УДК 517.95, 519.21

Е. Я. Хруслов, Л. А. Хилькова (Физ.-техн. ин-т низких температур НАН Украины, Харьков)

МОДЕЛЬ СТАЦИОНАРНОЙ ДИФФУЗИИ С ПОГЛОЩЕНИЕМ В ОБЛАСТЯХ С МЕЛКОЗЕРНИСТОЙ СЛУЧАЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

We consider a boundary-value problem for the equation of stationary diffusion in a porous medium filled with small ball inclusions with absorbing surfaces. Absorption is described by a Robin's nonlinear boundary condition. The locations and radii of the inclusions are randomly distributed and described by a set of finite-dimensional distribution functions. We study the asymptotic behavior of solutions to the problem when the number of balls increases and their radii decrease. We derive a homogenized equation for the main term of the asymptotics, and determine sufficient conditions for the distribution functions under which the solutions converge to the solutions of the homogenized problem in probability.

Розглядається крайова задача для рівняння стаціонарної дифузії в пористому середовищі, заповненому дрібними включеннями — кулями з поглинаючою поверхнею. Поглинання описується нелінійною крайовою умовою типу Робена. Розташування і радіуси куль випадкові і описуються сукупністю скінченновимірних функцій розподілу. Вивчається асимптотична поведінка розв'язків задачі, коли кількість куль збільшується, а їхні радіуси зменшуються. Виведено усереднене рівняння, що описує головний член асимптотики, і визначено достатні умови для функцій розподілу, при яких розв'язки за ймовірністю збігаються до розв'язків усередненої задачі.

1. Введение. С конца прошлого века особое внимание физиков и математиков привлечено к рассмотрению диффузионных процессов в микронеоднородных средах с реакцией (поглощением) на границе микроскопических частиц или пор. Для стационарных диффузионных процессов плотность диффундирующего вещества $u^\varepsilon(x)$ описывается краевой задачей с граничными условиями типа Робена:

$$-D\Delta u^\varepsilon = f^\varepsilon(x), \qquad x \in \Omega^\varepsilon = \Omega \setminus B^\varepsilon, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon\sigma(u^\varepsilon) = 0, \qquad x \in \partial B^\varepsilon, \tag{1.2}$$

$$u^\varepsilon(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega. \tag{1.3}$$

Здесь D — коэффициент диффузии, ε — малый параметр, характеризующий масштаб микроструктуры, $\Omega \in R^3$ — ограниченная область, в которой рассматривается процесс, B^ε — сильно „изрыхленное” множество в Ω типа пористого тела, функция $\sigma(u)$ характеризует поглощение вещества на границе пор ∂B^ε. Приведем некоторые практически важные функции поглощения $\sigma(u)$, используемые в химических технологиях (при малых ε):

1) $\sigma(u) = \dfrac{\alpha u}{1+\beta u}$, $\alpha, \beta > 0$ (кинетика Лангмюра);

2) $\sigma(u) = |u|^{p-1}u$, $0 < p < 1$ (кинетика Френдлиха).

Сложная структура области Ω^ε не вносит дополнительных затруднений в изучение разрешимости задачи (1.1)–(1.3): для каждого фиксированного ε при различных предположениях можно доказать существование решения (см., например, [1]), однако при малых ε (вследствие сильной изрыхленности области Ω^ε) практически невозможно найти эти решения. Но часто такие среды имеют устойчивые макроскопические характеристики, поэтому естественный подход в этом случае состоит в построении и переходе к макроскопической (усредненной) модели процесса. Для этого изучается асимптотическое поведение решений $u^\varepsilon(x)$ задачи (1.1)–(1.3) при $\varepsilon \to 0$ и выводится усредненное уравнение, описывающее главный член асимптотики, которое и принимают за усредненную модель процесса.

Типичной макроскопической моделью стационарной диффузии в пористой среде с нелинейным поглощением на границе является уравнение вида

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + C(x,u) = F(x), \tag{1.4}$$

рассматриваемое во всей области Ω, коэффициенты которого являются эффективными характеристиками среды: тензор $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{3}$ характеризует проводимость пористой среды, а функция $C(x,u)$ — поглощение на ее границе.

Уравнение (1.4) получается в результате усреднения задачи (1.1)–(1.3) в перфорированной области, удовлетворяющей условию сильной связности. В частности, если перфорирующее множество B^{ε} является объединением не пересекающихся ε-периодически расположенных в R^3 частиц B_i^{ε} $(B^{\varepsilon} = \cup_i B_i^{\varepsilon})$ размера порядка $O(\varepsilon)$, то это условие заведомо выполняется. Задачи усреднения краевых задач типа (1.1)–(1.3) в таких областях исследованы достаточно подробно (см. [2–12]), полученные для них эффективные тензор проводимости $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{3}$ и функция поглощения $C(u)$ не зависят от $x \in \Omega$. Характерной чертой таких задач усреднения является то, что площадь поверхности ∂B^{ε} увеличивается при $\varepsilon \to 0$ как величина порядка $O(\varepsilon^{-1})$, поэтому в граничном условии (1.2) введен малый множитель ε, обеспечивающий конечность эффективного поглощения в пределе при $\varepsilon \to 0$.

В последние годы, в связи с развитием нанотехнологий, внимание математиков стали привлекать задачи усреднения в областях «малой» перфорации, когда перфорирующее множество B^{ε} состоит из частиц диаметра порядка $O(\varepsilon^{\alpha})$, $\alpha > 1$, значительно меньших, чем расстояния между ними, которое в среднем имеет порядок $O(\varepsilon)$. Впервые задача усреднения в областях «малой» перфорации была рассмотрена в 1964 году в работе В. А. Марченко, Е. Я. Хруслова [13], в которой исследовалась задача Дирихле в области, перфорированной частицами критического размера порядка $O(\varepsilon^3)$. В работе [13] такие области были названы областями с мелкозернистой границей. Следуя ей, мы используем этот термин в настоящей работе.

Первые результаты по усреднению уравнения диффузии в областях с мелкозернистой поглощающей границей были получены в работах [14, 15]. Так, в работе [15] рассматривалась краевая задача вида (1.1)–(1.3) в области, перфорированной системой мелких одинаковых шаров радиуса $C\varepsilon^{\alpha}$, $1 < \alpha < 2$, с центрами, образующими ε-периодическую решетку. Поскольку площадь поглощающей поверхности в этом случае имеет порядок $O(\varepsilon^{2\alpha-3})$, то в граничное условие (1.2) вместо ε был введен множитель ε^{β}, $\beta \leq 3 - 2\alpha$, что обеспечивает ненулевое эффективное поглощение. В этой работе было получено усредненное уравнение вида (1.4), в котором $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$, и выведена формула для определения эффективного поглощения $C(x,u) = C_{\alpha\beta}(u)$ при различных значениях α и β.

В последнее десятилетие появилось большое число работ, посвященных аналогичным задачам (см. [16–23]). Заметим, что в работах [14–23] рассматривались перфорированные области $\Omega^{\varepsilon} = \Omega \setminus \cup_i B_i^{\varepsilon}$, где B_i^{ε} — мелкие не пересекающиеся частицы, периодически распределенные в Ω с периодом ε. Представляет, однако, большой интерес изучение таких задач и в более общем случае, когда перфорирующие множество B^ε распределяется в области Ω не периодически, а произвольно (в том числе случайно).

