УДК 517.624

Д. С. Джумабаев (Ин-т математики и мат. моделирования М-ва образования и науки Республики Казахстан, Междунар. ун-т информ. технологий, Казах. нац. ун-т им. аль-Фараби, Алматы)

НОВЫЕ ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ *

New general solutions of ordinary differential equations are introduced and their properties are established. We develop new methods of solving the boundary-value problems based on the construction and solving of the systems of algebraic equations for arbitrary vectors of the general solutions. An approach to finding the initial approximation to the solution of a nonlinear boundary-value problem is proposed.

Уведено нові загальні розв'язки звичайних диференціальних рівнянь і встановлено їхні властивості. Розроблено методи розв'язування крайових задач, що ґрунтуються на побудові і розв'язанні систем алгебраїчних рівнянь відносно довільних векторів загальних розв'язків. Запропоновано підхід до знаходження початкового наближення до розв'язку нелінійної крайової задачі.

1. Введение. Рассмотрим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ)

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad t \in (0,T), \qquad x \in R^n, \tag{1.1}$$

$$g[x(0), x(T)] = 0, \tag{1.2}$$

где $f\colon [0,T] \times R^n \to R^n$ и $g\colon R^n \times R^n \to R^n$ — непрерывные функции, $\|x\| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

Через $C([0,T], R^n)$ обозначим пространство непрерывных функций $x\colon [0,T] \to R^n$ с нормой $\|x\|_1 = \max_{t\in[0,T]} \|x(t)\|$.

Решением задачи (1.1), (1.2) является непрерывно дифференцируемая на $(0,T)$ функция $x(t) \in C([0,T], R^n)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (1.1) и краевому условию (1.2).

Начальные и краевые задачи для ОДУ различными методами исследованы многими авторами (см. [1 – 9, 19, 21 – 24, 27 – 31] и приведенную в них библиографию).

Нелинейность задачи (1.1), (1.2) приводит к принципиальным трудностям как при исследовании качественных свойств краевой задачи, так и при нахождении ее решения. Так, одной из таких проблем является нахождение начального приближения к решению нелинейной краевой задачи.

Целью настоящей статьи является разработка конструктивного метода исследования и решения краевых задач для ОДУ, включающего также алгоритм нахождения начального приближения к решению нелинейной краевой задачи (1.1), (1.2). При этом используется новый подход к общему решению ОДУ и метод параметризации [10]. Этот подход к общему решению предложен в [11] для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма. Новые общие решения для линейных нагруженных дифференциальных уравнений и семейства таких уравнений введены в [12, 13]. Метод параметризации использован при решении различных задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений [14 – 18, 26].

* Выполнена при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант № АР05132486).

© Д. С. ДЖУМАБАЕВ, 2019

Опишем кратко строение статьи. В пункте 2 рассматривается линейная краевая задача. Интервал $[0,T]$ разбивается на N частей в соответствии с разбиением

$$\Delta_N: \quad t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T$$

и вводится Δ_N-общее решение линейного ОДУ. Δ_N-Общее решение обозначается через $x(\Delta_N, t, \lambda)$, оно зависит от произвольного вектора $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N) \in R^{nN}$. С помощью $x(\Delta_N, t, \lambda)$ устанавливается критерий разрешимости линейной краевой задачи и предлагается алгоритм нахождения ее решения.

В пункте 3 понятие Δ_N-общего решения распространяется на нелинейное ОДУ (1.1). Применение нового общего решения сводит разрешимость краевой задачи (1.1), (1.2) к разрешимости системы нелинейных алгебраических уравнений

$$Q_*(\Delta_N; \lambda) = 0, \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N) \in R^{nN}. \tag{1.3}$$

Система (1.3) составляется с помощью нового общего решения уравнения (1.1), краевого условия (1.2) и условий непрерывности решения в промежуточных точках разбиения Δ_N.

Пункт 4 посвящен методу решения нелинейной краевой краевой задачи (1.1), (1.2), основанному на решении системы (1.3). В этом методе для заданного $\lambda \in R^{nN}$ значения $Q_*(\Delta_N; \lambda)$ и матрицы Якоби $\partial Q_*(\Delta_N; \lambda)/\partial\lambda$ определяются решениями задач Коши для ОДУ на подынтервалах. Построен итерационный процесс для решения системы (1.3) и установлены условия его сходимости.

В пункте 5 исследуются вопросы построения приближенного Δ_N-общего решения уравнения (1.1) и предлагается один подход к нахождению начального приближения к решению системы (1.3).

2. $\boldsymbol{\Delta_N}$-Общее решение линейного ОДУ, и его применение для решения линейной краевой задачи. Рассмотрим линейную краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \qquad t \in (0,T), \qquad x \in R^n, \tag{2.1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \qquad d \in R^n, \tag{2.2}$$

где $(n \times n)$-матрица $A(t)$ и n-вектор $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$.

