'язків системи (1)–(4) на великих проміжках часу.

4. Додаткові зауваження, літературні вказівки та можливі застосування результатів досліджень. 1. Основні моменти сучасного стану теорії диференціальних рівнянь із відхилювальним аргументом викладено в [1 – 11] та інших працях. Ця теорія має важливе значення для небесної механіки, що підтверджується статтями [12, 13]. Без неї важко розв'язувати деякі проблеми сучасної небесної механіки. Оволодіння математичним апаратом цієї теорії є корисним для кожного, коло інтересів якого охоплює некласичну небесну механіку зі скінченною швидкістю гравітації. Сподіваюся, що ця стаття, а також статті [12, 13] сприятимуть активнішому впровадженню в небесну механіку методів теорії диференціальних рівнянь із відхилювальним аргументом.

2. Рух двох тіл із масами m_1 і m_2 на підставі другого закону Ньютона та закону всесвітнього тяжіння з урахуванням скінченної швидкості гравітації описується системою (1) – (4) у випадку $A_1 = Gm_2,\ A_2 = Gm_1,$ де G — гравітаційна стала, c — швидкість гравітації (див. [12, 13]).

3. Результати цієї статті є важливим додатком (з математичної точки зору) до досліджень із небесної механіки, що враховують скінченність швидкості гравітації і наведені в [12, 13]. У цих працях побудовано математичну модель Сонячної системи і, зокрема, розглянуто задачу двох тіл зі скінченною швидкістю гравітації, а також вивчено деякі їхні властивості. Використання принципу запізнювання гравітації дозволило відкрити нові властивості руху тіл (закон зростання секторної швидкості, некеплеровість та нестійкість руху двох тіл, спіральні траєкторії руху тіл тощо). Зазначимо, що без використання диференціальних рівнянь із запізнювальним аргументом, що розглядаються в цій статті (ці рівняння використані в [12, 13]), виявити такі властивості руху тіл неможливо.

4. Ітераційні методи знаходження розв'язків системи (1) – (4) дають можливість використовувати для знаходження розв'язків цифрові технології і досліджувати траєкторії руху двох тіл як на малих, так і на великих проміжках часу. Ці методи сприятимуть подальшому розвитку ітераційних методів обчислювальної математики.

Література

1. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М.; Л.: Гостехиздат, 1951. – 255 с.
2. *Мышкис А. Д., Эльсгольц Л. Э.* Состояние и проблемы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Успехи мат. наук. – 1967. – **22**, № 2. – С. 21 – 57.
3. *Мышкис А. Д.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Успехи мат. наук. – 1977. – **32**, № 2. – С. 173 – 202.
4. *Пинни Э.* Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 248 с.
5. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
6. *Рубаник В. П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
7. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – 296 с.
8. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 423 с.
9. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинатне, 1986. – 288 с.
10. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 280 с.
11. *Слюсарчук В. Ю.* Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією. – Рівне: Вид-во Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, 2003. – 366 с.
12. *Слюсарчук В. Ю.* Математична модель Сонячної системи з урахуванням швидкості гравітації // Нелінійні коливання. – 2018. – **21**, № 2. – С. 238 – 261.
13. *Слюсарчук В. Ю.* Некеплеровість та нестійкість руху двох тіл, спричинені скінченністю швидкості гравітації // Нелінійні коливання. – 2018. – **21**, № 3. – С. 397 – 419.
14. *Копейкин С. М., Фомалонт Э.* Фундаментальный предел скорости гравитации и его измерение // Земля и Вселенная. – 2004. – № 3.
15. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – М.: Наука, 1966. – Т. 1. – 608 с.
16. *Зорич В. А.* Математический анализ. – М.: Наука, 1984. – Ч. II. – 640 с.
17. *Антоневич А. Б., Радыно Я. В.* Функциональный анализ и интегральные уравнения. – Минск: Университетское, 1984. – 351 с.
18. *Колмогоров А. М., Фомін С. В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – Київ: Вища шк., 1974. – 456 с.
19. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. – М.: Мир, 1977. – 233 с.

Одержано 25.07.18