В 2017 году вышла работа Л. А. Хильковой [24], в которой изучена задача усреднения уравнения диффузии с нелинейным поглощением на границе $\partial B^\varepsilon = \cup_i \partial B_i^\varepsilon$, где B_i^ε — шары радиусов $r_i^\varepsilon = c_i\varepsilon^\alpha$, $\alpha > 1$, с центрами x_i^ε, произвольно распределенными в области Ω. При определенных условиях на расположения центров x_i^ε и радиусов шаров r_i^ε получен результат, обобщающий результат работы [15] на случай непериодического распределения (см. пункт 3). Эти условия запрещают шарам очень сильно сближаться и образовывать плотные группы (кластеры) и гарантируют выполнение условия сильной связности для областей Ω^ε. Проверка этих условий затруднительна. Но оказывается, что если радиусы шаров малы $r_i^\varepsilon = c_i\varepsilon^\alpha$, $\alpha > 2$, и шары распределены в области Ω случайно, то эти условия выполняются с большой вероятностью. Точная формулировка этого результата была приведена в работе [25] без доказательства, в данной работе мы даем его полное доказательство.

2. Постановка задачи и основной результат. Пусть $\Omega \in R^3$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, в которой расположены включения $B_i^\varepsilon = B(x^{i\varepsilon}, r_i^\varepsilon)$ — не пересекающиеся шары радиусов r_i^ε с центрами в точках $x^{i\varepsilon}$, $i = 1, \ldots, N^\varepsilon$. Малый параметр ε является порядком „среднего” расстояния между ближайшими шарами и также характеризует размеры шаров. Мы предполагаем, что количество шаров $N^\varepsilon = O(\varepsilon^{-3})$, а их радиусы $r_i^\varepsilon = O(\varepsilon^\alpha)$, где $\alpha > 2$, т. е. размеры шаров значительно меньше расстояния между ними.

Определим перфорированную область

$$\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus B^\varepsilon \quad \left(B^\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N^\varepsilon} B_i^\varepsilon \right),$$

в которой рассматривается следующая краевая задача для уравнения Пуассона с нелинейным граничным условием типа Робена на поверхности шаров B_i^ε, $i = 1, \ldots, N^\varepsilon$:

$$-\Delta u^\varepsilon(x) = F(x), \qquad x \in \Omega^\varepsilon, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon(x)}{\partial \nu} + \sigma^\varepsilon(x^{i\varepsilon}, u^\varepsilon) = 0, \qquad x \in \partial B_i^\varepsilon, \quad i = 1, \ldots, N^\varepsilon, \tag{2.2}$$

$$u^\varepsilon(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega. \tag{2.3}$$

Здесь $\Delta = \sum_{i=1}^{3} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа, ν — единичная нормаль к границе ∂B^ε, внешняя по отношению к области Ω^ε; функция источников $F(x) \in L^2(\Omega)$ и функция поглощения $\sigma^\varepsilon(x, u)$ заданы, а функция $\sigma^\varepsilon(x, u)$ удовлетворяет условиям:

a$_1$) $\sigma^\varepsilon(x, u) = \varepsilon^\beta \sigma(x, u)$, где $\beta \in \mathbb{R}$, $\sigma(x, u) \in C(\Omega, C^1(\mathbb{R}))$;

a$_2$) $\sigma(x, 0) = 0$;

a$_3$) $\forall\, x \in \Omega : 0 < k_1 \leq \dfrac{\partial}{\partial u}\sigma(x, u) \leq k_2(1 + |u|^\theta)$, где $0 \leq \theta < 1$.

Задача (2.1) – (2.3) описывает процесс стационарной диффузии частиц в перфорированной области Ω^ε, сопровождаемый поглощением на поверхности включений B^ε. Как известно, при каждом фиксированном ε существует единственное решение $u^\varepsilon(x)$ задачи (2.1) – (2.3). В данной работе изучается асимптотическое поведение $u^\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to 0$, когда число шаров $N^\varepsilon \to \infty$, их радиусы $r_i^\varepsilon \to 0,\ i = 1, \ldots, N^\varepsilon$, а расположение шаров в Ω и значения их радиусов случайны. Точнее, мы предполагаем, что центры $x^{i\varepsilon}$ шаров B_i^ε и их радиусы r_i^ε определяются набором s-частичных функций распределения [26]

$$f_s^\varepsilon(x^1, x^2, \ldots, x^s; r_1, r_2, \ldots, r_s)\colon (\Omega)^s \times [0,\infty)^s \to [0,\infty), \qquad s = 1, 2, \ldots, N^\varepsilon, \tag{2.4}$$

так что вероятность нахождения центров и радиусов данной группы s шаров в интервалах $(x^i, x^i + dx^i),\ (r_i, r_i + dr_i),\ i = 1, \ldots, n$, равна

$$f_s^\varepsilon(x^1, x^2, \ldots, x^s; r_1, r_2, \ldots, r_s)\, dx^1 \ldots dx^s dr_1 \ldots dr_s.$$

Эти функции удовлетворяют условиям симметрии, нормализации и согласования, согласно их вероятностной интерпретации [27]:

$$f_s^\varepsilon(x^1, \ldots, x^k, \ldots, x^l \ldots, x^s; r_1, \ldots, r_k, \ldots, r_l, \ldots, r_s) =$$
$$= f_s^\varepsilon(x^1, \ldots, x^l, \ldots, x^k \ldots, x^s; r_1, \ldots, r_l, \ldots, r_k, \ldots, r_s),$$

$$\int_\Omega \int_0^\infty \ldots \int_\Omega \int_0^\infty f_s^\varepsilon(x^1, \ldots, x^s; r_1, \ldots, r_s)\, dr_1 dx^1 \ldots dr_s dx^s = 1, \qquad s = 1, \ldots, N^\varepsilon,$$

$$\int_\Omega \int_0^\infty f_s^\varepsilon(x^1, \ldots, x^s; r_1, \ldots, r_s)\, dr_s dx^s = f_{s-1}^\varepsilon(x^1, \ldots, x^{s-1}; r_1, \ldots, r_{s-1}), \qquad s = 2, \ldots, N^\varepsilon.$$

Поскольку шары не должны пересекаться между собой и с границей $\partial\Omega$, то эти функции должны также удовлетворять условию

$$f_s^\varepsilon(x^1, \ldots, x^s; r_1, \ldots, r_s) = 0,$$

если $|x^{i\varepsilon} - x^{j\varepsilon}| < r_i^\varepsilon + r_j^\varepsilon$ для некоторых $i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, s$, или $\operatorname{dist}(x^{i\varepsilon}, \partial\Omega) \leq r_i^\varepsilon$ для некоторого $i = 1, \ldots, s$.

Одно- и двухчастичную функции распределения f_1^ε и f_2^ε выберем так, чтобы для них выполнялись условия:

b$_1$) $f_1^\varepsilon(x; r) = \varepsilon^{-\alpha} f(x; \varepsilon^{-\alpha} r)$, где параметр $\alpha > 2$, $f(x, r) \in L^\infty(\Omega \times [0,\infty))$ — неотрицательная функция с компактным носителем $\Omega' \times [a_0, A_0]$ в $\Omega \times [0,\infty)$, $0 < a_0 < A_0 < \infty$, нормированная на 1 в $L^1(\Omega \times [0,\infty))$;

b$_2$) $f_2^\varepsilon(x^1, x^2; r_1, r_2) = f_1^\varepsilon(x^1; r_1) f_1^\varepsilon(x^2; r_2) + q^\varepsilon(x^1, x^2; r_1, r_2)$, где функция $q^\varepsilon(x^1, x^2; r_1, r_2) = -f_1^\varepsilon(x^1; r_1) f_1^\varepsilon(x^2; r_2)$ при $|x^{i\varepsilon} - x^{j\varepsilon}| < r_i^\varepsilon + r_j^\varepsilon$ и при $\varepsilon \ll 1$ в среднем мала так, что при любых $\varkappa_1, \varkappa_2 \geq 0$

$$\int_\Omega \int_0^\infty \int_\Omega \int_0^\infty r_1^{\varkappa_1} r_2^{\varkappa_2} \big| q^\varepsilon(x^1, x^2; r_1, r_2) \big| dr_1 dx^1 dr_2 dx^2 < C \varepsilon^{\alpha(\varkappa_1 + \varkappa_2 + 3)}.$$

***Замечание* 2.1.** Из условия b$_1$) следует, что с вероятностью 1 шары B_i^ε имеют радиусы r_i^ε, удовлетворяющие неравенству $a_0 \varepsilon^\alpha \leq r_i^\varepsilon \leq A_0 \varepsilon^\alpha$, $\alpha > 2$, и не пересекаются с границей $\partial\Omega$. В силу условия b$_2$) шары B_i^ε с вероятностью 1 не пересекаются между собой, располагаются на расстояниях больших, чем $2A_0\varepsilon^\alpha$, и распределены почти независимо. Таким образом, условие b$_2$) является аналогом условия ослабления корреляции [27].