Возьмем разбиение Δ_N: $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T$. Через Δ_1 обозначим случай отсутствия разбиения интервала $[0,T]$. Пусть $C([0,T], \Delta_N, R^{nN})$ — пространство систем функций $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t))$, где функции $x_r : [t_{r-1}, t_r) \to R^n$ непрерывны и имеют конечные левосторонние пределы $\lim_{t\to t_r - 0} x_r(t)$ для всех $r = \overline{1,N}$ с нормой $\|x[\cdot]\|_2 = \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|x_r(t)\|$.

Предположим, что $x(t)$ — решение уравнения (2.1) и $x_r(t)$ — его сужение на интервал $[t_{r-1}, t_r)$, т. е. $x_r(t) = x(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$. Тогда система функций $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t))$ принадлежит пространству $C([0,T], \Delta_N, R^{nN})$, и ее элементы $x_r(t)$, $r = \overline{1,N}$, удовлетворяют системе линейных ОДУ

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + f(t), \qquad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,N}. \tag{2.3}$$

Введем параметры $\lambda_r = x_r(t_{r-1})$, $r = \overline{1, N}$. Выполняя замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$ на каждом r-м интервале $[t_{r-1}, t_r)$, получаем систему ОДУ с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + f(t), \qquad t \in [t_{r-1}, t_r), \qquad r = \overline{1, N}, \tag{2.4}$$

и начальными условиями

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \qquad r = \overline{1, N}. \tag{2.5}$$

Для каждых фиксированных $\lambda_r \in R^n$ и r задача Коши (2.4), (2.5) имеет единственное решение $u_r(t, \lambda_r)$, и система функций $u[t, \lambda] = (u_1(t, \lambda_1), u_2(t, \lambda_2), \ldots, u_N(t, \lambda_N))$ принадлежит пространству $C([0, T], \Delta_N, R^{nN})$.

Система функций $u[t, \lambda]$ называется решением задачи Коши с параметрами (2.4), (2.5). Если система функций $\widetilde{x}[t] = (\widetilde{x}_1(t), \widetilde{x}_2(t), \ldots, \widetilde{x}_N(t))$ принадлежит пространству $C([0, T], \Delta_N, R^{nN})$ и функции $\widetilde{x}_r(t)$, $r = \overline{1, N}$, удовлетворяют уравнениям (2.3), то система функций $u[t, \widetilde{\lambda}] = (u_1(t, \widetilde{\lambda}_1), u_2(t, \widetilde{\lambda}_2), \ldots, u_N(t, \widetilde{\lambda}_N))$ с элементами $u_r(t, \widetilde{\lambda}_r) = \widetilde{x}_r(t) - \widetilde{\lambda}_r$, $\widetilde{\lambda}_r = \widetilde{x}_r(t_{r-1})$, $r = \overline{1, N}$, является решением задачи Коши с параметрами (2.4), (2.5) при $\lambda_r = \widetilde{\lambda}_r$, $r = \overline{1, N}$. Наоборот, если система функций $u[t, \lambda^*] = (u_1(t, \lambda_1^*), u_2(t, \lambda_2^*), \ldots, u_N(t, \lambda_N^*))$ является решением задачи (2.4), (2.5) при $\lambda_r = \lambda_r^*$, $r = \overline{1, N}$, то система функций $x^*[t] = (x_1^*(t), x_2^*(t), \ldots, x_N^*(t))$ с элементами $x_r^*(t) = \lambda_r^* + u_r(t, \lambda_r^*)$, $r = \overline{1, N}$, принадлежит пространству $C([0, T], \Delta_N, R^{nN})$, и функции $x_r^*(t)$, $r = \overline{1, N}$, удовлетворяют уравнениям (2.3).

Теперь введем определение нового общего решения ОДУ (2.1).

Определение 2.1. *Пусть* $u[t, \lambda] = (u_1(t, \lambda_1), u_2(t, \lambda_2), \ldots, u_N(t, \lambda_N))$ *является решением задачи Коши* (2.4), (2.5) *для параметра* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N) \in R^{nN}$. *Тогда функция* $x(\Delta_N, t, \lambda)$, *определенная равенствами*

$$x(\Delta_N, t, \lambda) = \lambda_r + u_r(t, \lambda_r) \quad \textit{для} \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \;\; r = \overline{1, N},$$

и

$$x(\Delta_N, T, \lambda) = \lambda_N + \lim_{t \to T-0} u_N(t, \lambda_N),$$

называется Δ_N*-общим решением уравнения* (2.1).

Как следует из определения 2.1, Δ_N-общее решение зависит от N произвольных векторов $\lambda_r \in R^n$ и удовлетворяет уравнению (2.1) для всех $t \in (0, T) \backslash \{t_p, p = \overline{1, N-1}\}$.

