УДК 517.9

О. Х. Абдуллаев (Нац. ун-т Узбекистана, Ташкент)

О ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ОПЕРАТОРАМИ КАПУТО И ЭРДЕЛИ – КОБЕРА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

We establish the existence and uniqueness of the solution of a local problem for the degenerate parabolic-hyperbolic-type equations with loaded terms containing the trace of solution in the Erdelyi – Kober integrals. Since, the trace of solution (i.e., $u(x, 0)$) appears in the Erdelyi – Kober integrals and the hyperbolic-type equation is degenerated in the line $y = 0$, we use some properties and estimates for hypergeometric functions and, in addition, some integral equalities in proving the existence and uniqueness of solution of the investigated problem.

Встановлено існування й єдиність розв'язку локальної задачі для вироджуваного рівняння параболо-гіперболічного типу з навантаженими доданками, в яких слід розв'язку знаходиться в інтегралах Ерделі – Кобера. Оскільки слід розв'язку (тобто $u(x, 0)$) знаходиться в інтегралах Ерделі – Кобера і гіперболічне рівняння вироджується на лінії $y = 0$, в процесі доведення існування й єдиності досліджуваної задачі використано властивості й оцінки гіпергеометричних функцій та деякі інтегральні тотожності.

1. Введение. Теория дробных дифференциальных и интегральных операторов является важной частью (не)линейного анализа, поскольку она естественным образом возникает во многих областях математики и математической физики, инженерии, нейробиологии, экономики, теории управления и науки о горении [1 – 4]. Кроме того, в области динамических систем и теории управления система дробного порядка представляет собой динамическую систему, которая может моделироваться дифференциальным уравнением дробного порядка, содержащим производные нецелого порядка [5]. Производные и интегралы дробных порядков используются для описания объектов, которые также могут быть охарактеризованы степенной нелокальностью [6].

Известно, что существуют разные подходы к исследованию дифференциальных уравнений дробного порядка (ДУДП), кроме того, это зависит от рассматриваемого процесса, который описывается с помощью ДУДП и уравнений такого типа. Например, приближенные и численные методы были использованы и для ДУДП (подробности см. в [7, 8]). Кроме того, существуют некоторые классические методы, которые применимы для решения некоторых ДУДП с использованием известных операторов, таких как операторы Римана – Лиувилля, Капуто, Эрдели – Кобера и др. Отметим, что, применяя классические методы, мы можем получить классические решения, которые более полезны на практике.

Как известно, дробная производная Капуто является одним из наиболее используемых определений дробной производной наряду с определениями Римана – Лиувилля и Грюнвальда – Летникова. В математических тематиках и приложениях также часто используется так называемая дробная производная Эрдели – Кобера. В работах [9 – 12] исследованы некоторые модификации типа Капуто оператора Эрдели – Кобера и их связи с масштабно-инвариантными решениями диффузионно-свободных уравнений. Значительное развитие дробные дифференциальные уравнения получили в работах [13 – 15].

Дифференциальные уравнения с частными производными были успешно использованы для моделирования нескольких физических процессов (подробности см. в [16 – 18]). В работах [19 – 21] дробное исчисление применено в исследованиях вырождающихся уравнений в частных производных смешанного типа и гиперболических уравнений.

2. Постановка задачи и необходимые соотношения. Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - {}_C D_{oy}^{\alpha} u + \sum_{k=1}^{n} p_k \left(I_{\beta_{1k}}^{\gamma_{1k}, \sigma_{1k}} u \right) x & \text{при} \quad y > 0, \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy} + \sum_{k=1}^{n} q_k \left(I_{\beta_{2k}}^{\gamma_{2k}, \sigma_{2k}} u \right) \eta & \text{при} \quad y < 0 \end{cases} \tag{1}$$

с операторами (см. [9, 11 – 13])

$${}_C D_{oy}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y (y-t)^{-\alpha} u_t(x,t) dt,$$

$$\left(I_{\beta}^{\gamma,\sigma} u \right) x = \frac{\beta}{\Gamma(\beta)} x^{-\beta(\gamma+\sigma)} \int_0^x \frac{t^{\beta(\gamma+1)-1}}{\left(x^{\beta} - t^{\beta}\right)^{1-\sigma}} u(t,0) dt, \tag{2}$$

где $\eta = x + (1-2\delta)(-y)^{\frac{1}{1-2\delta}}$, m, α, β_{jk}, γ_{jk}, σ_{jk}, p_k, $q_k = \text{const}$, $m > 0$, $0 < \alpha$, β_{jk}, γ_{jk}, $\sigma_{jk} < 1$, более того, $0 < \gamma_{jk} + \sigma_{jk} < 1$, $j = 1, 2$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\delta = \dfrac{m}{2(m+2)}$.

Пусть Ω — конечная область, ограниченная сегментами $A_1A_2 = \{(x,y) \colon x = 1, 0 < y < h\}$, $B_1B_2 = \{(x,y) \colon x = 0, 0 < y < h\}$, $B_2A_2 = \{(x,y) \colon y = h, 0 < x < 1\}$ при $y > 0$, с характеристиками $A_1C \colon x + (1-2\delta)(-y)^{\frac{1}{(1-2\delta)}} = 1$, $B_1C \colon x - (1-2\delta)(-y)^{\frac{1}{1-2\delta}} = 0$ уравнения (1) при $y < 0$, где $A_1 = (1;0)$, $A_2 = (1;h)$, $B_1 = (0;0)$, $B_2 = (0;h)$, $C = \left(\dfrac{1}{2}; -\left(\dfrac{m+2}{4} \right)^{1-2\delta} \right)$.

Введем обозначения $\Omega^+ = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega^- = \Omega \cap (y < 0)$, $I_1 = \left\{ x \colon 0 < x < \dfrac{1}{2} \right\}$, $I_2 = \{ y \colon 0 < y < h \}$.

Формулировка задачи. Требуется найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) из класса функций

$$W = \left\{ u(x,y) \colon u(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega^-), \ u_{xx} \in C\left(\Omega^+\right), {}_C D_{oy}^{\alpha} u \in C\left(\Omega^+\right) \right\},$$

удовлетворяющее краевым

$$u(x,y)\Big|_{A_1A_2} = \varphi(y), \quad 0 \le y \le h, \tag{3}$$

$$u(x,y)\Big|_{B_1B_2} = \psi(y), \quad 0 \le y \le h, \tag{4}$$

$$u(x,y)|_{B_1C} = h(x), \quad x \in I_1, \tag{5}$$

и разрывным условиям склеивания

$$\lim_{y\to+0} y^{1-\alpha}u_y(x,y) = \lambda u_y(x,-0), \quad (x,0)\in A_1B_1, \tag{6}$$

где $\varphi(y),\ \psi(y),\ h(x)$ — заданные функции, причем $\lambda = \mathrm{const},\ \lambda\in\mathbb{R}^+$.