При любом $\varepsilon > 0$ функции распределения (2.4) порождают вероятностную меру P^ε в вероятностном пространстве $\mathbb{P}^\varepsilon$ [26, 28]. Точки ω^ε этого пространства находятся во взаимно однозначном соответствии со случайными множествами $B(\omega^\varepsilon) = \cup_i B_i^\varepsilon$ в Ω. Для каждой реализации множества $B(\omega^\varepsilon)$ существует единственное обобщенное решение $u(x, \omega^\varepsilon)$ задачи (2.1)–(2.3) в области $\Omega(\omega^\varepsilon) = \Omega \setminus B(\omega^\varepsilon)$.

Определение 2.1. *Будем говорить, что случайная функция* $u(x, \omega^\varepsilon) \in H^1(\Omega(\omega^\varepsilon))$ *сходится при* $\varepsilon \to 0$ *по вероятности* P^ε *в метрике пространства* $L^p(\Omega(\omega^\varepsilon))$ *к функции* $u(x) \in H^1(\Omega)$, *если*

$$\forall\, \delta > 0: \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{P}^\varepsilon \left\{ \omega^\varepsilon \in \mathbb{P}^\varepsilon : \int\limits_{\Omega(\omega^\varepsilon)} \big| u(x, \omega^\varepsilon) - u(x) \big|^p \, dx < \delta \right\} = 1.$$

В данной работе мы докажем, что если $u(x, \omega^\varepsilon)$ — обобщенное решение задачи (2.1)–(2.3), то предельная функция $u(x)$ является решением усредненной краевой задачи

$$-\Delta u(x) + C_u(x, u) = F(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{2.5}$$

$$u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{2.6}$$

где $C_u(x, u) = \dfrac{\partial}{\partial u} C(x, u)$, а функция $C(x, u)$ характеризует эффективное поглощение мелкозернистой границы ∂B^ε области Ω^ε и определяется формулой

$$C(x, u) = \int\limits_0^\infty C_{\alpha\beta}(x, u; r) f(x; r)\, dr, \tag{2.7}$$

в которой $f(x; r)$ — функция из условия b$_1$), а функции $C_{\alpha\beta}(x, u; r)$ имеют следующие определения в зависимости от значений параметров $(\alpha,\, \beta) \in \Lambda_p = \{2 < \alpha \leq 3,\ \beta \geq 3 - 2\alpha\} \cup \{\alpha > 3,\ -\infty < \beta < \infty\}$:

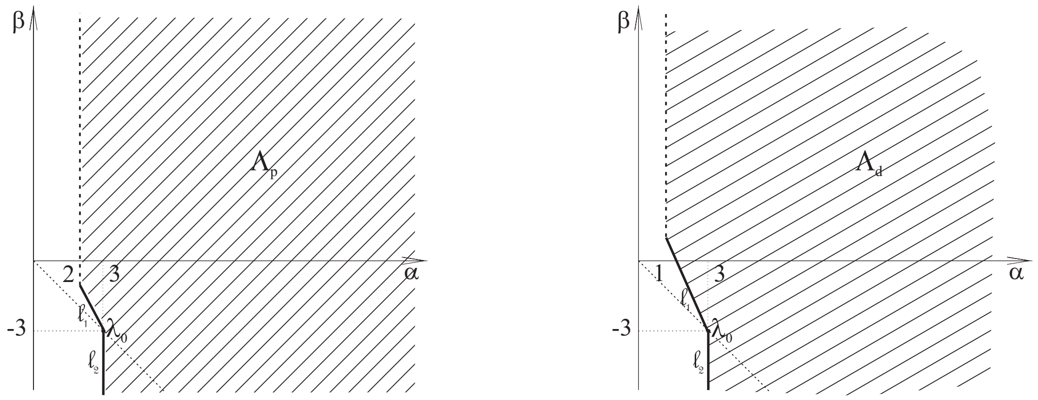
$$C_{\alpha\beta}(x, u; r) = \begin{cases} 2\pi r^2 g(x, u) & \text{при} \quad (\alpha,\, \beta) \in \ell_1, \\ 2\pi r \left[u - V\right]^2 + 2\pi r^2 g(x, V) & \text{при} \quad (\alpha,\, \beta) = \lambda_0, \\ 2\pi r u^2 & \text{при} \quad (\alpha,\, \beta) \in \ell_2, \\ 0 & \text{при} \quad (\alpha,\, \beta) \in \Lambda_p \setminus (\ell_1 \cup \lambda_0 \cup \ell_2). \end{cases} \tag{2.8}$$

Здесь через $\ell_1,\ \ell_2,\ \lambda_0$ обозначены отдельные участки границы области Λ_p: $\ell_1 = \{2 < \alpha < 3,\ \beta = 3 - 2\alpha\}$, $\ell_2 = \{\alpha = 3,\ \beta < -\alpha\}$, $\lambda_0 = (3, -3)$ (см. рисунок, a),

$$g(x, u) = 2 \int\limits_0^u \sigma(x, s)\, ds \tag{2.9}$$

и $V = V(u)$ — решение уравнения

$$V(u) = u - r\sigma(x, V). \tag{2.10}$$



а *б*

Область изменения параметров α, β: *а* — вероятностная модель, *б* — детерминированная модель.

***Замечание* 2.2.** Из (2.7)–(2.10) и свойств функции $\sigma(x,u)$ следует, что $C(x,u) \in L^\infty\big(\Omega, C^2(\mathbb{R})\big)$ $\big(C(x,u) = 0$ при $(\alpha,\, \beta) \in \Lambda_p \setminus (\ell_1 \cup \lambda_0 \cup \ell_2)$, отлична от 0 и конечна на ломаной $\ell_1 \cup \cup \lambda_0 \cup \ell_2\big)$ и $\dfrac{\partial^2 C(x,u)}{\partial u^2} \geq 0$, поэтому функция $C_u(x,u) = \dfrac{\partial}{\partial u} C(x,u)$ удовлетворяет неравенству

$$\big(C_u(x,u_2) - C_u(x,u_1)\big)(u_2 - u_1) \geq 0,$$

которое гарантирует единственность решения задачи (2.5), (2.6).

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть функции распределения* $f_1^\varepsilon,\ f_2^\varepsilon$ *удовлетворяют условиям* b$_1$), b$_2$). *Тогда обобщенное решение* $u^\varepsilon(x)$ *задачи* (2.1)–(2.3), *рассмотренной при случайных распределениях шаров* ω^ε, *является случайной функцией* $u(x,\omega^\varepsilon)$, *которая при* $\varepsilon \to 0$ *сходится по вероятности* P^ε *в метрике пространства* $L^p(\Omega(\omega^\varepsilon))$, $p < 6$ *(в смысле определения* 2.1), *к неслучайной функции* $u(x)$ *— обобщенному решению краевой задачи* (2.5), (2.6).

