УДК 517.9

О. А. Бойчук, О. О. Покутний (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ЛЯПУНОВА ТА ГОМОКЛІНІЧНИЙ ХАОС

The paper is devoted to the investigation of bounded solutions of a nonlinear Lyapunov-type problem in Banach and Hilbert spaces. Necessary and sufficient conditions for the existence of bounded solutions are obtained under the assumption that the homogeneous equation admits exponential dichotomy on the semiaxes. Conditions for the existence of homoclinic chaos in nonlinear evolution equations are presented.

Роботу присвячено дослідженню обмежених розв'язків нелінійного рівняння типу Ляпунова у банахових і гільбертових просторах. Отримано необхідні та достатні умови існування обмежених на всій осі розв'язків за умови експоненціальної дихотомії на півосях однорідного рівняння. Наведено умови існування гомоклінічного хаосу нелінійних еволюційних рівнянь.

Вступ. Питанню існування обмежених розв'язків різного класу еволюційних рівнянь присвячено значну кількість робіт. Такі питання тісно пов'язані з властивістю дихотомії відповідного однорідного рівняння. Це клас рівнянь, розв'язки яких можуть як спадати до нуля з експоненціальною швидкістю, так і необмежено зростати. Відзначимо роботи [1 – 20], у яких досліджується існування обмежених розв'язків для еволюційних задач, що є експоненціально дихотомічними на всій осі чи півосях. Розрізняють різні види дихотомій як у звичайному сенсі, так і μ-, ν-рівномірні та нерівномірні [15, 16], (h, k) дихотомії [17]. Оскільки ці питання пов'язані зі стійкістю та нестійкістю розв'язків, то природним чином вони мають відношення до відомого рівняння Ляпунова, яке розглядається у роботі. Відомо також, що властивість дихотомії часто може свідчити про наявність складної поведінки відповідної системи. А саме, відома теорема Палмера [18 – 20] дає достатні умови гомоклінічного хаосу у нелінійних скінченновимірних системах. Ці умови перевіряються за допомогою певного функціонального рівняння — відомої функції Мельникова [21] або її узагальнення (рівняння для породжуючих амплітуд [22], рівняння для породжуючих констант [23]).

У цій статті досліджується задача про розгалуження розв'язків рівняння Ляпунова як у скінченновимірному, так і нескінченновимірному випадках.

Знайдено необхідні та достатні умови існування обмежених на всій осі розв'язків рівняння Ляпунова у просторах Гільберта, Банаха і розгалуження його розв'язків (нелінійний випадок). За допомогою введеного узагальненого оператора Гріна побудовано відповідну множину розв'язків резонансного рівняння [24].

Встановлено необхідні та достатні умови розгалуження обмежених розв'язків рівняння Ляпунова [25]. Введено рівняння для породжуючих операторів, за допомогою якого вдається дослідити поставлену задачу. Показано, що у випадку скінченновимірного простору ці умови перетворюються на стандартні умови теореми Палмера і таким чином поширюють цю теорію на нескінченновимірний випадок та дають можливість встановити наявність гомоклінічного хаосу у нелінійних еволюційних задачах. Отримані умови у скінченновимірному випадку є аналогом умови простоти кореня функції Мельникова. Наведено приклад застосування отриманих результатів.

Постановка задачі. Розглянемо рівняння

$$\dot{Z}(t,\varepsilon) = A(t)Z(t,\varepsilon) - Z(t,\varepsilon)B(t) + \varepsilon R\big(Z(t,\varepsilon)\big) + \Phi(t), \tag{1}$$

де $Z = Z(t,\varepsilon)$ — невідома оператор-функція з простору обмежених разом із похідною оператор-функцій $BC^1\big(\mathbb{R};\mathcal{L}(H)\big)\times C(0;\varepsilon_0]$ для фіксованого $\varepsilon_0 > 0$; сильно неперервні оператор-функції $A(t),\ B(t),\ \Phi(t)$ належать $BC\big(\mathbb{R},\mathcal{L}(H)\big)$,

$$BC\big(\mathbb{R},\mathcal{L}(H)\big) = \Big\{\Phi(t) \in C(\mathbb{R},\mathcal{L}(H)), |||\Phi||| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\Phi(t)\| < \infty, \|\Phi(t)\| = \|\Phi(t)\|_{\mathcal{L}(H)}\Big\};$$

$\mathcal{L}(H)$ — простір лінійних і обмежених операторів, $R\big(Z(t,\varepsilon)\big)$ — нелінійна за змінною Z строго диференційовна оператор-функція. Необхідно знайти розв'язок нелінійної задачі (1), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один з обмежених розв'язків породжуючої лінійної задачі.