Возьмем $X_r(t)$, фундаментальную матрицу ОДУ

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \qquad t \in [t_{r-1}, t_r], \qquad r = \overline{1, N},$$

и решения задачи Коши с параметрами (2.4), (2.5) запишем в виде

$$u_r(t, \lambda_r) = X_r(t) \int\limits_{t_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau) A(\tau) d\tau \lambda_r + X_r(t) \int\limits_{t_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau, \qquad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N}.$$

Рассмотрим задачи Коши на подынтервалах

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + P(t), \qquad z(t_{r-1}) = 0, \qquad t \in [t_{r-1}, t_r], \qquad r = \overline{1, N}, \tag{2.6}$$

где $P(t)$ — непрерывная на $[0,T]$ квадратная матрица или вектор размерности n. Через $a_r(P,t)$ обозначим единственное решение задачи Коши (2.6) на каждом r-м интервале. Из единственности решения задачи Коши для линейных ОДУ следует, что

$$a_r(P,t) = X_r(t) \int\limits_{t_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau)P(\tau)d\tau, \qquad t \in [t_{r-1}, t_r], \qquad r = \overline{1,N}.$$

Поэтому мы можем представить Δ_N-общее решение уравнения (2.1) в виде

$$x(\Delta_N, t, \lambda) = \lambda_p + a_p(A,t)\lambda_p + a_p(f,t), \qquad t \in [t_{p-1}, t_p), \quad p = \overline{1, N-1}, \tag{2.7}$$

$$x(\Delta_N, t, \lambda) = \lambda_N + a_N(A,t)\lambda_N + a_N(f,t), \qquad t \in [t_{N-1}, t_N]. \tag{2.8}$$

Следующее утверждение показывает, что функцию $x(\Delta_N, t, \lambda)$ можно рассматривать как „общее решение”.

Теорема 2.1. *Пусть заданы кусочно-непрерывная на* $[0,T]$ *функция* $\widetilde{x}(t)$ *с возможными точками разрыва* $t = t_p$, $p = \overline{1, N-1}$, *и* Δ_N*-общее решение* $x(\Delta_N, t, \lambda)$ *уравнения* (2.1). *Предположим, что функция* $\widetilde{x}(t)$ *имеет непрерывную производную и удовлетворяет уравнению* (2.1) *для всех* $t \in (0,T)\backslash\{t_p, p = \overline{1,N-1}\}$. *Тогда существует единственный параметр* $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \ldots, \widetilde{\lambda}_N) \in R^{nN}$ *такой, что равенство* $x(\Delta_N, t, \widetilde{\lambda}) = \widetilde{x}(t)$ *выполняется для всех* $t \in [0,T]$.

Поскольку доказательство этой теоремы несложно, мы его не приводим.

Следствие **2.1.** *Пусть* $x^*(t)$ — *решение уравнения* (2.1) *и* $x(\Delta_N, t, \lambda)$ — Δ_N*-общее решение уравнения* (2.1). *Тогда существует единственный параметр* $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_N^*) \in R^{nN}$ *такой, что равенство* $x(\Delta_N, t, \lambda^*) = x^*(t)$ *выполняется для всех* $t \in [0,T]$.

Если $x(t)$ является решением уравнения (2.1) и $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t))$ — система функций, состоящая из его сужений на подынтервалы $[t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$, то имеют место равенства

$$\lim_{t \to t_p - 0} x_p(t) = x_{p+1}(t_p), \qquad p = \overline{1, N-1}. \tag{2.9}$$

Эти равенства являются условиями непрерывности решения уравнения (2.1) во внутренних точках разбиения Δ_N.

Теорема 2.2. *Пусть система функций* $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t))$ *принадлежит пространству* $C([0,T], \Delta_N, R^{nN})$. *Предположим, что функции* $x_r(t)$, $r = \overline{1,N}$, *удовлетворяют уравнениям* (2.3) *и условиям непрерывности* (2.9). *Тогда функция* $x^*(t)$, *определяемая равенствами* $x^*(t) = x_r(t)$ *при* $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $\quad r = \overline{1,N}$, *и* $x^*(T) = \lim_{t \to T-0} x_N(t)$, *непрерывна на* $[0,T]$, *непрерывно дифференцируема на* $(0,T)$ *и удовлетворяет уравнению* (2.1).

Доказательство. Равенства (2.9) и $x^*(T) = \lim_{t \to T-0} x_N(t)$, а также принадлежность системы функций $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t))$ пространству $C([0,T], \Delta_N, R^{nN})$ обеспечивают непрерывность функции $x^*(t)$ на интервале $[0,T]$. Поскольку функции $x_r(t)$, $r = \overline{1,N}$, удовлетворяют уравнениям (2.3), то функция $x^*(t)$ имеет непрерывную производную и удовлетворяет уравнению (2.1) для всех $t \in [0,T]\backslash\{t_p, p = \overline{1,N-1}\}$. Существование и непрерывность производной функции $x^*(t)$ в точках $t = t_p$, $p = \overline{1,N-1}$, следуют из соотношений

$$\lim_{t \to t_p - 0} \dot{x}^*(t) = A(t_p)x^*(t_p) + f(t_p) = \lim_{t \to t_p + 0} \dot{x}^*(t), \qquad p = \overline{1, N-1}.$$

Следовательно, функция $x^*(t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) и во внутренних точках разбиения Δ_N.