Доказательство теоремы 2.1 базируется на доказательстве теоремы 1 работы [24], в которой была рассмотрена аналогичная детерминированная модель для более широкой области значений параметров α, β (см. рисунок, *б*). Теорема 1 работы [24] доказывалась при определенных условиях для распределения шаров B_i^ε и их радиусов, эти условия и сама теорема (теорема 3.1) для удобства читателей приведены в пункте 3. При доказательстве теоремы 2.1 настоящей работы мы покажем, что если функции распределения $f_1^\varepsilon,\ f_2^\varepsilon$ удовлетворяют условиям b$_1$), b$_2$), то условия теоремы 3.1 при $\alpha > 2$ выполнены „в вероятностном смысле”. При значениях параметра $1 < \alpha \leq 2$ вопрос о сходимости решений третьей краевой задачи, рассматриваемой в областях с мелкозернистой случайной границей, остается открытым.

3. Детерминированное распределение шаров. В этом пункте для удобства читателей мы представляем основные результаты работы [24], которые будут использованы при доказательстве теоремы 2.1.

Рассмотрим задачу (2.1)–(2.3) в детерминированной области $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus \cup_{i=1}^{N^\varepsilon} B_i^\varepsilon$, где $B_i^\varepsilon = B(x^{i\varepsilon}, r_i^\varepsilon)$, $i = 1, \ldots, N^\varepsilon$, — шары с центрами в заданных точках $x^{i\varepsilon}$ радиусов r_i^ε, которые мы определим равенством

$$r_i^\varepsilon = a_i^\varepsilon \varepsilon^\alpha, \qquad i = 1, \ldots, N^\varepsilon. \tag{3.1}$$

Здесь параметр $\alpha > 1$, а числа a_i^ε выбираются так, что $0 < a_0 \le a_i^\varepsilon \le A_0 < \infty$ и $a_0,\ A_0$ не зависят от ε.

Обозначим через

$$d_i^\varepsilon = \operatorname{dist}\left(x^{i\varepsilon}, \bigcup_{i\neq j} x^{j\varepsilon} \cup \partial\Omega\right) \tag{3.2}$$

расстояние от центра i-го шара до центра ближайшего шара или до границы $\partial\Omega$;

$$b_i^\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon^\beta (r_i^\varepsilon)^2 & \text{при} \quad \beta \ge -\alpha, \\ r_i^\varepsilon & \text{при} \quad \beta < -\alpha, \end{cases} \tag{3.3}$$

числа b_i^ε характеризуют порядок малости поглощающей способности каждого шара при различных значениях параметров $\alpha,\ \beta$.

Будем предполагать, что шары в области Ω располагаются так, что выполняются следующие условия:

c$_1$) $\exists\ \dfrac{2}{3} < \varkappa_1 < 1 : d_i^\varepsilon \ge (r_i^\varepsilon)^{\varkappa_1}$ и $\lim_{\varepsilon\to 0} \max_i d_i^\varepsilon \to 0$;

c$_2$) $\exists\ \dfrac{6}{4-\theta} < \varkappa_2 \le 2 : \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \dfrac{(b_i^\varepsilon)^{\varkappa_2}}{(d_i^\varepsilon)^{3(\varkappa_2-1)}} \le C_b$, где C_b не зависит от ε и $0 \le \theta < 1$.

***Замечание* 3.1.** Если учесть, что среднее расстояние между центрами шаров B_i^ε имеет порядок ε, то условия c$_1$), c$_2$) требуют, чтобы шары располагались не слишком близко один к другому. В остальном расположение шаров можно считать произвольным.

Пространственное распределение плотности поглощения в области Ω зададим с помощью обобщенной функции от x, зависящей от параметров $\varepsilon,\ u$:

$$C^\varepsilon(x,u) = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} C_i^\varepsilon(u)\cdot\delta(x - x^{i\varepsilon}) \quad \big(\forall\,\varepsilon > 0\,\forall\,u\in\mathbb{R} : C^\varepsilon(x,u) \in \mathcal{D}'(\Omega)\big), \tag{3.4}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, а $C_i^\varepsilon(u)$ — функции поглощательной способности шаров, определенные при $(\alpha,\beta)\in\Lambda_d$ равенствами

$$C_i^\varepsilon(u) = \begin{cases} 2\pi(a_i^\varepsilon)^2 g(x^{i\varepsilon},u)\varepsilon^{2\alpha+\beta} & \text{при} \quad \alpha+\beta > 0, \\ 2\pi a_i^\varepsilon \left[u - V_i^\varepsilon\right]^2 \varepsilon^\alpha + 2\pi(a_i^\varepsilon)^2 g(x^{i\varepsilon},V_i^\varepsilon)\varepsilon^{2\alpha+\beta} & \text{при} \quad \alpha+\beta = 0, \\ 2\pi a_i^\varepsilon u^2 \varepsilon^\alpha & \text{при} \quad \alpha+\beta < 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

В этих равенствах функция $g(x,u)$ определена формулой (2.9) и $V_i^\varepsilon = V_i^\varepsilon(u)$ — решение уравнения

$$V_i^\varepsilon(u) = u - a_i^\varepsilon \sigma(x^{i\varepsilon}, V_i^\varepsilon),$$

аналогичного уравнению (2.10).

Определение 3.1. *Будем говорить, что последовательность функций* $\left\{u^\varepsilon(x)\in L^p(\Omega^\varepsilon)\right\}_\varepsilon$ *называется сходящейся в* $L^p(\Omega^\varepsilon,\Omega)$, *если существует функция* $u(x)\in L^p(\Omega)$ *такая, что* $u^\varepsilon(x)$ *сходится к* $u(x)$ *по норме в* $L^p(\Omega^\varepsilon)$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u^\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)} = 0.$$

В работе [24] была доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть области* Ω^ε *удовлетворяют условиям* c_1), c_2) *и при* $\varepsilon \to 0$ *обобщенные функции* $C^\varepsilon(x,u)$ *при всех* $u \in \mathbb{R}$ *сходятся в слабой топологии пространства* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *к функции* $C(x,u) \in C(\Omega, C^1(\mathbb{R}))$. *Тогда обобщенное решение* $u^\varepsilon(x)$ *задачи* (2.1)–(2.3) *сходится в* $L^p(\Omega^\varepsilon, \Omega)$ (*при* $p < 6$) *к функции* $u(x)$, *являющейся обобщенным решением усредненной задачи* (2.5), (2.6), *где функция* $C(x,u)$ *определена формулой* (3.4).

4. Вероятностный аналог условий теоремы 3.1. Покажем, что условия теоремы 3.1 выполняются по вероятности. Сразу можем отметить, что в силу условия b_1) условие c_1) выполняется с вероятностью 1.

Покажем выполнение условия c_2). Обозначим через $T_i^r = B(x^{i\varepsilon}, r)$ шар с центром в точке $x^{i\varepsilon}$ радиуса r. Пусть $\dfrac{2}{\alpha} < \mu < 1$ и $T_i^{r^\varepsilon}$ — шар радиуса $r^\varepsilon = \varepsilon^{\alpha\mu}$. Очевидно, что $B_i^\varepsilon \subset T_i^{r^\varepsilon}$ при малых ε и, поскольку носитель Ω' функции $f(x;r)$ по x компактен в Ω, то шары $T_i^{r^\varepsilon}$, как и шары B_i^ε, не пересекаются с границей области $\partial\Omega$.