Известно, что функция Римана для уравнения (1) при $y<0$ (в характеристических координатах $\xi = x-(1-2\delta)(-y)^{\frac{1}{1-2\delta}}$ и $\eta = x+(1-2\delta)(-y)^{\frac{1}{1-2\delta}}$) определяется через гипергеометрическую функцию Гаусса [22]

$$R(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta) = \frac{(\eta-\xi)^{2\delta}}{(\eta-\xi_0)^{\delta}(\eta_0-\xi)^{\delta}}\, H\left(\delta,\delta,1;\frac{(\xi_0-\xi)(\eta-\eta_0)}{(\eta-\xi_0)(\eta_0-\xi)}\right), \tag{7}$$

где

$$H(a_1,a_2,a_3;z) = \frac{\Gamma(a_3)}{\Gamma(a_2)\Gamma(a_3-a_2)}\int\limits_0^1 x^{a_2-1}(1-x)^{a_3-a_2-1}(1-zx)^{-a_1}dx,$$

$$0<\operatorname{Re}a_2<\operatorname{Re}a_3, \quad |\arg(1-z)|<\pi.$$

Отметим, что решение задачи Коши для уравнения (1) в области Ω^- с начальными данными

$$u(x,0)=\tau(x), \quad 0\le x\le 1; \quad u_y(x,-0)=\nu^-(x), \quad 0<x<1, \tag{8}$$

дается формулой [20, 22]

$$u(\xi,\eta) = k_1\int\limits_\xi^\eta (s-\xi)^{-\delta}(\eta-s)^{-\delta}\nu^-(s)\,ds-$$

$$-k_2\int\limits_\xi^\eta (\eta-\xi)^{1-2\delta}(s-\xi)^{\delta-1}(\eta-s)^{\delta-1}\tau^-(s)\,ds+$$

$$+\sum_{k=1}^n\int\limits_\xi^\eta q_k I_{\beta_{2k}}^{\gamma_{2k},\sigma_{2k}}\tau(s)ds\int\limits_s^\eta \frac{(\eta-\xi)^{2\delta}}{(\eta-s)^{\delta}(z-\xi)^{\delta}}\, H\left(\delta,\delta,1;\frac{(s-\xi)(\eta-z)}{(\eta-s)(z-\xi)}\right)dz, \tag{9}$$

где $k_1 = \dfrac{(2-4\delta)^{2\delta-1}\Gamma(2-2\delta)}{\Gamma^2(1-\delta)},\ k_2 = \dfrac{\Gamma(2\delta)}{\Gamma^2(\delta)}$.

Учитывая (5), (2) и используя свойства оператора Римана – Луувилля [13], из (9) получаем

$$\nu^-(\eta) = \frac{k_2\Gamma(\delta)}{k_1\Gamma(1-\delta)}\,D_{0\eta}^{1-2\delta}\tau(\eta) - \frac{2}{k_1\Gamma(1-\delta)}\,\eta^{3\delta}D_{0\eta}^{1-\delta}\int\limits_0^\eta\sum_{k=1}^n\frac{q_k\beta_{2k}}{\Gamma(\beta_k)}\,t^{-\beta_{2k}(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})}dt\times$$

$$\times\int\limits_0^t \frac{s^{\beta_{2k}(\gamma_{2k}+1)-1}}{\left(t^{\beta_{2k}}-s^{\beta_{2k}}\right)^{1-\sigma_{2k}}}\,\tau(s)ds\int\limits_t^\eta\frac{1}{(\eta-t)^{\delta}z^{\delta}}\,H\left(\delta,\delta,1;\frac{t(\eta-z)}{z(\eta-t)}\right)dz+$$

$$+\frac{2}{k_1\Gamma(1-\delta)}\,\eta^\delta D_{0\,\eta}^{1-\delta}h\left(\frac{\eta}{2}\right). \tag{10}$$

Здесь $D_{ax}^\alpha f$, $\alpha \in R^+$, — дробное дифференцирование Римана–Лиувилля, которое имеет вид [13, с. 70]

$$\left(D_{ax}^\alpha f\right)x = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\int\limits_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\,dt, \quad n=[\alpha]+1, \quad x>a.$$

С другой стороны, в силу обозначений (8) и равенства $\lim_{y\to+0} y^{1-\alpha}u_y(x,y)=\nu^+(x)$, $0<x<$ <1, из (6) имеем

$$\nu^+(x)=\lambda\nu^-(x). \tag{11}$$

Далее, из уравнения (1) при $y\to+0$ с учетом (11) и равенства

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}f(y)=\Gamma(\alpha)\lim_{y\to0}y^{1-\alpha}f(y)$$

получаем

$$\tau''(x)-\Gamma(\alpha)\nu^+(x)+\sum_{k=1}^n p_k I_{\beta_{1k}}^{\gamma_{1k},\sigma_{1k}}\tau(x)=0, \quad 0<x<1. \tag{12}$$

3. Теорема единственности.

Теорема 1. *Пусть $\lambda>0$ и выполняются условия*

$$0<\alpha,\beta_{jk},\gamma_{jk},\sigma_{jk}<1, \quad 0<\gamma_{jk}+\sigma_{jk}<1, \quad p_k<0, \quad q_k<0, \quad j=1,2, \quad k=1,2,\ldots,n. \tag{13}$$

Тогда решение исследуемой задачи единственно.

Доказательство. Исследуем интеграл $J=\int_0^1\tau(t)\nu^+(t)dt$. Для этого обе части уравнения (12) умножим на $\tau(x)$ и проинтегрируем от 0 до 1:

$$\Gamma(\alpha)\int\limits_0^1\tau(t)\nu^+(t)dt=\int\limits_0^1\tau''(t)\tau(t)dt+\int\limits_0^1\tau(t)\sum_{k=1}^n p_k I_{\beta_{1k}}^{\gamma_{1k},\sigma_{1k}}\tau(t)dt. \tag{14}$$

В силу $[\varphi(y)\equiv\psi(y)\equiv 0]$ с учетом того, что $\tau(0)=\tau(1)=0$, после некоторых вычислений получим

$$J\equiv\int\limits_0^1\tau(t)\nu^+(t)dt=-\int\limits_0^1\left(\tau'(t)\right)^2dt+\sum_{k=1}^n\frac{p_k\beta_{1k}}{\Gamma(\beta_{1k})}\int\limits_0^1\tau(t)dt\int\limits_0^t\frac{z^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+1)-1}}{\left(t^{\beta_{1k}}-z^{\beta_{1k}}\right)^{1-\sigma_{1k}}}\tau(z)dz.$$