Теорема 2.2 доказана.

Δ_N-Общее решение позволяет свести разрешимость краевой задачи к разрешимости системы линейных алгебраических уравнений относительно произвольных векторов $\lambda_r \in R^n$, $r = \overline{1, N}$. Подставляя соответствующие выражения Δ_N-общего решения (2.7), (2.8) в краевое условие (2.2) и условия непрерывности (2.9), получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$B\lambda_1 + C\lambda_N + Ca_N(A, T)\lambda_N = d - Ca_N(f, T), \tag{2.10}$$

$$\lambda_p + a_p(A, t_p)\lambda_p - \lambda_{p+1} = -a_p(f, t_p), \qquad p = \overline{1, N-1}. \tag{2.11}$$

Через $Q_*(\Delta_N)$ обозначим $(nN \times nN)$-матрицу, соответствующую левой части системы (2.10), (2.11), и запишем систему в виде

$$Q_*(\Delta_N)\lambda = -F_*(\Delta_N), \qquad \lambda \in R^{nN}, \tag{2.12}$$

где $F_*(\Delta_N) = \big(-d + Ca_N(f, T), a_1(f, t_1), a_2(f, t_2), \ldots, a_{N-1}(f, t_{N-1})\big) \in R^{nN}$.

Из теорем 2.1 и 2.2 следует, что для любого разбиения Δ_N имеет место следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Если* $x^*(t)$ *— решение задачи* (2.1), (2.2) *и* $\lambda_r^* = x^*(t_{r-1})$, $r = \overline{1, N}$, *то вектор* $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_N^*) \in R^{nN}$ *является решением системы* (2.12). *Наоборот, если элементы вектора* $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots, \tilde{\lambda}_N) \in R^{nN}$ *удовлетворяют системе* (2.12) *и* $u[t, \tilde{\lambda}] = (u_1(t, \tilde{\lambda}_1), u_2(t, \tilde{\lambda}_2), \ldots, u_N(t, \tilde{\lambda}_N))$ *— решение задачи Коши* (2.4), (2.5) *при* $\lambda_r = \tilde{\lambda}_r$, $r = \overline{1, N}$, *то функция* $\tilde{x}(t)$, *определяемая равенствами* $\tilde{x}(t) = \tilde{\lambda}_r + u_r(t, \tilde{\lambda}_r)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$, *и* $\tilde{x}(T) = \tilde{\lambda}_N + \lim_{t \to T-0} u_N(t, \tilde{\lambda}_N)$, *удовлетворяет дифференциальному уравнению* (2.1) *и краевому условию* (2.2).

Определение 2.2. *Краевая задача* (2.1), (2.2) *называется однозначно разрешимой, если для любой пары* $(f(t), d)$, *где* $f(t) \in C([0, T], R^n)$ *и* $d \in R^n$, *она имеет единственное решение.*

Из леммы 2.1 и известных теорем линейной алгебры вытекают следующие утверждения.

Теорема 2.3. *Краевая задача* (2.1), (2.2) *разрешима тогда и только тогда, когда вектор* $F_*(\Delta_N)$ *ортогонален ядру транспонированной матрицы* $(Q_*(\Delta_N))'$, *т. е. для любого* $\zeta \in \operatorname{Ker}(Q_*(\Delta_N))'$ *справедливо равенство* $(F_*(\Delta_N), \zeta) = 0$, *где* $(\cdot, \cdot)$ *— скалярное произведение в* R^{nN}.

Теорема 2.4. *Краевая задача* (2.1), (2.2) *однозначно разрешима тогда и только тогда, когда* $(nN \times nN)$*-матрица* $Q_*(\Delta_N)$ *обратима.*

Основываясь на результатах этого пункта, мы предлагаем следующий алгоритм нахождения решения линейной краевой задачи (2.1), (2.2).

***Шаг* 1**. Решаем задачи Коши на подынтервалах

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + A(t), \quad z(t_{r-1}) = 0, \; t \in [t_{r-1}, t_r],$$

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t), \qquad z(t_{r-1}) = 0, \quad t \in [t_{r-1}, t_r],$$

и находим $a_r(A, t_r)$ и $a_r(f, t_r)$, $r = \overline{1, N}$.

***Шаг* 2**. Используя найденные матрицы и векторы, составляем систему линейных алгебраических уравнений (2.12).

***Шаг* 3**. Решаем систему (2.12) и находим $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_N^*) \in R^{nN}$. Заметим, что элементы λ^* являются значениями решения задачи (2.1), (2.2) в левых концах подынтервалов: $\lambda_r^* = x^*(t_{r-1}),\ r = \overline{1, N}$.