Рассмотрим событие $\mathcal{A}_\mu^\varepsilon \in \mathbb{P}^\varepsilon$, заключающееся в том, что шары $T_i^{r^\varepsilon}$ взаимно не пересекаются:

$$\mathcal{A}_\mu^\varepsilon = \{\omega^\varepsilon \in \mathbb{P}^\varepsilon : T_i^{r^\varepsilon} \cap T_j^{r^\varepsilon} = \varnothing,\ i,j = 1,\ldots,N^\varepsilon, i \neq j\}.$$

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1, *тогда*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{P}^\varepsilon\{\mathcal{A}_\mu^\varepsilon\} = 1.$$

Доказательство. Определим событие, обратное событию $\mathcal{A}_\mu^\varepsilon$: $\overline{\mathcal{A}_\mu^\varepsilon} = \mathbb{P}^\varepsilon \setminus \mathcal{A}_\mu^\varepsilon$. Оно состоит в том, что хотя бы одна пара шаров имеет пересечение, т. е. существуют i, j, $i \neq j$, такие, что $T_i^{r^\varepsilon} \cap T_j^{r^\varepsilon} \neq \varnothing$. Тогда

$$\mathrm{P}^\varepsilon(\mathcal{A}_\mu^\varepsilon) = 1 - \mathrm{P}^\varepsilon(\overline{\mathcal{A}_\mu^\varepsilon}),$$

$$\mathrm{P}^\varepsilon(\overline{\mathcal{A}_\mu^\varepsilon}) = \sum_{i=1,j=i+1}^{N^\varepsilon} \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \int\limits_{T_i^{2r^\varepsilon}} \int\limits_0^\infty f_2^\varepsilon(x^i, x^j; r_i, r_j)\, dr_j dx^j dr_i dx^i =$$

$$= \frac{N^\varepsilon(N^\varepsilon - 1)}{2} \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \int\limits_{T_1^{2r^\varepsilon}} \int\limits_0^\infty f_2^\varepsilon(x^1, x^2; r_1, r_2)\, dr_2 dx^2 dr_1 dx^1. \tag{4.1}$$

Поскольку $N^\varepsilon = \varepsilon^{-3}$ и $\operatorname{mes}\left(T_1^{2r^\varepsilon} \setminus T_1^{r_1^\varepsilon + r_2^\varepsilon}\right) = O\big(\varepsilon^{3\mu\alpha}\big)$, из этого равенства и условий b_1), b_2) получаем

$$\mathrm{P}^\varepsilon(\overline{\mathcal{A}_\mu^\varepsilon}) = \frac{\varepsilon^{-6}}{2} \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty f_1^\varepsilon(x^1; r_1) \left(\int\limits_{T_1^{2r^\varepsilon} \setminus T_1^{r_1^\varepsilon + r_2^\varepsilon}} \int\limits_0^\infty f_1^\varepsilon(x^2; r_2)\, dr_2 dx^2 \right) dr_1 dx^1 +$$

$$+ \frac{\varepsilon^{-6}}{2} \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \int\limits_{T_1^{2r^\varepsilon} \setminus T_1^{r_1^\varepsilon + r_2^\varepsilon}} \int\limits_0^\infty q^\varepsilon(x^1, x^2; r_1, r_2)\, dr_2 dx^2 dr_1 dx^1 = O\Big(\varepsilon^{3\mu\alpha - 6}\Big) + O\big(\varepsilon^{3\alpha - 6}\big).$$

Так как $\alpha > 2$ и $\mu\alpha > 2$, то из полученного неравенства и (4.1) следует утверждение леммы.

***Следствие* 4.1.** *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1 *и* $\dfrac{2}{\alpha} < \varkappa_1 < 1$ *в условии* c$_1$). *Тогда*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{P}^\varepsilon\big\{\omega^\varepsilon \in \mathbb{P}^\varepsilon : d_i^\varepsilon \ge (r_i^\varepsilon)^{\varkappa_1},\ i = 1,\ldots,N^\varepsilon\big\} = 1.$$

Далее будем рассматривать условие c$_2$). Определим случайную величину

$$\zeta_\varkappa^\varepsilon(\omega^\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \frac{(b_i^\varepsilon)^\varkappa}{(d_i^\varepsilon)^{3(\varkappa-1)}},$$

где d_i^ε определена в (3.2), а b_i^ε — в (3.3).

Лемма 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1 *и* $\dfrac{6}{4-\theta} < \varkappa < 2,\ 0 \le \theta < 1.$ *Тогда*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{P}^\varepsilon\big\{\omega^\varepsilon \in \mathbb{P}^\varepsilon : \zeta_\varkappa^\varepsilon(\omega^\varepsilon) \le N\big\} \ge 1 - \frac{C(\varkappa)}{N},$$

где N — произвольное положительное число и константа C не зависит от N.

Доказательство. Из определения d_i^ε (3.2) следует, что

$$\zeta_\varkappa^\varepsilon(\omega^\varepsilon) \le \zeta_{1\varkappa}^\varepsilon(\omega^\varepsilon) + \zeta_{2\varkappa}^\varepsilon(\omega^\varepsilon), \tag{4.2}$$

где

$$\zeta_{1\varkappa}^\varepsilon(\omega^\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \frac{(b_i^\varepsilon)^\varkappa}{\big[\rho(x^{i\varepsilon}, \partial\Omega)\big]^{3(\varkappa-1)}}, \qquad \zeta_{2\varkappa}^\varepsilon(\omega^\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \frac{(b_i^\varepsilon)^\varkappa}{\min_{i\ne j} |x^{i\varepsilon} - x^{j\varepsilon}|^{3(\varkappa-1)}}.$$

В силу неравенства Чебышева [26], (4.2) и свойств математического ожидания для произвольного положительного числа N имеем

$$\mathrm{P}^\varepsilon\big\{\omega^\varepsilon \in \mathbb{P}^\varepsilon : \zeta_\varkappa^\varepsilon(\omega^\varepsilon) \le N\big\} \ge 1 - \frac{\mathrm{M}(\zeta_{1\varkappa}^\varepsilon)}{N} - \frac{\mathrm{M}(\zeta_{2\varkappa}^\varepsilon)}{N}. \tag{4.3}$$

Оценим математическое ожидание случайной величины $\zeta_{1\varkappa}^\varepsilon(\omega^\varepsilon)$. Применяя свойство b$_1$) функции распределения $f_1^\varepsilon(x; r)$, получаем

$$\mathrm{M}\left(\zeta_{1\varkappa}^\varepsilon\right) = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \int_\Omega \int_0^\infty \frac{(b^\varepsilon(r))^\varkappa f_1^\varepsilon(x; r)}{\big[\rho(x, \partial\Omega)\big]^{3(\varkappa-1)}}\, dr\, dx = N^\varepsilon \int_{\Omega'} \int_{a_0}^{A_0} \frac{(b^\varepsilon(\varepsilon^\alpha \hat r))^\varkappa f(x; \hat r)}{\big[\rho(x, \partial\Omega)\big]^{3(\varkappa-1)}}\, d\hat r\, dx, \tag{4.4}$$

где функция $b^\varepsilon(r)$ определена формулой

$$b^\varepsilon(r) = \begin{cases} \varepsilon^\beta r^2 & \text{при} \quad (\alpha,\beta) \in \Lambda_p \cap \{\beta \ge -\alpha\}, \\ r & \text{при} \quad (\alpha,\beta) \in \Lambda_p \cap \{\beta < -\alpha\}. \end{cases}$$

Обозначим

$$\eta(\alpha,\beta) = \begin{cases} \beta + 2\alpha & \text{при} \quad (\alpha,\beta) \in \Lambda_p \cap \{\beta \ge -\alpha\}, \\ \alpha & \text{при} \quad (\alpha,\beta) \in \Lambda_p \cap \{\beta < -\alpha\}, \end{cases} \tag{4.5}$$

тогда для любого r в силу свойства c$_1$) справедлива оценка

$$b^\varepsilon(r) \leq C\varepsilon^\eta. \tag{4.6}$$

Поскольку $\Omega' \subset\subset \Omega$, то существует положительная константа ρ_0 такая, что $\forall\, x \in \Omega'$: $\rho(x, \partial\Omega) \geq$ $\geq \rho_0 > 0$. Следовательно, из (4.4) получаем

$$\mathrm{M}\,(\zeta^\varepsilon_{1\varkappa}) \leq C\varepsilon^{\varkappa\eta - 3},$$