Далее, учитывая равенство

$$\int\limits_0^x\frac{\beta t^{\beta\gamma+\beta-1}}{\left(x^\beta-t^\beta\right)^{1-\delta}}\,\tau(t)dt=\int\limits_0^{x^\beta}\frac{t^\gamma}{\left(x^\beta-t\right)^{1-\delta}}\,\tau\left(t^{1/\beta}\right)dt \tag{15}$$

и применяя формулу [22, с. 188]

$$|x-t|^{-\delta}=\frac{1}{\Gamma\left(\delta\right)\cos\dfrac{\pi\,\delta}{2}}\int\limits_0^\infty z^{\delta-1}\cos\left[z(x-t)\right]dz,\quad 0<\delta<1,$$

после некоторых упрощений окончательно получаем [20]

$$\int\limits_0^1\tau(x)dx\int\limits_0^x\frac{t^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+1)-1}\tau(t)}{\left(x^{\beta_{1k}}-t^{\beta_{1k}}\right)^{1-\sigma_{1k}}}\,dt=\int\limits_0^1 x^{1/\beta_{1k}-1}\tau(x^{1/\beta_{1k}})dx\int\limits_0^x\frac{t^{\gamma_{1k}}\tau(t^{1/\beta_{1k}})}{\left(x-t\right)^{1-\sigma_{1k}}}\,dt\geq 0.$$

Следовательно, в силу (13) имеем

$$\int\limits_0^1\tau(t)\nu^+(t)dt\leq 0. \tag{16}$$

Теперь докажем, что $\displaystyle\int_0^1\tau(t)\nu^-(t)dt\geq 0$ в области Ω^-.

Используя замену $t^{\beta_{2k}}\sim t,\ s^{\beta_{2k}}\sim s$ и $z^{\beta_{2k}}\sim z$, из (10) находим

$$\nu^-\left(\eta\right)=\frac{k_2\Gamma(\delta)}{k_1\Gamma(1-\delta)}\,D_{0\,\eta}^{1-2\delta}\tau\left(\eta\right)-\frac{2\eta^{3\delta}}{k_1\Gamma(1-\delta)}\,D_{0\,\eta}^{1-\delta}\sum_{k=1}^n\frac{q_k}{\beta_{2k}\Gamma(1+\beta_{2k})}\int\limits_0^{\eta^{\beta_{2k}}}\frac{t^{1/\beta_{2k}-1}}{t^{\gamma_{2k}+\sigma_{2k}}}\,dt\times$$

$$\times\int\limits_0^t\frac{s^{\gamma_{2k}}}{\left(t-s\right)^{1-\sigma_{2k}}}\,\tau\left(s^{1/\beta_{2k}}\right)ds\int\limits_t^{\eta^{\beta_{2k}}}\frac{z^{\frac{1-\delta}{\beta_{2k}}-1}}{\left(\eta-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta}}\,H\left(\delta,\delta,1;\frac{t^{1/\beta_{2k}}\left(\eta-z^{1/\beta_{2k}}\right)}{z^{1/\beta_{2k}}\left(\eta-t^{1/\beta_{2k}}\right)}\right)dz+$$

$$+\frac{2}{k_1\Gamma(1-\delta)}\,\eta^{\delta}D_{0\,\eta}^{1-\delta}h\left(\frac{\eta}{2}\right). \tag{17}$$

Исследуем интеграл (см. (17))

$$A(\eta)\equiv\frac{2\eta^{3\delta}}{k_1\Gamma(1-\delta)}\,D_{0\,\eta}^{1-\delta}\sum_{k=1}^n\frac{q_k}{\beta_{2k}\Gamma(1+\beta_{2k})}\int\limits_0^{\eta^{\beta_{2k}}}\frac{t^{1/\beta_{2k}-1}}{t^{\gamma_{2k}+\sigma_{2k}}}\,dt\times$$

$$\times\int\limits_0^t\frac{s^{\gamma_{2k}}}{(t-s)^{1-\sigma_{2k}}}\,\tau\left(s^{1/\beta_{2k}}\right)\int\limits_t^{\eta^{\beta_{2k}}}\frac{z^{\frac{1-\delta}{\beta_{2k}}}-1}{\left(\eta-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta}}\,H\left(\delta,\delta,1;\frac{t^{1/\beta_{2k}}\left(\eta-z^{1/\beta_{2k}}\right)}{z^{1/\beta_{2k}}\left(\eta-t^{1/\beta_{2k}}\right)}\right)dz.$$

Вводя замену

$$\frac{t^{1/\beta_{2k}}\left(\eta-z^{1/\beta_{2k}}\right)}{z^{1/\beta_{2k}}\left(\eta-t^{1/\beta_{2k}}\right)}=\theta$$

в последнем интеграле, после несложных упрощений имеем

$$A(\eta)\equiv\frac{2\eta^{1-\delta}}{k_1\Gamma(1-\delta)}\,D_{0\,\eta}^{1-\delta}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{\Gamma(1+\beta_{2k})}\int\limits_0^{\eta^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}}{t^{\gamma_{2k}+\sigma_{2k}}\left(\eta-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}}\,dt\times$$

$$\times\int\limits_0^t\frac{s^{\gamma_{2k}}}{(t-s)^{1-\sigma_{2k}}}\,\tau\left(s^{1/\beta_{2k}}\right)ds\int\limits_0^1\left(t^{1/\beta_{2k}}+\theta\left(\eta-t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2}H\left(\delta,\delta,1;\theta\right)d\theta=$$

$$=\frac{2\eta^{1-\delta}}{k_1\Gamma(1-\delta)\Gamma(\delta)}\,\frac{d}{d\eta}\int\limits_0^{\eta}(\eta-y)^{\delta-1}dy\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{\Gamma(1+\beta_{2k})}\int\limits_0^{y^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})}}{\left(y-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}}\,dt\times$$

$$\times\int\limits_0^t\frac{s^{\gamma_{2k}}}{(t-s)^{1-\sigma_{2k}}}\,\tau\left(s^{1/\beta_{2k}}\right)ds\int\limits_0^1\left(t^{1/\beta_{2k}}+\theta\left(y-t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2}H\left(\delta,\delta,1;\theta\right)d\theta.$$

Далее, также вводя замену $y\sim y\eta$, $t\sim(\eta y)^{\beta_{2k}}t$ в первом и во втором интегралах, получаем

$$A(\eta)\equiv\frac{2\eta^{1-\delta}}{k_1\Gamma(1-\delta)\Gamma(\delta)}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{\Gamma(1+\beta_{2k})}\frac{d}{d\eta}\eta^{1-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}}\int\limits_0^1\frac{y^{1-\delta-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}}}{(1-y)^{1-\delta}}\,dy\times$$

$$\times\int\limits_0^1\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}}{\left(1-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}t^{\gamma_{2k}+\sigma_{2k}}}\,dt\int\limits_0^{(\eta y)^{\beta_{2k}}t}\frac{s^{\gamma_{2k}}\tau(s^{1/\beta_{2k}})}{\left(t(\eta y)^{\beta_{2k}}-s\right)^{1-\sigma_{2k}}}\,ds\int\limits_0^1\frac{H\left(\delta,\delta,1;\theta\right)}{\left(t^{1/\beta_{2k}}+\theta\left(1-t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{2-\delta}}\,d\theta.$$