Лінійний випадок. Розглянемо спочатку умови існування обмежених на всій осі розв'язків породжуючої задачі ($\varepsilon = 0$)

$$\dot{Z}_0(t) = A(t)Z_0(t) - Z_0(t)B(t) + \Phi(t), \tag{2}$$

де $Z_0(t) \in BC^1\big(\mathbb{R};\mathcal{L}(H)\big)$. Позначимо через $N(t)$ еволюційний оператор однорідного рівняння

$$Z_0'(t) = A(t)Z_0(t) - Z_0(t)B(t), \tag{3}$$

$$N'(t) = A(t)N(t) - N(t)B(t), \quad N(0) = I, \tag{4}$$

де $N(t) = U(t)V^{-1}(t)$ $U(t)$ і $V(t)$ — еволюційні оператори однорідних рівнянь

$$U'(t) = A(t)U(t), \quad U(0) = I,$$

$$V'(t) = B(t)V(t), \quad V(0) = I.$$

Розглянемо лінійний оператор K_τ^t, який переводить оператор-функцію $\Phi = \Phi(t)$ в оператор-функцію $K_\tau^t[\Phi]$ вигляду

$$K_\tau^t\big[\Phi(\tau)\big] = K_\tau^t[\Phi] := U(t)U^{-1}(\tau)\Phi(\tau)V^{-1}(t)V(\tau). \tag{5}$$

За допомогою цього оператора загальний розв'язок неоднорідного рівняння (2) можна подати у вигляді

$$Z(t) = K_0^t[M] + \int_0^t K_\tau^t[\Phi(\tau)]d\tau, \tag{6}$$

де довільний оператор $M \in \mathcal{L}(H)$. Будемо припускати, що однорідне рівняння (3) допускає експоненціальну дихотомію на півосях $\mathbb{R}_+$ і $\mathbb{R}_-$ із проекторами P і Q відповідно, тобто існують проектори $P(P^2 = P)$ і $Q(Q^2 = Q)$, сталі $k_{1,2} \geq 1$ і $\alpha_{1,2} > 0$ такі, що для довільного оператора $M \in \mathcal{L}(H)$

$$\big\|K_s^t[PM]\big\| \leq k_1 e^{-\alpha_1(t-s)}\|M\|, \qquad t \geq s,$$

$$\big\|K_s^t[(I-P)M]\big\| \leq k_1 e^{-\alpha_1(s-t)}\|M\| \quad \forall\, t,s \in \mathbb{R}_+, \quad s \geq t,$$

і

$$\left\|K_s^t[QM]\right\| \leq k_2 e^{-\alpha_2(t-s)}\|M\|, \qquad t \geq s,$$

$$\left\|K_s^t[(I-Q)M]\right\| \leq k_2 e^{-\alpha_2(s-t)}\|M\| \quad \forall\, t, s \in \mathbb{R}_-, \quad s \geq t.$$

Для рівняння (2) справедливим є таке твердження.

Теорема 1. *Припустимо, що однорідне рівняння* (2) *є експоненціально дихотомічним на півосях* $\mathbb{R}_+$ *і* $\mathbb{R}_-$ *з проекторами* P *і* Q *відповідно. Якщо оператор*

$$D = P - (I - Q) \colon \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H), \tag{7}$$

який діє з простору Банаха $\mathcal{L}(H)$ *у себе, є узагальнено-оборотним, то*:

(i) *для того щоб існували розв'язки рівняння* (2), *обмежені на всій осі, необхідно і достатньо, щоб оператор-функція* $\Phi(t) \in BC(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ *задовольняла умову*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(\tau)\big[\Phi(\tau)\big]d\tau = 0, \tag{8}$$

де

$$H(t) = P_{Y_D} K_t^0 Q = P_{Y_D} K_t^0 (I - P);$$

(ii) *за виконання умови* (8) *обмежені на всій осі розв'язки рівняння* (2) *мають вигляд*

$$Z_0(t, C) = K_0^t\big[P P_{N(D)} C\big] + \big(G[\Phi]\big)(t) \quad \forall C \in \mathcal{L}(H), \tag{9}$$

де

$$\big(G[\Phi]\big)(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_t^{+\infty} K_\tau^t\big[(I-P)\Phi(\tau)\big]d\tau + \\ \displaystyle + \int_0^t K_\tau^t\big[P\Phi(\tau)\big]d\tau, \quad t \geq 0, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^t K_\tau^t\big[Q\Phi(\tau)\big]d\tau - \\ \displaystyle - \int_t^0 K_\tau^t\big[(I-Q)\Phi(\tau)\big]d\tau, \quad t \leq 0, \end{cases}$$

— *узагальнений оператор Гріна задачі про обмежені на всій осі розв'язки,* D^- — *узагальнено-обернений до оператора* D, *проектори* $P_{N(D)} = I - D^- D$ *і* $P_{Y_D} = I - DD^-$ [26], C — *довільний елемент — лінійний та обмежений оператор із простору* $\mathcal{L}(H)$. P_{Y_D} *проектує простір* $\mathcal{L}(H)$ *на* $\mathcal{L}(H) \ominus R(D)$.