а так как $\eta \geq 3$ для любых α, $\beta \in \Lambda_p$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{M}\,(\zeta^\varepsilon_{1\varkappa}) = 0. \tag{4.7}$$

Теперь оценим математическое ожидание случайной величины $\zeta^\varepsilon_{2\varkappa}(\omega^\varepsilon)$. Для любых точек $x^{i\varepsilon}$, $x^{j\varepsilon} \in \Omega$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\min\limits_{i\neq j} |x^{i\varepsilon} - x^{j\varepsilon}|^{3(\varkappa-1)}} < \varepsilon^{3(1-\varkappa)} + \sum_{i\neq j} \frac{\chi^\varepsilon\left(|x^{i\varepsilon} - x^{j\varepsilon}|\right)}{|x^{i\varepsilon} - x^{j\varepsilon}|^{3(\varkappa-1)}},$$

где $\chi^\varepsilon(t)$ — характеристическая функция отрезка $[0, \varepsilon]$. Используя это неравенство, свойства b_1), b_2) функций распределения, оценку (4.6) и обозначая через j_i номер ближайшего к i шара, получаем

$$\mathrm{M}\,(\zeta^\varepsilon_{2\varkappa}) = \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \ldots \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \left[\sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \frac{(b^\varepsilon(r_i))^\varkappa}{\min_{i\neq j} |x^i - x^j|^{3(\varkappa-1)}}\right] f^\varepsilon_{N^\varepsilon}(x^1, \ldots, r_{N^\varepsilon})\, dr_1 \ldots dx^{N^\varepsilon} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \frac{(b^\varepsilon(r_i))^\varkappa f^\varepsilon_2(x^i, x^{j_i}; r_i, r_{j_i})}{|x^i - x^{j_i}|^{3(\varkappa-1)}}\, dr_i dx^i dr_{j_i} dx^{j_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \frac{(b^\varepsilon(r_i))^\varkappa f^\varepsilon_1(x^i; r_i) f^\varepsilon_1(x^{j_i}; r_{j_i})}{|x^i - x^{j_i}|^{3(\varkappa-1)}}\, dr_i dx^i dr_{j_i} dx^{j_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \frac{(b^\varepsilon(r_i))^\varkappa q^\varepsilon(x^i, x^{j_i}; r_i, r_{j_i})}{|x^i - x^{j_i}|^{3(\varkappa-1)}}\, dr_i dx^i dr_{j_i} dx^{j_i} \leq$$

$$\leq C_1\varepsilon^{\varkappa(\eta-3)} + C_2\varepsilon^{\eta\varkappa - 3 + 3\alpha(2-\varkappa)} +$$

$$+ C_3\varepsilon^{\varkappa\eta-6} \int\limits_{2a_0\varepsilon^\alpha}^{\varepsilon} \frac{r^2}{r^{3(\varkappa-1)}}\, dr < \left(C_1 + \frac{C_3}{6 - 3\varkappa}\right)\varepsilon^{\varkappa(\eta-3)} + C_2\varepsilon^{\eta\varkappa-3+3\alpha(2-\varkappa)} \leq$$

$$\leq C(\varkappa)\left(\varepsilon^{\varkappa(\eta-3)} + \varepsilon^{\eta\varkappa-3+3\alpha(2-\varkappa)}\right).$$

Здесь $C(\varkappa) = \max\left(C_1 + \dfrac{C_3}{6-3\varkappa}, C_2\right)$, $\eta = \eta(\alpha, \beta)$ определена в (4.5) и, так как $\eta(\alpha, \beta) \geq 3$, получаем окончательную оценку для $\mathrm{M}(\zeta^\varepsilon_{2\varkappa})$:

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0} \mathrm{M}\,(\zeta^\varepsilon_{2\varkappa}) \leq C(\varkappa). \tag{4.8}$$

Утверждение леммы следует из (4.3), (4.7) и (4.8).

Далее для произвольной функции $\varphi(x) \in C_0^1(\Omega)$ определим случайную величину

$$\zeta_\varphi^\varepsilon(\omega^\varepsilon) = \int\limits_\Omega C^\varepsilon(x, \varphi(x); \omega^\varepsilon)\, dx,$$

где $C^\varepsilon(x, u; \omega^\varepsilon)$ определена в (3.4) при $(\alpha,\, \beta) \in \Lambda_p$ и распределении шаров ω^ε.

Лемма 4.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1, *тогда для любых* $\delta > 0$ *и* $\varphi(x) \in \in C_0^1(\Omega)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{P}^\varepsilon \left\{ \omega^\varepsilon \in \mathbb{P}^\varepsilon : \left| \zeta_\varphi^\varepsilon(\omega^\varepsilon) - \int\limits_\Omega C(x, \varphi(x))\, dx \right| < \delta \right\} = 1,$$

где функция $C(x, u)$ *определена в* (2.7).

Доказательство. В силу неравенства Чебышева [26]

$$\mathrm{P}^\varepsilon \Big\{ \omega^\varepsilon \in \mathbb{P}^\varepsilon : \big| \zeta_\varphi^\varepsilon(\omega^\varepsilon) - \mathrm{M}(\zeta_\varphi^\varepsilon) \big| < \delta \Big\} \geq 1 - \frac{\mathrm{D}(\zeta_\varphi^\varepsilon)}{\delta^2}, \tag{4.9}$$

где $\mathrm{M}(\zeta_\varphi^\varepsilon)$ и $\mathrm{D}(\zeta_\varphi^\varepsilon)$ — математическое ожидание и дисперсия случайной величины $\zeta_\varphi^\varepsilon(\omega^\varepsilon)$.

Использовав (2.8), (3.4) и (3.5), представим случайную величину $\zeta_\varphi^\varepsilon(\omega^\varepsilon)$ в виде

$$\zeta_\varphi^\varepsilon(\omega^\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} C_i^\varepsilon\big(\varphi(x^{i\varepsilon})\big) = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} C_{\alpha\beta}\big(x^{i\varepsilon}, \varphi(x^{i\varepsilon}); a_i^\varepsilon\big)\varepsilon^3 = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} C_{\alpha\beta}\big(x^{i\varepsilon}, \varphi(x^{i\varepsilon}); \varepsilon^{-\alpha} r_i^\varepsilon\big)\varepsilon^3,$$

где r_i^ε — радиусы, а $x^{i\varepsilon}$ — центры шаров B_i^ε при распределении ω^ε. Используя это представление, свойства s-частичных функций распределения и то, что $N^\varepsilon = \varepsilon^{-3}$, записываем

$$\mathrm{M}\left(\zeta_\varphi^\varepsilon\right) = \varepsilon^3 \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \ldots \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} C_{\alpha\beta}(x^i, \varphi(x^i); \varepsilon^{-\alpha} r_i) f_{N^\varepsilon}^\varepsilon(x^1, \ldots, r_{N^\varepsilon})\, dr_1 \ldots dx^{N^\varepsilon} =$$

$$= \varepsilon^3 \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty C_{\alpha\beta}(x^i, \varphi(x^i); \varepsilon^{-\alpha} r_i) \times$$

$$\times \left(\int\limits_\Omega \ldots \int\limits_0^\infty f_{N^\varepsilon}^\varepsilon(x^1, \ldots, r_{N^\varepsilon}) dr_1 \ldots dx^{i-1} dr_{i+1} \ldots dx^{N^\varepsilon} \right) dr_i dx^i =$$

$$= \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty C_{\alpha\beta}(x, \varphi(x); \varepsilon^{-\alpha} r) f_1^\varepsilon(x; r)\, dr dx = \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty C_{\alpha\beta}(x, \varphi(x); a) f(x; a)\, da\, dx.$$

Тогда в силу определения функции $C(x, u)$ (2.7) имеем

$$\mathrm{M}\left(\zeta_\varphi^\varepsilon\right) = \int\limits_\Omega C(x, \varphi(x))\, dx. \tag{4.10}$$