***Шаг* 4**. Решаем задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \qquad x(t_{p-1}) = \lambda_p^*, \quad t \in [t_{p-1}, t_p), \quad p = \overline{1, N-1},$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \qquad x(t_{N-1}) = \lambda_N^*, \quad t \in [t_{N-1}, t_N],$$

и определяем значения решения $x^*(t)$ в остальных точках подынтервалов.

Как следует из леммы 2.1, любое решение системы (2.12) определяет значения решения задачи (2.1), (2.2) в начальных точках подынтервалов. Следовательно, в случае $N = 1$ предложенный алгоритм является вариантом „метода стрельбы”. В случае $N \geq 2$ мы получаем вариант „метода параллельной стрельбы”.

Точность предложенного алгоритма зависит от точности вычисления коэффициентов и правых частей системы (2.12).

Задача Коши для ОДУ является основной вспомогательной задачей в предложенном алгоритме. Выбирая приближенный метод решения этой задачи, мы получаем приближенный метод решения краевой задачи (2.1), (2.2). Решение же задач Коши численными методами приводит к численным методам решения задачи (2.1), (2.2).

3. $\boldsymbol{\Delta_N}$-Общее решение нелинейного ОДУ и его свойства. Пусть $x^0 \in R^n,\ \rho > 0$, $S(x^0, \rho) = \{x \in R^n : \|x - x^0\| < \rho\}$, $G^0(\rho) = \{(t, x) : t \in [0, T], \|x - x^0\| < \rho\}$ и Δ_N является разбиением: $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T$.

Условие $\mathcal{A}$. *Функция $f(t, x)$ непрерывна и ограничена в $G^0(\rho)$, а также выполняются следующие неравенства*:

1) $\|f(t, x) - f(t, \bar{x})\| \leq L\|x - \bar{x}\|$, *$L$ — постоянная,* $x, \overline{x} \in S(x^0, \rho)$,

2) $M_r \cdot (t_r - t_{r-1}) \leq \dfrac{\rho}{2}$, *где* $M_r = \sup_{(t,x)\in[t_{r-1},t_r)\times S(x^0,\rho)} \|f(t, x)\|,\ r = \overline{1, N}$.

Введем следующие множества:

$$G_p^0(\rho) = \left\{(t, x) : t \in [t_{p-1}, t_p), \quad \|x - x^0\| < \rho - M_p \cdot (t_p - t) \right\}, \qquad p = \overline{1, N-1},$$

$$G_N^0(\rho) = \left\{(t, x) : t \in [t_{N-1}, t_N], \qquad \|x - x^0\| < \rho - M_N \cdot (t_N - t) \right\},$$

и

$$G^0(\Delta_N, \rho) = \bigcup_{r=1}^{N} G_r^0(\rho).$$

Если функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и $(t, x(t)) \in G^0(\Delta_N, \rho)$, то функции $x_r(t),\ r = \overline{1, N}$, как сужения функции $x(t)$ на $[t_{r-1}, t_r)$, удовлетворяют нелинейным ОДУ

$$\frac{dx_r}{dt} = f(t, x_r), \qquad t \in [t_{r-1}, t_r), \qquad r = \overline{1, N}, \tag{3.1}$$

и $(t, x_r(t)) \in G_r^0(\rho),\ r = \overline{1, N}$. Вводя параметры $\lambda_r = x_r(t_{r-1})$ и выполняя замены $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, получаем задачи Коши для нелинейных ОДУ с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r), \qquad u_r(t_{r-1}) = 0, \qquad t \in [t_{r-1}, t_r), \qquad r = \overline{1, N}. \tag{3.2}$$

При условии $\mathcal{A}$ задачи Коши (3.2) имеют единственные решения $u_r(t, \lambda_r)$ для любого $\lambda_r \in \in S(x^0, \rho - M_r(t_r - t_{r-1}))$, $r = \overline{1, N}$, и существуют конечные пределы $\lim_{t \to t_r - 0} u_r(t, \lambda_r)$, $r = \overline{1, N}$. Система функций $u[t, \lambda] = (u_1(t, \lambda_1), u_2(t, \lambda_2), \ldots, u_N(t, \lambda_N))$ называется решением задачи Коши с параметрами (3.2).

Определение 3.1. *Пусть выполняется условие $\mathcal{A}$ и система функций $u[t, \lambda] = (u_1(t, \lambda_1), u_2(t, \lambda_2), \ldots, u_N(t, \lambda_N))$ — решение задачи Коши* (3.2) *с параметром $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)$, где $\lambda_r \in S(x^0, \rho - M_r(t_r - t_{r-1}))$, $r = \overline{1, N}$. Тогда функция $x(\Delta_N, t, \lambda)$, определяемая равенствами $x(\Delta_N, t, \lambda) = \lambda_r + u_r(t, \lambda_r)$ для $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$, и $x(\Delta_N, T, \lambda) = \lambda_N + + \lim_{t \to T - 0} u_N(t, \lambda_N)$, называется Δ_N-общим решением для уравнения* (1.1) *в* $G^0(\Delta_N, \rho)$.