Интегрируя по частям в третьем интеграле, имеем

$$A(\eta)\equiv\frac{2\eta^{1-\delta}}{k_1\Gamma(1-\delta)\Gamma(\delta)}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k(1-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k})}{\Gamma(1+\beta_{2k})\sigma_{2k}}\,\eta^{-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}}\times$$

$$\times\int\limits_0^1\frac{y^{1-\delta-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}}}{(1-y)^{1-\delta}}\,dy\int\limits_0^1\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})}}{\left(1-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}}\,dt\times$$

$$\times\int\limits_0^{(\eta y)^{\beta_{2k}}t}\frac{s^{\gamma_{2k}}\tau\left(s^{1/\beta_{2k}}\right)}{\left(t(\eta y)^{\beta_{2k}}-s\right)^{1-\sigma_{2k}}}\,ds\int\limits_0^1\left(t^{1/\beta_{2k}}+\theta\left(1-t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2}H\left(\delta,\delta,1;\theta\right)d\theta+$$

$$+\frac{2\eta^{1-\delta}}{k_1\Gamma(1-\delta)\Gamma(\delta)}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k\eta^{(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}}{\Gamma(1+\beta_{2k})}\int\limits_0^1\frac{y^{1-\delta+(1-\gamma_{2k}-\sigma_k)\beta_k}}{(1-y)^{1-\delta}}\,dy\times$$

$$\times\int\limits_0^1\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k}}}{\left(1-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}}\,dt\int\limits_0^{(\eta y)^{\beta_{2k}}t}\frac{\gamma_k\beta_{2k}s^{\gamma_{2k}-1}\tau(s^{1/\beta_{2k}})+s^{\gamma_{2k}+1/\beta_{2k}-1}\tau'\left(s^{1/\beta_{2k}}\right)}{\left(t(\eta y)^{\beta_{2k}}-s\right)^{1-\sigma_{2k}}}\,ds\times$$

$$\times \int\limits_0^1 \left(t^{1/\beta_{2k}} + \theta\left(1 - t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2} H\left(\delta, \delta, 1; \theta\right) d\theta. \tag{18}$$

Вводя обратные замены $y\eta \sim y$, $(\eta y)^{\beta_{2k}} t \sim t$, окончательно находим

$$A(\eta) \equiv \frac{2\eta^{2-\delta}}{k_1\Gamma(1-\delta)\Gamma(\delta)} \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k(1-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k})}{\Gamma(1+\beta_{2k})\sigma_{2k}} \eta^{-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\eta^{\beta_{2k}}} s^{\gamma_{2k}} \tau\left(s^{1/\beta_{2k}}\right) ds \int\limits_{s^{1/\beta_{2k}}}^{\eta} \frac{dy}{(1-y\eta)^{1-\delta}} \int\limits_s^{(y\eta)^{\beta_{2k}}} \frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}} t^{-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})}}{(t-s)^{1-\sigma_{2k}}\left(y\eta - t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}} dt \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \left(t^{1/\beta_{2k}} + \theta\left(y\eta - t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2} H\left(\delta, \delta, 1; \theta\right) d\theta +$$

$$+ \frac{2\eta^{2-\delta}}{k_1\Gamma(1-\delta)\Gamma(\delta)} \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k q_k \eta^{(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}}{\Gamma(\beta_{2k})} \int\limits_0^{\eta^{\beta_{2k}}} s^{\gamma_{2k}-1} \tau\left(s^{1/\beta_{2k}}\right) ds \times$$

$$\times \int\limits_{s^{1/\beta_{2k}}}^{\eta} \frac{dy}{(1-y\eta)^{1-\delta}} \int\limits_s^{(y\eta)^{\beta_{2k}}} \frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}} t^{1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k}}}{(t-s)^{1-\sigma_{2k}}\left(y\eta - t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}} dt \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \left(t^{1/\beta_{2k}} + \theta\left(y\eta - t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2} H\left(\delta, \delta, 1; \theta\right) d\theta +$$

$$+ \frac{2\eta^{2-\delta}}{k_1\Gamma(1-\delta)\Gamma(\delta)} \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k \eta^{(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}}{\Gamma(1+\beta_{2k})} \int\limits_0^{\eta^{\beta_{2k}}} s^{\gamma_{2k}+1/\beta_{2k}-1} \tau'\left(s^{1/\beta_{2k}}\right) ds \times$$

$$\times \int\limits_{s^{1/\beta_{2k}}}^{\eta} \frac{dy}{(1-y\eta)^{1-\delta}} \int\limits_s^{(y\eta)^{\beta_{2k}}} \frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}} t^{1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k}}}{(t-s)^{1-\sigma_{2k}}\left(y\eta - t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}} dt \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \left(t^{1/\beta_{2k}} + \theta\left(y\eta - t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2} H(\delta, \delta, 1; \theta) d\theta. \tag{19}$$

С учетом (19) элементарно доказывается аналогичная лемма, как и в работе [19].

На основе упомянутой леммы (см. [19]) заключаем, что $\int_0^1 \tau(x)\nu^-(x)dx \geq 0$, следовательно, в силу (16) и (11) получаем равенство $\int_0^1 \tau(x)\nu^-(x)dx = 0$, из которого следует, что

$\tau(x) \equiv 0,\ \nu^{-}(x) \equiv 0$. В итоге убеждаемся, что $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}^{+}$ и $\overline{\Omega}^{-}$. Отметим, что если однородная задача имеет только тривиальное решение, то соответствующая основная задача имеет единственное решение.

Теорема 1 доказана.

4. Существование решения исследуемой задачи.

Теорема 2. *Если выполнены все условия теоремы* 1 *и*

$$\varphi(y), \psi(y) \in C\left(\overline{I_2}\right) \cap C^1(I_2), \quad h(x) \in C^1(\overline{I_1}) \cap C^2(I_1), \tag{20}$$

то решение исследуемой задачи существует.