Доведення. Розв'язки рівняння (2), обмежені на півосях $\mathbb{R}_+$ та $\mathbb{R}_-$, мають вигляд

$$Z_0(t,M)=\begin{cases} K_0^t[PM]-\int_t^{+\infty} K_\tau^t\big[(I-P)\Phi(\tau)\big]d\tau+ \\ +\int_0^t K_\tau^t\big[P\Phi(\tau)\big]d\tau, \quad t\geq 0, \\ K_0^t[(I-Q)M]+\int_{-\infty}^t K_\tau^t\big[Q\Phi(\tau)\big]d\tau- \\ -\int_t^0 K_\tau^t\big[(I-Q)\Phi(\tau)\big]d\tau, \quad t\leq 0. \end{cases} \tag{10}$$

Дійсно,

$$\big\|K_0^t[PM]\big\|\leq k_1e^{-\alpha_1 t}\|M\|,$$

$$\frac{d\big(K_0^t[PM]\big)}{dt}=\frac{d}{dt}(U(t)U^{-1}(0)PMV^{-1}(t)V(0))=U'(t)PMV^{-1}(t)+U(t)PM\big(V^{-1}(t)\big)'=$$

$$=A(t)U(t)PMV^{-1}(t)-U(t)PMV^{-1}(t)B(t)=A(t)K_0^t[PM]-K_0^t[PM]B(t).$$

Таким чином, вираз $K_0^t[PM]$ визначає всі обмежені на $\mathbb{R}_+$ розв'язки однорідного рівняння (3).

Доведемо тепер обмеженість одного з інтегралів, визначених у (10):

$$\left\|\int\limits_t^{+\infty} K_\tau^t\big[(I-P)\Phi(\tau)\big]d\tau\right\|\leq \sup_{\tau\in\mathbb{R}}\big\|\Phi(\tau)\big\|\int\limits_t^{+\infty}k_1e^{-\alpha_1(t-\tau)}d\tau=\frac{k_1}{\alpha_1}\,|||\Phi|||<+\infty.$$

Обмеженість інших інтегралів перевіряється аналогічним чином.

Виходячи з того, що

$$\frac{\partial\left(\int_0^t K_\tau^t\big[P\Phi(\tau)\big]d\tau-\int_t^{+\infty}K_\tau^t\big[(I-P)\Phi(\tau)\big]d\tau\right)}{\partial t}=$$

$$=K_t^t\big[P\Phi(t)\big]+K_t^t\big[(I-P)\Phi(t)\big]+A(t)\int\limits_0^t K_\tau^t\big[P\Phi(\tau)\big]d\tau-\int\limits_0^t K_\tau^t\big[P\Phi(\tau)\big]d\tau B(t)-$$

$$-A(t)\int\limits_t^{+\infty}K_\tau^t\big[(I-P)\Phi(\tau)\big]d\tau-\int\limits_t^{+\infty}K_\tau^t\big[(I-P)\Phi(\tau)\big]d\tau B(t)=$$

$$=\Phi(t)+A(t)\int\limits_0^t K_\tau^t\big[P\Phi(\tau)\big]d\tau-\int\limits_0^t K_\tau^t\big[P\Phi(\tau)\big]d\tau B(t)-$$

$$-A(t)\int\limits_t^{+\infty}K_\tau^t\big[(I-P)\Phi(\tau)\big]d\tau-\int\limits_t^{+\infty}K_\tau^t\big[(I-P)\Phi(\tau)\big]d\tau B(t)=$$

$$= \Phi(t) + A(t)\left(\int\limits_0^t K_\tau^t\big[P\Phi(\tau)\big]d\tau - \int\limits_t^{+\infty} K_\tau^t\big[(I-P)\Phi(\tau)\big]d\tau\right) -$$

$$-\left(\int\limits_0^t K_\tau^t\big[P\Phi(\tau)\big]d\tau - \int\limits_t^{+\infty} K_\tau^t\big[(I-P)\Phi(\tau)\big]d\tau\right)B(t),$$

переконуємось у тому, що вираз (10) дійсно визначає всі обмежені розв'язки рівняння (2) на півосях (аналогічно для другої півосі).

Для того щоб вираз (10) визначав обмежені у просторі $BC^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(H))$ розв'язки на всій осі, необхідно й достатньо, щоб виконувалась умова

$$Z(0+, M) = Z(0-, M).$$

Ця умова еквівалентна розв'язності операторного рівняння

$$PM - \int\limits_0^{+\infty} K_\tau^0\big[(I-P)\Phi(\tau)\big]d\tau = (I-Q)M + \int\limits_{-\infty}^0 K_\tau^0\big[Q\Phi(\tau)\big]d\tau. \tag{11}$$

Якщо M — розв'язок рівняння (11), то, підставивши його у (10), отримаємо обмежений на всій осі розв'язок рівняння (2).