Условие $\mathcal{A}$ обеспечивает существование и единственность Δ_N-общего решения уравнения (1.1) в $G^0(\Delta_N, \rho)$. Очевидно, что для любого $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N) \in R^{nN}$ с $\lambda_r \in S(x^0, \rho - - M_r(t_r - t_{r-1}))$, $r = \overline{1, N}$, функция $x(\Delta_N, t, \lambda)$ удовлетворяет уравнению (1.1) для всех $t \in (0, T) \backslash \{t_p, p = \overline{1, N-1}\}$, и пара $(t, x(\Delta_N, t, \lambda))$ принадлежит множеству $G^0(\Delta_N, \rho)$.

В приведенных ниже теореме и следствии предположим, что $x(\Delta_N, t, \lambda)$ является Δ_N-общим решением уравнения (1.1) в $G^0(\Delta_N, \rho)$.

Теорема 3.1. *Пусть задана кусочно-непрерывная на $[0, T]$ функция $\widetilde{x}(t)$ с возможными точками разрыва $t = t_p$, $p = \overline{1, N-1}$, и $(t, \widetilde{x}(t)) \in G^0(\Delta_N, \rho)$. Предположим, что функция $\widetilde{x}(t)$ имеет непрерывную производную и удовлетворяет уравнению* (1.1) *для всех $t \in \in (0, T) \backslash \{t_p, p = \overline{1, N-1}\}$. Тогда существует единственный параметр $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \ldots, \widetilde{\lambda}_N) \in \in R^{nN}$ с $\widetilde{\lambda}_r \in S(x^0, \rho - M_r(t_r - t_{r-1}))$, $r = \overline{1, N}$, такой, что равенство $x(\Delta_N, t, \widetilde{\lambda}) = \widetilde{x}(t)$ выполняется для всех $t \in [0, T]$.*

Доказательство. Возьмем систему функций $\widetilde{x}[t] = (\widetilde{x}_1(t), \widetilde{x}_2(t), \ldots, \widetilde{x}_N(t))$, где $\widetilde{x}_r(t)$ — сужение функции $\widetilde{x}(t)$ на $[t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$. При предположениях теоремы функция $\widetilde{x}_r(t)$ является решением уравнения (3.1), а пара $(t, \widetilde{x}_r(t))$ принадлежит множеству $G_r^0(\rho)$ для всех $r = \overline{1, N}$. Для функции $\widetilde{x}(t)$ определим параметр $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \ldots, \widetilde{\lambda}_N) \in R^{nN}$, где $\widetilde{\lambda}_r = = \widetilde{x}_r(t_{r-1})$. Очевидно, что $\widetilde{\lambda}_r \in S(x^0, \rho - M_r(t_r - t_{r-1}))$ для всех $r = \overline{1, N}$. Решаем задачи Коши (3.2) с параметрами $\lambda_r = \widetilde{\lambda}_r$, $r = \overline{1, N}$. В силу условия $\mathcal{A}$ существует единственное решение $u_r(t, \widetilde{\lambda}_r)$, и пара $(t, \widetilde{\lambda}_r + u_r(t, \widetilde{\lambda}_r))$ принадлежит $G_r^0(\rho)$, $r = \overline{1, N}$. Теперь, учитывая соотношения между решениями системы ОДУ на подынтервалах и задачи Коши с параметрами, указанные в пункте 2, получаем

$$\widetilde{x}(t) = \widetilde{x}_r(t) = \widetilde{\lambda}_r + u_r(t, \widetilde{\lambda}_r) = x(\Delta_N, t, \widetilde{\lambda}), \qquad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N},$$

$$\widetilde{x}(T) = \widetilde{\lambda}_N + \lim_{t \to T-0} u_N(t, \widetilde{\lambda}_r) = x(\Delta_N, T, \widetilde{\lambda}).$$

Условие $\mathcal{A}$ и определение 3.1 обеспечивают единственность $\widetilde{\lambda}$.

Теорема 3.1 доказана.

***Следствие* 3.1.** *Пусть $x^*(t)$ — решение уравнения* (1.1) *и $(t, x^*(t)) \in G^0(\Delta_N, \rho)$. Тогда существует единственный параметр $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_N^*) \in R^{nN}$, где $\lambda_r^* \in \in S(x^0, \rho - M_r(t_r - t_{r-1}))$, $r = \overline{1, N}$, такой, что равенство $x(\Delta_N, t, \lambda^*) = x^*(t)$ выполняется для всех $t \in [0, T]$.*

Если $x(t)$ — решение уравнения (1.1) и $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t))$ — система функций, составленная из его сужений на подынтервалах $[t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$, то справедливы следующие равенства:

$$\lim_{t\to t_p-0} x_p(t) = x_{p+1}(t_p), \qquad p = \overline{1, N-1}. \tag{3.3}$$

Равенства (3.3) являются условиями непрерывности решения уравнения (1.1) во внутренних точках разбиения Δ_N.