Далее, использовав (4.10), оценим дисперсию

$$\mathrm{D}(\zeta_\varphi^\varepsilon) = \mathrm{M}\left[\left(\zeta_\varphi^\varepsilon - \mathrm{M}(\zeta_\varphi^\varepsilon)\right)^2\right] = \mathrm{M}\left[\left(\sum_{i=1}^{N^\varepsilon} C_{\alpha\beta}(x^i, \varphi(x^i); \varepsilon^{-\alpha} r_i)\varepsilon^3 - \mathrm{M}(\zeta_\varphi^\varepsilon)\right)^2\right] =$$

$$= \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \ldots \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{N^\varepsilon} C_{\alpha\beta}(x^i, \varphi(x^i); \varepsilon^{-\alpha} r_i)\varepsilon^3 - \mathrm{M}\left(\zeta_\varphi^\varepsilon\right)\right)^2 f_{N^\varepsilon}^\varepsilon(x^1, \ldots, r_{N^\varepsilon})\, dr_1 \ldots dx^{N^\varepsilon} =$$

$$= \varepsilon^6 \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \left(C_{\alpha\beta}(x^i, \varphi(x^i); \varepsilon^{-\alpha} r_i) - \mathrm{M}(\zeta_\varphi^\varepsilon)\right)^2 f_1^\varepsilon(x^i; r_i)\, dr_i dx^i +$$

$$+ \varepsilon^6 \sum_{i,j=1, i\neq j}^{N^\varepsilon} \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \left(C_{\alpha\beta}(x^i, \varphi(x^i); \varepsilon^{-\alpha} r_i) - \mathrm{M}(\zeta_\varphi^\varepsilon)\right)\left(C_{\alpha\beta}\left(x^j, \varphi(x^j); \varepsilon^{-\alpha} r_j\right) - \mathrm{M}(\zeta_\varphi^\varepsilon)\right) \times$$

$$\times f_2^\varepsilon(x^i, x^j; r_i, r_j)\, dr_i dx^i dr_j dx^j \le \varepsilon^3 \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \left(C_{\alpha\beta}(x, \varphi(x); a) - \mathrm{M}(\zeta_\varphi^\varepsilon)\right)^2 f(x; a)\, da\, dx +$$

$$+ (1-\varepsilon^3)\left(\int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \left(C_{\alpha\beta}(x, \varphi(x); a) - \mathrm{M}(\zeta_\varphi^\varepsilon)\right) f(x; a)\, da\, dx\right)^2 + C\varepsilon^{3\alpha} =$$

$$= \varepsilon^3 \int\limits_\Omega \int\limits_0^\infty \left(C_{\alpha\beta}(x, \varphi(x); a) - \mathrm{M}(\zeta_\varphi^\varepsilon)\right)^2 f(x; a)\, da\, dx + C\varepsilon^{3\alpha}.$$

Таким образом,

$$\mathrm{D}(\zeta_\varphi^\varepsilon) = O(\varepsilon^3). \tag{4.11}$$

Из (4.9) – (4.11) следует справедливость утверждения леммы.

5. Доказательство теоремы 2.1. Определим следующие события в вероятностном пространстве $\mathbb{P}^\varepsilon$:

$$\mathcal{A}_1^\varepsilon = \left\{\omega^\varepsilon \in \mathbb{P}^\varepsilon : a_0\varepsilon^\alpha \le r_i^\varepsilon \le A_0\varepsilon^\alpha \ (\alpha > 2);\ i = 1, \ldots, N^\varepsilon\right\},$$

$$\mathcal{A}_2^\varepsilon = \left\{\omega^\varepsilon \in \mathbb{P}^\varepsilon : d_i^\varepsilon \ge (r_i^\varepsilon)^{\varkappa_1} \ \left(\frac{2}{\alpha} < \varkappa_1 < 1\right);\ i = 1, \ldots, N^\varepsilon\right\},$$

$$\mathcal{A}_3^\varepsilon(N) = \left\{\omega^\varepsilon \in \mathbb{P}^\varepsilon : \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \frac{(b_i^\varepsilon)^{\varkappa_2}}{(d_i^\varepsilon)^{3(\varkappa_2 - 1)}} < N \ \left(\frac{6}{4-\theta} < \varkappa_2 < 2,\ 0 \le \theta < 1\right)\right\},$$

$$\mathcal{A}_4^\varepsilon(j, m) = \left\{\omega^\varepsilon \in \mathbb{P}^\varepsilon : \left|\int\limits_\Omega C^\varepsilon(x, \varphi_j(x); \omega^\varepsilon)\, dx - \int\limits_\Omega C(x, \varphi_j(x))\, dx\right| < \frac{1}{m}\right\}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Здесь $\{\varphi_j(x)\}$ — последовательность функций, плотная в пространстве $C_0^1(\Omega)$;

$$\mathcal{A}_5^\varepsilon(\delta) = \big\{\omega^\varepsilon \in \mathbb{P}^\varepsilon : \rho(\omega^\varepsilon) > \delta \ (\delta > 0)\big\}.$$

В силу условий теоремы 2.1

$$\mathrm{P}^\varepsilon\{\mathcal{A}_1^\varepsilon\} = 1. \tag{5.1}$$

Далее доказательство проведем от противного. Предположим, что теорема 2.1 не справедлива, тогда существуют числа $\delta > 0$, $0 < \mu < 1$ и последовательность $\{\varepsilon = \varepsilon_k,\ k = 1, \ldots, \infty\}$ такие, что

$$\varliminf_{\varepsilon=\varepsilon_k \to 0} \mathrm{P}^\varepsilon\big\{\mathcal{A}_5^\varepsilon(\delta)\big\} > \mu. \tag{5.2}$$

С другой стороны, в силу следствия 4.1 и лемм 4.2, 4.3 для любых $j, m \in \mathbb{N}$ и $N > 0$ существуют константа $C(\varkappa_2)$ и значение $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mu, j, m, N)$ такие, что для любых $\varepsilon < \varepsilon_0$ будут выполняться неравенства

$$\mathrm{P}^\varepsilon\{\mathcal{A}_2^\varepsilon\} \ge 1 - \frac{\mu}{4}, \qquad \mathrm{P}^\varepsilon\big\{\mathcal{A}_3^\varepsilon(N)\big\} \ge 1 - \frac{C(\varkappa_2)}{N}, \qquad \mathrm{P}^\varepsilon\big\{\mathcal{A}_4^\varepsilon(j,m)\big\} \ge 1 - \frac{\mu}{4 \cdot 2^{j+m}}. \tag{5.3}$$

Для произвольного k выберем j_k и m_k так, чтобы неравенства (5.3) выполнялись для ε_k ($m_k \to \infty$, $j_k \to \infty$ при $k \to \infty$), следовательно, они будут выполняться и для любых $0 < \varepsilon \le \varepsilon_k$, $m = 1, \ldots, m_k$, $j = 1, \ldots, j_k$. Далее положим $N = \dfrac{4C(\varkappa_2)}{\mu}$, определим и упростим, использовав (5.1), событие

$$\mathcal{A}^{\varepsilon_k} := \mathcal{A}_1^{\varepsilon_k} \bigcap \mathcal{A}_2^{\varepsilon_k} \bigcap \mathcal{A}_3^{\varepsilon_k}(N) \bigcap \left[\bigcap_{m=1}^{m_k} \bigcap_{j=1}^{j_k} \mathcal{A}_4^{\varepsilon_k}(j_k, m_k)\right] \bigcap \mathcal{A}_5^{\varepsilon_k} =$$

$$= \mathcal{A}_2^{\varepsilon_k} \bigcap \mathcal{A}_3^{\varepsilon_k}(N) \bigcap \left[\bigcap_{m=1}^{m_k} \bigcap_{j=1}^{j_k} \mathcal{A}_4^{\varepsilon_k}(j_k, m_k)\right] \bigcap \mathcal{A}_5^{\varepsilon_k}.$$