Згідно з позначеннями, умова існування обмежених на всій осі розв'язків рівняння (2) рівносильна розв'язності операторного рівняння

$$DM = \int\limits_{-\infty}^0 K_\tau^0\big[Q\Phi(\tau)\big]d\tau + \int\limits_0^{+\infty} K_\tau^0\big[(I-P)\Phi(\tau)\big]d\tau. \tag{12}$$

Оскільки оператор D узагальнено-оборотний, то рівняння (12) має розв'язки тоді й лише тоді [23], коли

$$P_{Y_D}\left\{\int\limits_{-\infty}^0 K_\tau^0\big[Q\Phi(\tau)\big]d\tau + \int\limits_0^{+\infty} K_\tau^0\big[(I-P)\Phi(\tau)\big]d\tau\right\} = 0.$$

За виконання цієї умови рівняння (12) має множину розв'язків

$$M = D^-\left(\int\limits_{-\infty}^0 K_\tau^0\big[Q\Phi(\tau)\big]d\tau + \int\limits_0^{+\infty} K_\tau^0\big[(I-P)\Phi(\tau)\big]d\tau\right) + P_{N(D)}C,$$

де C — довільний елемент (лінійний та обмежений оператор) простору Банаха $\mathcal{L}(H)$. Підставляючи отримані розв'язки в (10), отримуємо відповідне зображення, що й доводить теорему.

Нелінійний випадок. Перейдемо до дослідження нелінійної задачі (1). Будемо шукати обмежений розв'язок $Z(t,\varepsilon)$ рівняння (1), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із розв'язків $Z(t,0) = Z_0(t,C)$ породжуючого рівняння (2).

Для знаходження необхідної умови достатньо припустити неперервність у околі породжуючого розв'язку, тобто що оператор-функція $R(Z(t,\varepsilon))$ задовольняє вимогу

$$R(\cdot) \in C\big[\|Z - Z_0\| \le q\big],$$

де q — деяка додатна стала.

Покажемо, що цю проблему можна розв'язати за допомогою операторного рівняння

$$F(C) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)\big[R(Z_0(t, C))\big]dt = 0. \tag{13}$$

Будемо називати його *рівнянням для породжуючих операторів*.

Теорема 2 (необхідна умова)**.** *Припустимо, що однорідне рівняння* (3) *є експоненціально дихотомічним на півосях* $\mathbb{R}_+$ *і* $\mathbb{R}_-$ *з проекторами* P *і* Q *відповідно, а нелінійне рівняння* (1) *має обмежений розв'язок* $Z(\cdot, \varepsilon)$, *який при* $\varepsilon = 0$ *перетворюється в один із розв'язків породжуючого рівняння* (2) *з оператором* $C = C^0 : Z(t, 0) = Z_0(t, C^0)$. *Тоді оператор* C^0 *є коренем рівняння для породжуючих операторів* (13).

Доведення. Якщо рівняння (1) має обмежений розв'язок $Z(t, \varepsilon)$, то згідно з теоремою 1 виконується умова розв'язності

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)\big[\Phi + \varepsilon R(Z)\big]dt = 0. \tag{14}$$

Використовуючи умову (8), переконуємося, що умова (14) еквівалентна такій:

$$\varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)[R]dt = 0.$$

Після скорочення на $\varepsilon \neq 0$ і переходу до границі при $\varepsilon \to 0$ маємо $\big($використовуючи неперервність оператор-функції $R\big(Z(t, \varepsilon)\big)$, $Z(t, \varepsilon) \to Z_0(t, C^0)\big)$

$$F(C^0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)\big[R\big(Z_0(t, C^0)\big)\big]dt = 0.$$

Теорему 2 доведено.

***Зауваження* 1.** У скінченновимірному випадку рівняння для породжуючих операторів буде збігатися з відомим рівнянням для породжуючих констант [23], а у періодичному випадку — з рівнянням для породжуючих амплітуд [22, 27].

Для отримання достатньої умови існування обмежених розв'язків рівняння (1) будемо додатково припускати, що оператор-функція $R\big(Z(t, \varepsilon)\big)$ сильно диференційовна в околі породжуючого розв'язку (має похідну Фреше у кожній точці околу породжуючого розв'язку)

$$R(\cdot) \in C^1\big[\|Z - Z_0\| \le q\big].$$

Покажемо, що цю задачу можна розв'язати за допомогою оператора B_0, дія якого визначається таким чином:

$$B_0 C = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)\Big[A_1(t) K_0^t\big[P P_{N(D)} C\big]\Big]dt : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H), \tag{15}$$

де $A_1(t) = R_Z'(v)\,|_{v=Z_0;\varepsilon=0}$ (похідна у сенсі Фреше).

Теорема 3 (достатня умова)**.** *Припустимо, що однорідне рівняння* (3) *допускає експоненціальну дихотомію на півосях* $\mathbb{R}_+$ *і* $\mathbb{R}_-$ *з проекторами* P *і* Q *відповідно, а рівняння* (2) *має обмежені розв'язки у вигляді* (10). *Нехай для оператора* B_0 *виконано такі умови*:

1) *оператор* B_0 *є узагальнено-оборотним*;

2) $P_{N(B_0^*)}P_{Y_D} = 0.$

Тоді для довільного оператора $C = C^0 \in \mathcal{L}(H)$, *що задовольняє рівняння для породжуючих операторів* (13), *існує принаймні один обмежений на всій осі розв'язок рівняння* (1). *Цей розв'язок можна знайти за допомогою ітераційного процесу*

$$\overline{Y}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\big[R(Z_0(\tau, C^0) + Y_k(\tau,\varepsilon)\big](t,\varepsilon),$$

$$C_k = -B_0^- \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(\tau)\big[A_1(\tau)\overline{Y}_k(\tau,\varepsilon) + \mathcal{R}(Y_k(\tau,\varepsilon))\big]d\tau,$$

$$Y_{k+1}(t,\varepsilon) = K_0^t\big[PP_{N(D)}C_k\big] + \overline{Y}_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$Z_k(t,\varepsilon) = Z_0(t, C^0) + Y_k(t,\varepsilon), \qquad k = 0,1,2,\ldots, \quad Y_0(t,\varepsilon) = 0,$$

$$Z(t,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} Z_k(t,\varepsilon).$$