Теорема 3.2. *Пусть система функций* $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t))$ *принадлежит пространству* $C([0,T], \Delta_N, R^{nN})$, *а пара* $(t, x_r(t))$ *— множеству* $G_r^0(\rho)$ *для всех* $r = \overline{1,N}$. *Предположим, что функции* $x_r(t)$, $r = \overline{1,N}$, *удовлетворяют уравнениям* (3.1) *и условиям непрерывности* (3.3). *Тогда функция* $x^*(t)$, *определяемая равенствами* $x^*(t) = x_r(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$, $x^*(T) = \lim_{t\to T-0} x_N(t)$, *непрерывна на* $[0,T]$, *непрерывно дифференцируема на* $(0,T)$, *удовлетворяет уравнению* (1.1) *и* $(t, x^*(t)) \in G^0(\Delta_N, \rho)$.

Доказательство. По предположению теоремы $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)) \in C([0,T], \Delta_N, R^{nN})$. Следовательно, равенства $x^*(T) = \lim_{t\to T-0} x_N(t)$ и (3.3) обеспечивают непрерывность функции $x^*(t)$ на $[0,T]$. Из принадлежности $(t, x_r(t))$ множеству $G_r^0(\rho)$, $r = \overline{1,N}$, следует, что $(t, x^*(t)) \in G^0(\Delta_N, \rho)$. Поскольку функции $x_r(t)$, $r = \overline{1,N}$, удовлетворяют уравнениям (3.1), функция $x^*(t)$ имеет непрерывную производную и удовлетворяет уравнению (1.1) для всех $t \in (0,T)\backslash\{t_p, p = \overline{1, N-1}\}$. Существование и непрерывность $\dot{x}^*(t)$ в точках $t = t_p$, $p = \overline{1, N-1}$ следуют из непрерывности функции $f(t,x)$ в $G^0(\rho)$ и следующих соотношений:

$$\lim_{t\to t_p-0} \dot{x}^*(t) = \lim_{t\to t_p-0} f(t, x^*(t)) = f(t_p, x^*(t_p)) = \lim_{t\to t_p+0} \dot{x}^*(t), \qquad p = \overline{1, N-1}.$$

Таким образом, функция $x^*(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и во внутренних точках разбиения интервала $[0,T]$.

Теорема 3.2 доказана.

Δ_N-Общее решение для уравнения (1.1) позволяет свести разрешимость краевой задачи (1.1), (1.2) к разрешимости системы нелинейных алгебраических уравнений относительно параметров $\lambda_r \in R^n$, $r = \overline{1,N}$. Для этого условия непрерывности (3.3) запишем в следующем виде:

$$\lim_{t\to t_p-0} x(\Delta_N, t, \lambda) - x(\Delta_N, t_p, \lambda) = 0, \qquad p = \overline{1, N-1},$$

где $x(\Delta_N, t, \lambda)$ — Δ_N-общее решение уравнения (1.1). Подставляя соответствующие выражения Δ_N-общего решения в краевое условие и условия непрерывности, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений

$$g[\lambda_1, \lambda_N + \lim_{t\to T-0} u_N(t, \lambda_N)] = 0, \tag{3.4}$$

$$\lambda_p + \lim_{t\to t_p-0} u_p(t, \lambda_p) - \lambda_{p+1} = 0, \qquad p = \overline{1, N-1}. \tag{3.5}$$

Запишем систему (3.4), (3.5) в виде

$$Q_*(\Delta_N; \lambda) = 0, \qquad \lambda \in R^{nN}. \tag{3.6}$$

В следующей теореме предполагается, что выполняется условие $\mathcal{A}$ и $x(\Delta_N, t, \lambda)$ — Δ_N-общее решение уравнения (1.1) в $G^0(\Delta_N, \rho)$.

Теорема 3.3. *Пусть функция* $x^*(t)$ *— решение задачи* (1.1), (1.2) *и* $(t, x^*(t)) \in G^0(\Delta_N, \rho)$. *Тогда параметр* $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_N^*)$ *с элементами* $\lambda_r^* = x^*(t_{r-1})$, $r = \overline{1, N}$, *является решением системы* (3.6) *и* $\lambda_r^* \in S(x^0, \rho - M_r(t_r - t_{r-1}))$, $r = \overline{1, N}$. *Наоборот, если* $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \ldots, \widetilde{\lambda}_N)$, *где* $\widetilde{\lambda}_r \in S(x^0, \rho - M_r(t_r - t_{r-1}))$, $r = \overline{1, N}$, *— решение системы* (3.6), *то функция* $\widetilde{x}(t) = x(\Delta_N, t, \widetilde{\lambda})$ *является решением задачи* (1.1), (1.2) *и* $(t, \widetilde{x}(t)) \in G^0(\Delta_N, \rho)$.