Доказательство. В силу (11) из уравнения (12) получаем

$$\tau''(x) = f(x), \tag{21}$$

где

$$f(x) = \lambda\Gamma(\alpha)\nu^{-}(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\psi(0)p_k\beta_{1k}x^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+\sigma_{1k})}}{\Gamma(\beta_{1k})} \int\limits_0^x \frac{t^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+1)-1}}{\left(x^{\beta_{1k}} - t^{\beta_{1k}}\right)^{1-\sigma_{1k}}}\, dt -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k\beta_{1k}x^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+\sigma_{1k})}}{\Gamma(\beta_{1k})} \int\limits_0^x \tau'(z)dz \int\limits_z^x \frac{t^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+1)-1}}{\left(x^{\beta_{1k}} - t^{\beta_{1k}}\right)^{1-\sigma_{1k}}}\, dt. \tag{22}$$

Решение уравнения (21), удовлетворяющее условиям $\tau(0) = \psi(0),\ \tau(1) = \varphi(0)$, имеет вид

$$\tau(x) = \int\limits_0^x (x-t)f(t)dt - x\int\limits_0^1 (1-t)f(t)dt + \varphi(0)(1-x) + x\psi(0),$$

следовательно,

$$\tau'(x) = \int\limits_0^x f(t)dt - \int\limits_0^1 (1-t)f(t)dt + \psi(0) - \varphi(0). \tag{23}$$

В силу (19), подставляя (17) в (22), после некоторых упрощений имеем

$$f(x) = k_{11}x^{2\delta-1}\psi(0) - k_{11}\int\limits_0^x (x-t)^{2\delta-1}\tau'(t)dt -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{\psi(0)p_k\beta_{1k}x^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+\sigma_{1k})}}{\Gamma(\beta_{1k})} \int\limits_0^x \frac{t^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+1)-1}}{\left(x^{\beta_{1k}} - t^{\beta_{1k}}\right)^{1-\sigma_{1k}}} dt -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k\beta_{1k}x^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+\sigma_{1k})}}{\Gamma(\beta_{1k})} \int\limits_0^x \tau'(z)dz \int\limits_z^x \frac{t^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+1)-1}}{\left(x^{\beta_{1k}} - t^{\beta_{1k}}\right)^{1-\sigma_{1k}}} dt -$$

$$-\frac{2k_{11}x^{2-\delta}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\omega_k x^{-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}}\int\limits_0^x \tau'(z)dz\int\limits_z^x s^{\beta_{2k}(\gamma_{2k}+1)-1}ds\times$$

$$\times\int\limits_s^x \frac{dy}{(1-yx)^{1-\delta}}\int\limits_{s^{\beta_{2k}}}^{(yx)^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})}}{\left(t-s^{\beta_{2k}}\right)^{1-\sigma_{2k}}\left(yx-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}}dt\times$$

$$\times\int\limits_0^1\left(t^{1/\beta_{2k}}+\theta\left(yx-t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2}H\left(\delta,\delta,1;\theta\right)d\theta-$$

$$-\frac{2k_{11}x^{2-\delta}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\omega_k x^{-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}}\psi(0)\int\limits_0^x s^{\beta_{2k}(\gamma_{2k}+1)-1}ds\times$$

$$\times\int\limits_s^x \frac{dy}{(1-yx)^{1-\delta}}\int\limits_{s^{\beta_{2k}}}^{(yx)^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})}}{\left(t-s^{\beta_{2k}}\right)^{1-\sigma_{2k}}\left(yx-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}}dt\times$$

$$\times\int\limits_0^1\left(t^{1/\beta_{2k}}+\theta\left(yx-t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2}H\left(\delta,\delta,1;\theta\right)d\theta+$$

$$+\frac{2k_{11}x^{2-\delta}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma_k q_k x^{(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}}{\Gamma(\beta_{2k})}\int\limits_0^x \tau'(z)dz\int\limits_z^x s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}-1}ds\times$$

$$\times\int\limits_s^x \frac{dy}{(1-y\eta)^{1-\delta}}\int\limits_{s^{\beta_{2k}}}^{(yx)^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k}}}{\left(t-s^{\beta_{2k}}\right)^{1-\sigma_{2k}}\left(yx-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}}dt\times$$

$$\times\int\limits_0^1\left(t^{1/\beta_{2k}}+\theta\left(yx-t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2}H\left(\delta,\delta,1;\theta\right)d\theta+$$

$$+\frac{2k_{11}x^{2-\delta}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma_k q_k x^{(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}\psi(0)}{\Gamma(\beta_{2k})}\int\limits_0^x s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}-1}ds\times$$

$$\times\int\limits_s^x \frac{dy}{(1-y\eta)^{1-\delta}}\int\limits_{s^{\beta_{2k}}}^{(yx)^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k}}}{\left(t-s^{\beta_{2k}}\right)^{1-\sigma_{2k}}\left(yx-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}}dt\times$$

$$\times \int\limits_0^1 \left(t^{1/\beta_{2k}} + \theta\left(yx - t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2} H\left(\delta,\delta,1;\theta\right) d\theta +$$

$$+\frac{2k_{11}x^{2-\delta}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k x^{(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}}{\Gamma(\beta_{2k})}\int\limits_0^x s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}}\tau'(s)ds\times$$

$$\times\int\limits_s^x \frac{dy}{(1-yx)^{1-\delta}}\int\limits_{s^{\beta_{2k}}}^{(yx)^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k}}}{\left(t-s^{\beta_{2k}}\right)^{1-\sigma_{2k}}\left(yx-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}}dt\times$$

$$\times \int\limits_0^1 \left(t^{1/\beta_{2k}} + \theta\left(yx - t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2} H\left(\delta,\delta,1;\theta\right) d\theta, \qquad (24)$$

где $k_{11} = \dfrac{k_2\lambda\Gamma(\alpha)\Gamma(\delta)}{k_1\Gamma(1-\delta)}$, $\omega_k = \dfrac{q_k(1-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k})}{\Gamma(\beta_{2k})\sigma_{2k}}$.

Далее, рассматривая (24), из (23) получаем

$$\tau'(x) = \frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{\Gamma(\beta_{2k})}\int\limits_0^x z^{2-\delta+(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}dz\int\limits_0^z A_k(s,z)\tau'(s)ds+$$

$$+\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma_k q_k}{\Gamma(\beta_{2k})}\int\limits_0^x z^{2-\delta+(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}dz\int\limits_0^z B_k(\mu,z)\tau'(\mu)d\mu-$$

$$-\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\int\limits_0^x z^{2-\delta-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}}dz\int\limits_0^z C_k(\mu,z)\tau'(\mu)d\mu-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k\beta_{1k}}{\Gamma(\beta_{1k})}\int\limits_0^x z^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+\sigma_{1k})}dz\int\limits_0^z\tau'(s)ds\int\limits_s^z\frac{t^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+1)-1}}{\left(z^{\beta_{1k}}-t^{\beta_{1k}}\right)^{1-\sigma_{1k}}}dt-$$