Доведення. У рівнянні (1) виконаємо заміну змінних $Z(t,\varepsilon) = Z_0(t, C^0) + Y(t,\varepsilon)$, де оператор C^0 згідно з теоремою 3 задовольняє (13). У результаті отримаємо таке рівняння для Y:

$$\frac{dY(t,\varepsilon)}{dt} = A(t)Y(t,\varepsilon) - Y(t,\varepsilon)B(t) + \varepsilon R\big(Z_0(t, C^0) + Y(t,\varepsilon)\big). \tag{16}$$

Знайдемо обмежений розв'язок

$$Y(t,\varepsilon) \colon Y(\cdot,\varepsilon) \in BC^1\big(\mathbb{R}, \mathcal{L}(H)\big), \qquad Y(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \qquad Y(t,0) = 0.$$

Умова розв'язності рівняння (16) для Y має вигляд

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)[R(Z_0(t, C^0) + Y(t,\varepsilon))]dt = 0. \tag{17}$$

При виконанні умови (17) множина обмежених розв'язків рівняння (16) має вигляд

$$Y(t,\varepsilon) = K_0^t\big[PP_{N(D)}C\big] + \overline{Y}(t,\varepsilon),$$

де

$$\overline{Y}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\big[R(Z_0 + Y)\big](t,\varepsilon).$$

Оскільки оператор $R(Z(t,\varepsilon))$ диференційовний за Фреше в околі породжуючого розв'язку, то для нього справджується зображення

$$R\big(Z_0(t, C^0) + Y(t,\varepsilon)\big) = R\big(Z_0(t, C^0)\big) + A_1(t)Y(t,\varepsilon) + \mathcal{R}\big(Y(t,\varepsilon)\big),$$

де $A_1(t) = R_Z^{'}(v)\,|_{v=Z_0,\varepsilon=0}$ (похідна у сенсі Фреше), а для членів $\mathcal{R}(Y)$ більш високого порядку по Y виконуються співвідношення

$$\mathcal{R}(0) = 0, \qquad \mathcal{R}_Z^{'}(0) = 0.$$

Тут

$$\mathcal{R}\big(Y(t,\varepsilon)\big) = R(Z_0(t,C^0) + Y\big(t,\varepsilon)\big) - R\big(Z_0(t,C^0)\big) - A_1(t)Y(t,\varepsilon).$$

Тоді умова (17) набере вигляду

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)\Big[R\big(Z_0(t,C^0)\big) + A_1(t)\big\{K_0^t\big[PP_{N(D)}C\big] + \overline{Y}(t,\varepsilon)\big\}\Big]dt + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)\big[\mathcal{R}(Y)\big]dt = 0. \quad (18)$$

Використавши позначення (15), запишемо умову (18) у вигляді операторного рівняння відносно C:

$$B_0 C = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)\big[A_1\overline{Y} + \mathcal{R}(Y)\big]dt. \quad (19)$$

Оскільки оператор B_0 узагальнено-оборотний, то, згідно з результатами [23], необхідною й достатньою умовою розв'язності операторного рівняння (19) є умова

$$P_{N(B_0^*)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)[A_1\overline{Y} + \mathcal{R}(Y)]dt = 0.$$

За припущенням теореми 3

$$P_{N(B_0^*)}H(t) = P_{N(B_0^*)}P_{Y_D}K_0^t Q = 0,$$

отже, умова розв'язності операторного рівняння (19) виконується. Один із розв'язків операторного рівняння (19) має вигляд

$$C = -B_0^{-}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)\big[A_1\overline{Y} + \mathcal{R}(Y)\big]dt.$$

Таким чином, ми маємо операторну систему

$$Y(t,\varepsilon) = K_0^t\big[PP_{N(D)}C\big] + \overline{Y}(t,\varepsilon),$$

$$C = -B_0^{-}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)\big[A_1\overline{Y} + \mathcal{R}(Y)\big]dt, \quad (20)$$

$$\overline{Y}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\big[R(Z_0 + Y)\big](t,\varepsilon).$$

Уведемо допоміжний вектор $u = (Y, C, \overline{Y})^T \in \mathcal{L}(H)\times\mathcal{L}(H)\times\mathcal{L}(H)$, що належить декартовому добутку $\mathcal{L}(H)^3$ (T позначає операцію транспонування). Розглядаючи допоміжний оператор

$$L_1[F] := -B_0^- \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)[A_1 F]dt = -B_0^- \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\big[A_1(t)F(t)\big]dt,$$