Для любого k событие $\mathcal{A}^{\varepsilon_k}$ не пусто. Действительно, оценим вероятность противоположного события, использовав неравенства (5.2), (5.3):

$$\mathrm{P}^\varepsilon\left\{\overline{\mathcal{A}^{\varepsilon_k}}\right\} = \mathrm{P}^\varepsilon\left\{\overline{\mathcal{A}_2^{\varepsilon_k}} \bigcup \overline{\mathcal{A}_3^{\varepsilon_k}}(N) \bigcup \left[\bigcup_{m=1}^{m_k} \bigcup_{j=1}^{j_k} \overline{\mathcal{A}_4^{\varepsilon_k}}(j_k, m_k)\right]\right\} \le \frac{\mu}{4} + \frac{\mu}{4} + \frac{\mu}{4} \sum_{j,m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j+m}} = \frac{3\mu}{4},$$

тогда

$$\mathrm{P}^\varepsilon\left\{\mathcal{A}^{\varepsilon_k}\right\} \ge 1 - \frac{3\mu}{4},$$

и, значит, существуют точки $\omega^\varepsilon \in \mathbb{P}^\varepsilon$, удовлетворяющие событию $\mathcal{A}^{\varepsilon_k}$. Выберем любую из них и рассмотрим соответствующее ей распределение шаров $B^\varepsilon(\omega^\varepsilon)$ в области Ω. Как следует из определения события $\mathcal{A}^{\varepsilon_k}$, все условия теоремы 3.1 выполнены, но заключение этой теоремы не выполняется. Полученное противоречие и доказывает теорему 2.1.

Литература

1. *Khruslov E. Ya., Khilkova L. O., Goncharenko M. V.* Integral conditions for convergence of solutions of non-linear Robin's problem in strongly perforated domains // J. Math. Phys., Anal., Geom. – 2017. – **13**, № 3. – P. 1 – 31.

2. *Cabarrubias B., Donato P.* Homogenization of a quasilinear elliptic problem with nonlinear Robin boundary condition // Appl. Anal. – 2012. – **91**, № 6. – P. 1111 – 1127.
3. *Cioranescu D., Donato P.* On Robin problems in perforated domains // Math. Sci. and Appl. – 1997. – **9**. – P. 123 – 135.
4. *Cioranescu D., Donato P., Zaki R.* The periodic unfolding method in perforated domains // Port. Math. – 2006. – **63**, № 4. – P. 467 – 496.
5. *Conca C., Diaz J., Linan A., Timofte C.* Homogenization in chemical reactive floes // Electron. J. Different. Equat. – 2004. – **40**. – P. 1 – 22.
6. *Conca C., Diaz J., Linan A., Timofte C.* Homogenization results for chemical reactive flows through porous media // New Trends Contin. Mech. – 2005. – P. 99 – 107.
7. *Diaz J.* Two problems in homogenization of porous media // Extracta Math. – 1999. – **14**. – P. 141 – 155.
8. *Jäger W., Oleinik O. A., Shamaev A. S.* On homogenization of solutions of boundary value problem for the Laplace equation in partially perforated domain with the third boundary type condition on the boundary of cavities // Trudy Mosk. Mat. Obshch. – 1997. – **58**. – P. 187 – 223.
9. *Mel'nyk T. A., Sivak O. A.* Asymptotic analysis of a boundary-value problem with the nonlinean multiphase interactions in a perforated domain // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 4. – С. 494 – 512.
10. *Mel'nyk T. A., Sivak O. A.* Asymptotic approximations for solutions to quasilinear and linear elliptic problems with different perturbed boundary conditions in perforated domains // Asymptot. Anal. – 2011. – **75**. – P. 79 – 92.
11. *Piatnitski A., Rybalko V.* Homogenization of boundary value problems for monotone operators in perforated domains with rapidly oscillating boundary conditions of Fourier type // J. Math. Sci. – 2011. – **177**, № 1. – P. 109 – 140.
12. *Timofte C.* Homogenization in nonlinear chemical reactive flows // Proc. 9th WSEAS Intern. Conf. Appl. Math. (Istambul, Turkey, May 27-29, 2006). – P. 250 – 255.
13. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи с мелкозернистой границей // Мат. сб. – 1964. – **65**. – С. 458 – 472.
14. *Kaizu S.* The Poisson equation with semilinear boundary conditions in domains with liny holes // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA. Math. – 1989. – **36**. – P. 43 – 86.
15. *Goncharenko M.* The asymptotic behaviour of the third boundary-value problem solutions in domains with fine-grained boundaries // Math. Sci. and Appl. – 1997. – **9**. – P. 203 – 213.
16. *Brillard A., Gómez D., Lobo M., Pérez E., Shaposhnikova T. A.* Boundary homogenization in perforated domains for adsorption problems with an advection term // Appl. Anal. – 2016. – P. 1 – 17.
17. *Diaz J., Gómez-Castro D., Timofte C.* The effectiveness factor of reaction-diffusion equations: homogenization and existence of optimal pellet shapes // J. Elliptic and Parabol. Equat. – 2016. – **2**. – P. 119 – 129.
18. *Diaz J., Gómez-Castro D., Shaposhnikova T. A., Zubova M. N.* The effectiveness factor of reaction-diffusion equations: homogenization and existence of optimal pellet shapes // Electron. J. Different. Equat. – 2017. – **178**. – P. 1 – 25.
19. *Gómez D., Pérez E., Shaposhnikova T. A.* On homogenization of nonlinear Robin type boundary conditions for cavities along manifolds and associated spectral problems // Asymptot. Anal. – 2012. – **80**. – P. 289 – 322 .
20. *Jäger W., Neuss-Radu M., Shaposhnikova T. A.* Homogenization limit for the diffusion equation with nonlinear flux condition on the boundary of very thin holes periodically distributed in a domain, in case of a critical size // Dokl. Mat. – 2010. – **82**, № 2. – P. 736 – 740.
21. *Pérez M. E., Zubova M. N., Shaposhnikova T. A.* A homogenization problem in a domain perforated by tiny isoperimetric holes with nonlinear Robin type boundary conditions // Dokl. Mat. – 2014. – **90**, № 1. – P. 489 – 494.
22. *Zubova M. N., Shaposhnikova T. A.* Homogenization of boundary value problems in perforated domains with the third boundary condition and the resulting change in the character of the nonlinearity in the problem // Different. Equat. – 2011. – **47**, № 1. – P. 78 – 90.
23. *Zubova M. N., Shaposhnikova T. A.* Homogenization of the boundary value problem for the Laplace operator in a perforated domain with a rapidly oscillating nonhomogeneous Robin-type condition on the boundary of holes in the critical case // Dokl. Mat. – 2017. – **96**, № 1. – P. 344 – 347.
24. *Хилькова Л. А.* Усреднение уравнения диффузии в областях с мелкозернистой границей с нелинейным граничным условием типа Робена // Вісн. Харків. нац. ун-ту. Математика, прикл. математика і механіка. – 2016. – **84**. – С. 93 – 111.
25. *Хруслов Е. Я., Хилькова Л. А.* Нелинейная задача Робена в областях с мелкозернистой случайной границей // Доп. НАН України. – 2017. – № 9. – С. 3 – 8.
26. *Ширяев А. Н.* Вероятность-1. – М.: МЦНМО, 2004. – 520 с.
27. *Боголюбов Н. Н.* Избранные труды: В 3 т. – Киев: Наук. думка, 1970. – Т. 2. – 522 с.
28. *Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И.* Теория вероятностей и математическая статистика. – Киев: Вища шк., 1973. – 408 с.

Получено 03.10.18