$$-k_{11}\int\limits_0^x dz\int\limits_0^z (z-t)^{2\delta-1}\tau'(t)dt-$$

$$-\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{\Gamma(\beta_{2k})}\int\limits_0^1 (1-z)z^{2-\delta+(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}dz\int\limits_0^z A_k(s,z)\tau'(s)ds-$$

$$-\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma_k q_k}{\Gamma(\beta_{2k})}\int\limits_0^1 (1-z)z^{2-\delta+(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}dz\int\limits_0^z B_k(\mu,z)\tau'(\mu)d\mu+$$

$$+\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\int\limits_0^1(1-z)z^{2-\delta-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}}dz\int\limits_0^z C_k(\mu,z)\tau'(\mu)d\mu+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k\beta_{1k}}{\Gamma(\beta_{1k})}\int\limits_0^1(1-z)z^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+\sigma_{1k})}dz\int\limits_0^z\tau'(s)ds\int\limits_s^z\frac{t^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+1)-1}}{\left(z^{\beta_{1k}}-t^{\beta_{1k}}\right)^{1-\sigma_{1k}}}\,dt+$$

$$+k_{11}\int\limits_0^1(1-z)dz\int\limits_0^z(z-t)^{2\delta-1}\tau'(t)dt+F(x), \tag{25}$$

где

$$A_k(s,z)=s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}}\int\limits_s^z\frac{dy}{(1-yz)^{1-\delta}}\int\limits_{s^{\beta_{2k}}}^{(yz)^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k}}}{\left(t-s^{\beta_{2k}}\right)^{1-\sigma_{2k}}\left(yz-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}}dt\times$$

$$\times\int\limits_0^1\left(t^{1/\beta_{2k}}+\theta\left(yz-t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2}H\left(\delta,\delta,1;\theta\right)d\theta, \tag{26}$$

$$B_k(\mu,z)=\int\limits_\mu^z s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}-1}ds\int\limits_s^z\frac{dy}{(1-y\eta)^{1-\delta}}\int\limits_{s^{\beta_{2k}}}^{(yz)^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k}}}{\left(t-s^{\beta_{2k}}\right)^{1-\sigma_{2k}}\left(yz-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}}dt\times$$

$$\times\int\limits_0^1\left(t^{1/\beta_{2k}}+\theta\left(yz-t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2}H\left(\delta,\delta,1;\theta\right)d\theta, \tag{27}$$

$$C_k(\mu,z)=\int\limits_\mu^z s^{\beta_{2k}(\gamma_{2k}+1)-1}ds\int\limits_s^z\frac{dy}{(1-yz)^{1-\delta}}\int\limits_{s^{\beta_{2k}}}^{(yz)^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})}}{\left(t-s^{\beta_{2k}}\right)^{1-\sigma_{2k}}\left(yz-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}}dt\times$$

$$\times\int\limits_0^1\left(t^{1/\beta_{2k}}+\theta\left(yz-t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2}H\left(\delta,\delta,1;\theta\right)d\theta, \tag{28}$$

$$F(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\psi(0)p_k\beta_{1k}}{\Gamma(\beta_{1k})}\int\limits_0^1\frac{1-z}{z^{-\beta_{1k}(\gamma_{1k}+\sigma_{1k})}}dz\int\limits_0^z\frac{t^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+1)-1}}{\left(z^{\beta_{1k}}-t^{\beta_{1k}}\right)^{1-\sigma_{1k}}}dt-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{\psi(0)p_k\beta_{1k}}{\Gamma(\beta_{1k})}\int\limits_0^x z^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+\sigma_{1k})}dz\int\limits_0^z\frac{t^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+1)-1}}{\left(z^{\beta_{1k}}-t^{\beta_{1k}}\right)^{1-\sigma_{1k}}}dt-$$

$$-\frac{2k_{11}\psi(0)}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\int\limits_0^x z^{2-\delta-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}}C_k(0,z)dz+$$

$$+\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma_k q_k\psi(0)}{\Gamma(\beta_{2k})}\int\limits_0^x z^{2-\delta+(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}B_k(0,z)dz+$$

$$+\frac{2k_{11}\psi(0)}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\int\limits_0^1 (1-z)z^{2-\delta-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}}C_k(0,z)dz-$$

$$-\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma_k q_k\psi(0)}{\Gamma(\beta_{2k})}\int\limits_0^1 (1-z)z^{2-\delta+(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}B_k(0,z)dz+$$

$$+\frac{k_{11}}{2\delta}x^{2\delta}\psi(0)+(\psi(0)-\varphi(0))(x-1)-\frac{k_{11}\psi(0)}{2\delta(2\delta+1)}. \tag{29}$$

После некоторых упрощений из (25) окончательно получаем

$$\tau'(x)=\int\limits_0^1 K(x,t)\tau'(t)dt+F(x). \tag{30}$$

Здесь

$$K(x,t)=\begin{cases}K_1(x,t), & 0\le t\le x,\\ K_2(x,t), & x\le t\le 1,\end{cases} \tag{31}$$

$$K_1(x,s)=\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{\Gamma(\beta_{2k})}\int\limits_s^x\left[A_k(s,z)+\gamma_k B_k(s,z)\right]z^{3-\delta+(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}dz-$$

$$-\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{\Gamma(\beta_{2k})}\int\limits_x^1\frac{1-z}{z^{\delta-2-(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}}\left[A_k(s,z)+\gamma_k B_k(s,z)\right]dz-$$

$$-\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\int\limits_s^x C_k(s,z)z^{3-\delta-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}}dz+$$

$$+\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\int\limits_x^1 (1-z)z^{2-\delta-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}}C_k(s,z)dz-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k\beta_{1k}}{\Gamma(\beta_{1k})}\int\limits_s^x z^{1+\beta_{1k}(\gamma_{1k}+\sigma_{1k})}dz\int\limits_s^z\frac{t^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+1)-1}}{\left(z^{\beta_{1k}}-t^{\beta_{1k}}\right)^{1-\sigma_{1k}}}dt+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k\beta_{1k}}{\Gamma(\beta_{1k})}\int\limits_x^1(1-z)z^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+\sigma_{1k})}dz\int\limits_s^z\frac{t^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+1)-1}}{\left(z^{\beta_{1k}}-t^{\beta_{1k}}\right)^{1-\sigma_{1k}}}\,dt+$$

$$+k_{11}\int\limits_s^x(1-z)(z-s)^{2\delta-1}dz+k_{11}\int\limits_s^1(1-z)(z-s)^{2\delta-1}dz+\frac{k_{11}}{2\delta}(x-s)^{2\delta}, \qquad (32)$$

$$K_2(x,s)=-\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{\Gamma(\beta_{2k})}\int\limits_s^1\frac{1-z}{z^{\delta-2-(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}}\left[A_k(s,z)+\gamma_kB_k(s,z)\right]dz+$$