операторну систему (20) записуємо у вигляді

$$u = \begin{bmatrix} 0 & K_0^t[PP_{N(D)}\cdot] & I \\ 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ -B_0^- \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)[\mathcal{R}]dt \\ \varepsilon G\big[R(Z_0+Y)\big](t,\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

У свою чергу ця операторна система еквівалентна такій:

$$\begin{bmatrix} I & -K_0^t[PP_{N(D)}\cdot] & -I \\ 0 & I & -L_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} u = \begin{pmatrix} 0 \\ -B_0^- \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)[\mathcal{R}]dt \\ \varepsilon G\big[R(Z_0+Y)\big](t,\varepsilon) \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Введемо позначення

$$M := \begin{bmatrix} I & -K_0^t[PP_{N(D)}\cdot] & -I \\ 0 & I & -L_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} 0 \\ -B_0^- \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)[\mathcal{R}]dt \\ \varepsilon G\big[R(Z_0+Y)\big](t,\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Оператор M має обмежений обернений M^{-1}:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} I & K_0^t[PP_{N(D)}\cdot] & K_0^t[PP_{N(D)}L_1\cdot] + I \\ 0 & I & L_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Те, що так визначений оператор задовольняє рівність $MM^{-1} = M^{-1}M = I$, перевіряється безпосередньою підстановкою. Неважко побачити, що M^{-1} є лінійним і обмеженим оператором. Тоді операторну систему (20) записуємо у вигляді

$$u = M^{-1}g = M^{-1}S(\varepsilon)u,$$

де оператор $S(\varepsilon)$ у загальному випадку є нелінійним. Варіюючи параметром ε і використовуючи обмеженість оператора M^{-1}, можемо досягти того, щоб оператор $M^{-1}S(\varepsilon)$ був стискаючим. Тоді з принципу стискаючих відображень [29] випливає, що операторна система (20) має єдину нерухому точку, яка й визначає обмежений розв'язок рівняння (1).

Таким чином, зв'язок між необхідною і достатньою умовами існування обмежених розв'язків рівняння (1) встановлює теорема 3.

Розглянемо частинний випадок отриманої теореми, коли оператор B_0 має обмежений обернений.

Наслідок. *Припустимо, що оператор $F(C)$ має похідну у сенсі Фреше $F^{(1)}(C)$ для кожного оператора C^0 простору Банаха $\mathcal{L}(H)$, що задовольняє рівняння для породжуючих операторів* (13). *Якщо оператор B_0 має обмежений обернений, то рівняння* (1) *має єдиний обмежений на всій осі розв'язок для кожного C^0.*

Доведення. З теореми про суперпозицію диференційовних відображень у просторі Банаха [29] випливає зображення

$$F^{(1)}(C^0)[W] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)\big[R_Z'(v)|_{v=Z_0,\varepsilon=0}\big]\big[Z_0'(t,C^0)[W]\big]dt.$$

Знайдемо похідну від розв'язку $Z_0(t,C^0)$ по C. Оскільки $Z_0(t,C^0) = K_0^t\big[PP_{N(D)}C^0\big] + \big(G[\Phi]\big)(t)$, то [29]

$$Z_0(t,C^0+W) - Z_0(t,C^0) = K_0^t\big[PP_{N(D)}C^0 + W\big] + \big(G[\Phi]\big)(t) -$$

$$-K_0^t\big[PP_{N(D)}C^0\big] - \big(G[\Phi]\big)(t) = K_0^t\big[PP_{N(D)}W\big] = Z_0'(t,C^0)[W].$$

Остаточно маємо

$$F^{(1)}(C^0)[W] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)A_1(t)K_0^t\big[PP_{N(D)}W\big]dt = B_0[W].$$

***Зауваження* 2.** Оскільки оператор $F^{(1)}(C^0) = B_0$ є оборотним, рівняння (13) має єдиний розв'язок, а отже й рівняння (1) має єдиний обмежений на всій осі розв'язок.

***Зауваження* 3.** Оскільки оператор $F^{(1)}(C)$ є оборотним, то для оператора B_0 умови 1 і 2 виконуються. У цьому випадку рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок для кожного оператора $C^0 \in \mathcal{L}(H)$. Таким чином, умова оборотності оператора $F^{(1)}(C)$ також пов'язує між собою необхідну й достатню умови. У скінченновимірному випадку умова оборотності оператора $F^{(1)}(C)$ еквівалентна умові простоти кореня C^0 рівняння для породжуючих констант [23].