$$+\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\int\limits_s^1(1-z)z^{2-\delta-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}}C_k(s,z)dz+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k\beta_{1k}}{\Gamma(\beta_{1k})}\int\limits_s^1(1-z)z^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+\sigma_{1k})}dz\int\limits_s^z\frac{t^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+1)-1}dt}{\left(z^{\beta_{1k}}-t^{\beta_{1k}}\right)^{1-\sigma_{1k}}}+$$

$$+k_{11}\int\limits_s^1(1-z)(z-s)^{2\delta-1}dz. \qquad (33)$$

Поскольку [13]

$$H(a_1,a_2,a_3;z)\le\begin{cases}c_1, & \text{если}\quad a_3-a_1-a_2>0,\quad 0\le z\le 1,\\ c_2(1-z)^{a_3-a_1-a_2}, & \text{если}\quad a_3-a_1-a_2<0,\quad 0<z<1,\\ c_3\left(1+|\ln(1-z)|\right), & \text{если}\quad a_3-a_1-a_2=0,\end{cases} \qquad (34)$$

интегрируя по частям, из (26) находим

$$A_k(s,z)\le\frac{\delta^2\Gamma(1-2\delta)s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}}}{|\delta-1|\,\Gamma^2(1-\delta)}\left|\int\limits_s^z\frac{(yz)^{\delta-1}}{(1-yz)^{1-\delta}}\,dy\int\limits_{s^{\beta_{2k}}}^{(yz)^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k}}}{\left(t-s^{\beta_{2k}}\right)^{1-\sigma_{2k}}\left(yz-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta}}\,dt\right|+$$

$$+\frac{\delta^2s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}}}{|\delta-1|}\left|\int\limits_s^z\frac{dy}{(1-yz)^{1-\delta}}\int\limits_{s^{\beta_{2k}}}^{(yz)^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(1-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k}}}{\left(t-s^{\beta_{2k}}\right)^{1-\sigma_{2k}}\left(yz-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta}}\,dt\right|+$$

$$+\frac{\delta^2s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}}}{|\delta-1|}\left|\int\limits_s^z\frac{dy}{(1-yz)^{1-\delta}}\int\limits_{s^{\beta_{2k}}}^{(yz)^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k}}}{\left(t-s^{\beta_{2k}}\right)^{1-\sigma_{2k}}\left(yz-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta}}\,dt\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_0^1\frac{\left(t^{1/\beta_{2k}}+\theta\left(yz-t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-1}}{(1-\theta)^{2\delta}}H\left(1-\delta,1-\delta,2;\theta\right)d\theta\right|.$$

Далее, учитывая неравенства $2-1+\delta-1+\delta=2\delta>0,\ |\theta|\leq 1$, имеем (см. (34)) $H(1-\delta,1-\delta,2;\theta)\leq\mathrm{const}$. Рассматривая

$$\int\limits_{s^{\beta_{2k}}}^{(yz)^{\beta_{2k}}} dt=\int\limits_{s^{\beta_{2k}}}^{s_0^{\beta_{2k}}} dt+\int\limits_{s_0^{\beta_{2k}}}^{(yz)^{\beta_{2k}}} dt,$$

после несложных оценок заключаем, что

$$|A_k(s,z)|\leq c_1 s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}}\left|\int\limits_s^z \frac{(yz)^{1-(\sigma_{2k}+\gamma_{2k})\beta_{2k}}\left(s_0^{\beta_k}-s^{\beta_k}\right)^{\sigma_k}}{(1-yz)^{1-\delta}(yz-s_0)^{\delta}}\,dy\right|+$$

$$+c_2 s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}}\left|\int\limits_s^z \frac{(yz)^{(1-\sigma_{2k}-\gamma_{2k})\beta_{2k}}\left(s_0^{\beta_k}-s^{\beta_k}\right)^{\sigma_k-1}}{(yz-s_0)^{\delta}(1-yz)^{1-\delta}}\,dy\right|.$$

На основании того, что

$$\int\limits_s^z dy=\int\limits_s^{s_0/z} dy+\int\limits_{s_0/z}^{z} dy,$$

можно заключить, что

$$|A_k(s,z)|\leq c_{11}s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}}\left|s^{\beta_{2k}}-s_0^{\beta_{2k}}\right|^{\sigma_{2k}}(1-s_0)^{\delta-1}|sz-s_0|^{1-\delta}z^{1-(\sigma_{2k}+\gamma_{2k})\beta_{2k}}+$$

$$+c_{12}s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}}\left|s^{\beta_{2k}}-s_0^{\beta_{2k}}\right|^{\sigma_{2k}-1}(1-s_0)^{\delta-1}|sz-s_0|^{2-\delta}z^{2(1-\sigma_{2k}-\gamma_{2k})\beta_{2k}-1}+$$

$$+c_{21}s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}}\left|s^{\beta_{2k}}-s_0^{\beta_{2k}}\right|^{\sigma_{2k}}\left|z^2-s_0\right|^{1-\delta}\left(1-z^2\right)^{\delta-1}z^{1-2(\sigma_{2k}+\gamma_{2k})\beta_{2k}}+$$

$$+c_{22}s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}}\left|s^{\beta_{2k}}-s_0^{\beta_{2k}}\right|^{\sigma_{2k}-1}\left|z^2-s_0\right|^{2-\delta}\left(1-z^2\right)^{\delta-1}z^{2(1-\sigma_{2k}-\gamma_{2k})\beta_{2k}-1}\leq$$

$$\leq\mathrm{const}\,s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}}\left|s^{\beta_{2k}}-s_0^{\beta_{2k}}\right|^{\sigma_{2k}-1}(1-s_0)^{\delta-1}\left(1-z^2\right)^{\delta-1}z^{2(1-\sigma_{2k}-\gamma_{2k})\beta_{2k}-1}. \tag{35}$$

Аналогично получаем

$$|B_k(\mu,z)|\leq\mathrm{const}\,(1-s_0)^{\delta-1}\left(1-z^2\right)^{\delta-1}z^{2(1-\sigma_{2k}-\gamma_{2k})\beta_{2k}-1}\left|\mu^{\beta_{2k}}-s_0^{\beta_{2k}}\right|^{\sigma_{2k}-1}\times$$

$$\times\left|z^{\gamma_{2k}\beta_{2k}}-\mu^{\gamma_{2k}\beta_{2k}}\right|, \tag{36}$$

$$|C_k(\mu,z)|\leq\mathrm{const}\,(1-s_0)^{\delta-1}\left(1-z^2\right)^{\delta-1}z^{2(1-\sigma_{2k}-\gamma_{2k})\beta_{2k}-1}\left|\mu^{\beta_{2k}}-s_0^{\beta_{2k}}\right|^{\sigma_{2k}-1}\times$$

$$\times\left|z^{(1+\gamma_{2k})\beta_{2k}}-\mu^{(1+\gamma_{2k})\beta_{2k}}\right|, \tag{37}$$

$$|B_k(0,z)| \leq \mathrm{const}\, s_0^{\beta_{2k}(\sigma_{2k}-1)}(1-s_0)^{\delta-1}\left(1-z^2\right)^{\delta-1} z^{(2-2\sigma_{2k}-\gamma_{2k})\beta_{2k}-1}, \tag{38}$$

$$|C_k(0,z)| \leq \mathrm{const}\, s_0^{\beta_{2k}(\sigma_{2k}-1)}(1-s_0)^{\delta-1}\left(1-z^2\right)^{\delta-1} z^{(3-2\sigma_{2k}-\gamma_{2k})\beta_{2k}-1}. \tag{39}$$

Таким образом, в силу класса заданных функций (см. (20)) и (13), учитывая (35) – (39), из (31) – (33) и (29) соответственно получаем $|K(x,s)| \leq \mathrm{const}$ и $|F(x)| \leq \mathrm{const}$ для всех $0 \leq \leq x \leq 1$. Следовательно, решая интегральное уравнение (30), находим $\tau(x)$, далее из (10) и (11) соответственно находим $\nu^-(x)$ и $\nu^+(x)$ (см. [19]). Единственное решение исследуемой задачи в области Ω^+ представимо в виде [22, 23]

$$u(x,y) = \int\limits_0^y G_\xi(x,y,0,\eta)\psi(\eta)d\eta - \int\limits_0^y G_\xi(x,y,1,\eta)\varphi(\eta)d\eta + \int\limits_0^1 G_0(x-\xi,y)\tau(\xi)d\xi -$$

$$- \int\limits_0^y \int\limits_0^1 G(x,y,\xi,\eta)d\xi d\eta \sum_{k=1}^n p_k \left(I_{\beta_{1k}}^{\gamma_{1k},\sigma_{1k}}\tau\right)\xi.$$

Здесь

$$G_0(x-\xi,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^y \eta^{-\alpha} G(x,y,\xi,\eta)d\eta,$$

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{(y-\eta)^{\alpha/\,2-1}}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e_{1,\alpha/2}^{1,\alpha/2}\left(-\frac{|x-\xi+2n|}{(y-\eta)^{\alpha/2}}\right) - e_{1,\alpha/2}^{1,\alpha/2}\left(-\frac{|x+\xi+2n|}{(y-\eta)^{\alpha/2}}\right)\right]$$

— функция Грина, как и в работах [19, 22, 23],

$$e_{1,\delta}^{1,\delta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\Gamma(\delta-\delta n)}$$

— функция типа Райта [23].

Таким образом, теорема 2 доказана.

Литература

1. *Lundstrom B. N., Higgs M. H., Spain W. J., Fairhall A. L.* Fractional differentiation by neocortical pyramidal neurons // Nature Neurosci. – 2018. – **11**, № 11. – P. 1335 – 1342.
2. *Mairnardi F.* Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. – London: Imperial College Press, 2010.
3. *Scalas E.* The application of continuos-time random walks in finance and economics // Phys. A. – 2006. – **362**, № 2. – P. 225 – 239.
4. *Vinagre B. M., Podlubny I., Hernandez A., Feliu V.* Some approximations of fractional order operators used in control theory and application // Fract. Calc. and Appl. Anal. – 2000. – **3**, № 3. – P. 231 – 248.
5. *Monje C. A.* Fundamentals and applications. – Springer, 2010.
6. *Cattani C., Srivastava H. M., Yang Xiao-Jun.* Fractional dynamics. – Walter de Gruyter, 2015.
7. *Bhrawy A. H., Doha E. H., Baleanu D., Ezz-eldein S. S.* A spectral tau algorithm based on Jacobi operational matrix for numerical solution of time fractional diffusion wave equations // J. Comput. Phys. – 2015. – **293**. – P. 142 – 156.
8. *Baleanu D., Mehdi M., Hakimeh B.* A fractional derivative inclusion problem via an integral boundary condition // J. Comput. Anal. and Appl. – 2016. – **21**, № 3. – P. 504 – 514.

9. *Luchko Y., Trujilo J. J.* Caputo-type modification of the Erdelyi – Kober fractional derivative // Fract. Calc. and Apll. Anal. – 2007. – **10**, № 3. – P. 251 – 267.
10. *Gorenflo R., Luchko Yu. F., Mainardi F.* Wright functions as scale-invariant solutions of the diffusion-wave equation // J. Comput. and Appl. Math. – 2000. – **118**, № 1 – 2. – P. 175 – 191.
11. *Kiryakova V.* Generalized fractional calculus and applications. – Harlow: Longman Sci. and Techn., 1994.
12. *Sneddon I. N.* The use in mathematical analysis of Erdelyi – Kober operators and some of their applications // Fract. Calc. and Appl.: Lect. Notes Math. – 1975. – **457**. – P. 35 – 79.
13. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations // North-Holland Math. Stud. – 2006. – **204**.
14. *Podlubny I.* Fractional differential equations. – New York: Acad. Press, 1999.
15. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional integral and derivatives: theory and applications. – Longhorne, PA: Gordon and Breach, 1993.
16. *Маричев О. И., Килбас А. А., Репин О. А.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами. – Самара: Изд-во Самар. гос. экон. ун-та, 2008.
17. *Килбас А. А., Репин О. А.* Аналог задачи Бицадзе – Самарского для уравнения смешанного типа с дробным дифференцированием // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 5. – С. 674 – 680.
18. *Kilbas A. A., Repin O. A.* An analog of the Tricomi problem for a mixed type equation with a partial fractional derivative // Fract. Calc. and Appl. Anal. – 2010. – **13**, № 1. – P. 69 – 84.
19. *Islomov B. I., Abdullaev O. Kh., Ochilova N. K.* On a problem for the loaded degenerating mixed type equation involving integral-differential operators // Nanosystems: Phys., Chem., Math. – 2017. – **8**, № 3. – P. 323 – 333.
20. *Sadarangani K., Abdullaev O. Kh.* A non-local problem with discontinuous matching condition for loaded mixed type equation involving the Caputo fractional derivative // Adv. Difference Equat. – 2016.
21. *Abdullayev O. Kh.* Solvability of a non-local problem with integral gluing condition for mixed type equation with Erdelyi – Kober operators // Fract. Differen. Calc. – 2017. – **7**, № 2. – P. 371 – 383.
22. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 2000.
23. *Псху А. В.* Решение краевой задачи для дробного диффузионного уравнения методом функции Грина // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 10. – С. 1509 – 1513.

Получено 20.05.18