Гомоклінічний хаос. Наведені вище теореми дозволяють досліджувати умови наявності можливої складної поведінки динамічної системи, що породжується рівнянням (1) [30 – 33]. Далі нас буде цікавити такий феномен, як гомоклінічний хаос, що є відомим і описується знаменитою теоремою Смейла [30]. Для того щоб вказати на зв'язок отриманих у теоремах 1 – 3 умов існування обмежених розв'язків відповідного нелінійного рівняння з наявністю хаотичної динаміки, сформулюємо відому теорему Палмера [19 – 30]:

Припустимо, що $g(x)$ — двічі неперервно диференційовна функція з $\mathbb{R}^n$ у $\mathbb{R}^n$ і рівняння

$$x' = g(x) \tag{22}$$

має нерухому гіперболічну точку z_0 та траєкторію $\{z(t): t \in \mathbb{R}\}$, гомоклінічну до z_0. Припустимо також, що рівняння

$$y' = g'(z(t))y \tag{23}$$

є експоненціально дихотомічним на півосях $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$ і $y(t) = z'(t)$ — єдиний (*з точністю до сталої*) *розв'язок рівняння, обмежений на $\mathbb{R}$. Нехай $h(t,x,\mu)$ — неперервно диференційовна* *вектор-функція, T-періодична по t і визначена для $t \in \mathbb{R}$, $|x - z(t)| < \Delta_0$, $|\mu| < \sigma_0$, $\mu \in \mathbb{R}$. Якщо*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\psi(t), h(t, z(t), 0))_{\mathbb{R}^n} dt = 0, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\psi(t), h_t(t, z(t), 0))_{\mathbb{R}^n} dt \neq 0, \tag{24}$$

де $\psi(t)$ — обмежений (з точністю до сталої) розв'язок рівняння, спряженого до (23), *то існують Δ і σ такі, що для $0 < |\mu| < \sigma$ збурене рівняння $x' = g(x) + \mu h(t, x, \mu)$ має обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок.*

Перша з умов (24) свідчить про те, що нелінійність повинна бути ортогональною до розв'язків однорідного спряженого рівняння. Теорема 3 є більш загальною у тому сенсі, що не припускається єдиність з точністю до сталої розв'язку однорідної спряженої системи. Рівняння для породжуючих операторів (13) свідчить про те, що нелінійність повинна бути ортогональною до всіх обмежених розв'язків відповідного однорідного спряженого рівняння. Аналогом другої умови у (24) є умова на оборотність оператора $F^{(1)}(C) = B_0 \colon \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H)$, що пов'язує необхідну і достатню умови. Таким чином, теорему Палмера можна отримати як наслідок теорем 2, 3. У розглядуваному випадку лінійне рівняння Ляпунова (3) відіграє роль лінеаризації (аналог (23)) вздовж відповідного розв'язку рівняння (22).

Зв'язок із функцією Мельникова. При дослідженні складної поведінки рівняння (1) розглядають [31] так звану зсунуту траєкторію $Z_s(t) = Z(t - s)$ нелінійної крайової задачі

$$\dot{Z}_s(t, \varepsilon) = A(t - s) Z_s(t, \varepsilon) - Z_s(t, \varepsilon) B(t - s) + \varepsilon R(Z_s(t, \varepsilon)) + \Phi(t - s). \tag{25}$$

Тоді умова (13) для задачі (25) набирає вигляду

$$\Delta(s) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t - s) \big[R(Z_0(t - s, C)) \big] dt = 0,$$

або

$$\Delta(s) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t - s) \big[R(Z_{0s}(t, C)) \big] dt = 0,$$

$$Z_{0s}(t, C) = Z_0(t - s, C), \tag{26}$$

$$Z_{00}(t, C) = Z_0(t, C).$$

Оскільки $H(t) = P_{N(D^*)} K_t^0 Q$, то ця умова означає ортогональність нелінійності R до розв'язків однорідного спряженого рівняння. Якщо однорідне спряжене рівняння має єдиний (із точністю до множника) обмежений розв'язок, то з умови (26) $(s = 0)$ у припущенні, що оператор

$$B_0(s) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t - s) A_1(t - s) K_0^{t-s} [P P_{N(D)} \cdot] dt$$

має обмежений обернений, тобто виконуються умови сформульованого вище наслідку (виконано другу умову (24)), випливає виконання умов теореми Палмера [20] (теорема 7.2 [31]). У скінченновимірному випадку ця умова еквівалентна умові простоти кореня рівняння $\Delta(s) = 0$ і оператор $\Delta(s)$ пов'язаний із відомою функцією Мельникова [21] ($\Phi(t) = 0$, див., наприклад, випадок рівняння Дюфінга [31, с. 410, 411]), яка з'являється при вивченні так званих трансверсальних траєкторій:

$$\Delta(0) = F(C^0) = 0, \qquad \Delta'(0) = F^{(1)}(C^0) = B_0, \qquad \Delta'(s) = B_0(s).$$

У випадку рівняння (1) $s = 0$. Тоді отримані результати перетворюються на стандартні умови [21] для функції Мельникова, які гарантують наявність гомоклінічного хаосу [31].

Зсунута траєкторія дає можливість досліджувати питання існування обмежених розв'язків за умов дихотомії на півосях $\mathbb{R}_s^+ = [s; +\infty)$, $\mathbb{R}_s^- = (-\infty; s]$ з проекторами P_s і Q_s відповідно.

Таким чином, наведені теореми доводять наявність гомоклінічного хаосу в операторно-диференціальних еволюційних рівняннях типу Ляпунова як у скінченновимірному, так і нескінченновимірному випадках.

Аналогічні результати можна отримати у випадку нелінійних крайових задач для рівняння Ляпунова.

Література

1. *Coppel W. A.* Dichotomies and reducibility // J. Different. Equat. – 1967. – **3**. – P. 500 – 521.
2. *Sacker R., Sell G.* Existence of dichotomies and invariant splittings for linear differential systems, II // J. Different. Equat. – 1976. – **22**. – P. 478 – 496.
3. *Sacker R. J.* Existence dichotomies and invariant splittings for linear differential systems, IV // J. Different. Equat. – 1978. – **27**. – P. 106 – 137.
4. *Sacker R. J.* The splitting index for linear differential systems // J. Different. Equat. – 1979. – **33**. – P. 368 – 405.
5. *Sacker R. J., Sell G. R.* Dichotomies for linear evolutionary equaitons in Banach spaces // J. Different. Equat. – 1994. – **113**. – P. 17 – 67.
6. *Бойчук О. А.* Розв'язки слабко нелінійних диференціальних рівнянь, обмежені на всій осі // Нелінійні коливання. – 1999. – **2**, № 1. – С. 3 – 10.
7. *Rodrigues H. M, Ruas-Filho J. G.* Evolution equations: dichotomies and the Fredholm alternative for bounded solutions // J. Different. Equat. – 1995. – **119**. – P. 263 – 283.
8. *Баскаков А. Г.* Об обратимости и фредгольмовости разностных операторов // Мат. заметки. – 2000. – **67**, № 6. – С. 816 – 827.
9. *Баскаков А. Г.* О дифференциальных и разностных фредгольмовых операторах // Докл. РАН. – 2007. – **416**, № 2. – С. 156 – 160.
10. *Latushkin Yu., Tomilov Yu.* Fredholm differential operators with unbounded coefficients // J. Different. Equat. – 2005. – **208**. – P. 388 – 429.
11. *Бойчук А. А., Покутный А. А.* Ограниченные решения линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Нелінійні коливання. – 2006. – **9**, № 1. – С. 3 – 14.
12. *Бойчук О. А., Покутний О. О.* Обмежені розв'язки слабконелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Нелінійні коливання. – 2008. – **11**, № 2. – С. 151 – 160.
13. *Boichuk A. A., Pokutnyi A. A.* Bounded solutions of linear perturbed differential equations in a Banach space // Tatra Mt. Math. Publ. – 2007. – **38**, № 4. – P. 29 – 40.
14. *Бойчук А. А., Покутный А. А.* Экспоненциальная дихотомия и ограниченные решения дифференциальных уравнений в пространстве Фреше // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 12. – С. 1587 – 1598.
15. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф.* Дихотомия на полуосях и ограниченные на всей оси решения линейных систем с запаздыванием // Нелінійні коливання. – 2015. – **18**, № 4. – С. 431 – 445.
16. *Barreira L., Valls C.* Admissibility for nonuniform exponential contractions // J. Different. Equat. – 2010. – **249**. – P. 2889 – 2904.
17. *Barreira L.* Lyapunov functions // Milan J. Math. – 2013. – **81**. – P. 153 – 169.

18. *Atanasova P., Georgieva A., Konstantinov M.* Dichotomous solutions of linear impulsive differential equations // Math. Methods Appl. Sci. – 2018. – **41**, № 5. – P. 1753 – 1760.
19. *Chow S.-N., Lin X.-B., Palmer K. J.* A shadowing lemma with applications to semilinear parabolic equations // SIAM J. Math. Anal. – 1989. – **20**. – P. 547 – 557.
20. *Palmer K. J.* Exponential dichotomies and transversal homoclinic points // J. Different. Equat. – 1984. – **55**. – P. 225 – 256.
21. *Palmer K. J.* Exponential dichotomies, the shadowing lemma and transversal homoclinic points // Dyn. Rep. – 1988. – **1**. – P. 265 – 306.
22. *Мельников В. К.* Устойчивость центра при периодических возмущениях // Труды Моск. мат. о-ва. – 1964. – **12**. – С. 1 – 56.
23. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
24. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – 2nd ed. – Berlin; Boston: Walter De Gruyter GmbH, 2016. – 296 p.
25. *Engl H., Hanke M., Neubauer A.* Regularization of inverse problems. – Dordrecht: Kluwer, 1996.
26. *Панасенко Є. В., Покутний О. О.* Умова біфуркації розв'язків рівняння Ляпунова у просторі Гільберта // Нелінійні коливання. – 2017. – **20**, № 3. – С. 373 – 390.
27. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в одномерную теорию сингулярных интегральных операторов. – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.
28. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
29. *Крейн С. Г.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
30. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 430 с.
31. *Chueshov I. D.* Introduction to the theory of infinite-dimensional dissipative systems. – Kyiv: Acta, 2002. – 416 p.
32. *Guckenheimer J., Holmes P.* Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields. – New York: Springer, 1983. – 559 p.
33. *Henry D.* Geometric theory of semilinear parabolic equations. – Berlin: Springer, 1981. – 376 p.
34. *Nicolis G., Prigogine I.* Exploring complexity. An introduction. – New York: W. H. Freeman and Co., 1989. – 328 p.

Одержано 08.02.19