Доказательство. Если функция $x^*(t)$ является решением задачи (1.1), (1.2), то справедливы равенства

$$g[x^*(0), x^*(T)] = 0, \tag{3.7}$$

$$\lim_{t \to t_p - 0} x^*(t) - x^*(t_{p+1}) = 0, \quad p = \overline{1, N-1}. \tag{3.8}$$

Возьмем $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_N^*)$ с элементами $\lambda_r^* = x^*(t_{r-1})$, $r = \overline{1, N}$. Из принадлежности $(t, x^*(t))$ множеству $G^0(\Delta_N, \rho)$ следует, что $\lambda_r^* \in S(x^0, \rho - M_r(t_r - t_{r-1}))$ для всех $r = \overline{1, N}$. Поскольку функция $x^*(t)$ удовлетворяет и уравнению (1.1), то по теореме 3.1 равенство $x^*(t) = x(\Delta_N, t, \lambda^*)$ выполняется для всех $t \in [0, T]$. Подставляя соответствующие выражения $x(\Delta_N, t, \lambda^*)$ в (3.7) и (3.8), получаем

$$g[\lambda_1^*, \lambda_N^* + \lim_{t \to T-0} u_N(t, \lambda_N^*)] = 0,$$

$$\lambda_p^* + \lim_{t \to t_p - 0} u_p(t, \lambda_p^*) - \lambda_{p+1}^* = 0, \quad p = \overline{1, N-1},$$

т. е. $\lambda^* \in R^{nN}$ является решением системы (3.6).

Теперь предположим, что параметр $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \ldots, \widetilde{\lambda}_N)$ с элементами $\widetilde{\lambda}_r \in S(x^0, \rho - M_r(t_r - t_{r-1}))$, $r = \overline{1, N}$, является решением системы (3.6). Подставляя $\widetilde{\lambda}$ в Δ_N-общее решение, получаем функцию $\widetilde{x}(t) = x(\Delta_N, t, \widetilde{\lambda})$. Из условия $\mathcal{A}$ следует, что $(t, \widetilde{x}(t)) \in G^0(\Delta_N, \rho)$. Поскольку из $Q_*(\Delta_N; \widetilde{\lambda}) = 0$ следуют равенства

$$g\Big[\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_N + \lim_{t \to T-0} u_N(t, \widetilde{\lambda}_N)\Big] = 0,$$

$$\widetilde{\lambda}_p + \lim_{t \to t_p - 0} u_p(t, \widetilde{\lambda}_p) - \widetilde{\lambda}_{p+1} = 0, \qquad p = \overline{1, N-1},$$

и по определению 3.1

$$\widetilde{x}(t) = x(\Delta_N, t, \widetilde{\lambda}) = \widetilde{\lambda}_r + u_r(t, \widetilde{\lambda}_r), \qquad t \in [t_{r-1}, t_r), \qquad r = \overline{1, N},$$

$$\widetilde{x}(T) = x(\Delta_N, T, \widetilde{\lambda}) = \widetilde{\lambda}_N + \lim_{t \to T-0} u_N(t, \widetilde{\lambda}_N),$$

то функция $\widetilde{x}(t)$ удовлетворяет краевому условию (1.2) и условиям непрерывности (3.3). Поэтому согласно теореме 3.2 функция $\widetilde{x}(t)$ удовлетворяет и уравнению (1.1), т. е. функция $\widetilde{x}(t)$ является решением задачи (1.1), (1.2).

Теорема 3.3 доказана.

Следствие **3.2.** *При выполнении условия* $\mathcal{A}$ *нелинейная краевая задача* (1.1), (1.2) *имеет решение в* $G^0(\Delta_N, \rho)$ *тогда и только тогда, когда система* (3.6) *имеет решение* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)$, *где* $\lambda_r \in S(x^0, \rho - M_r(t_r - t_{r-1}))$, $r = \overline{1, N}$.

4. Применение Δ_N-общего решения для решения нелинейной краевой задачи (1.1), (1.2). В этом пункте мы предлагаем метод решения нелинейной краевой задачи (1.1), (1.2), основанный на свойствах Δ_N-общего решения уравнения (1.1) и нахождении решения системы нелинейных алгебраических уравнений

$$Q_*(\Delta_N;\lambda)=0, \qquad \lambda\in R^{nN}. \tag{4.1}$$

Для решения системы уравнений (4.1) мы используем одно утверждение из [14] относительно нелинейного операторного уравнения

$$F(x)=0, \qquad x\in X, \tag{4.2}$$

где оператор $F: X\to Y$ имеет производную Фреше $F'(x)$ в $S(x^0,\rho_0)=\{x\in X: \|x-x_0\|_X< <\rho_0\}$, X и Y — банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$ соответственно, $L(Y,X)$ — пространство ограниченных линейных операторов $\Lambda: Y\to X$ с индуцированной нормой.

Теорема А [14, с. 39]. *Пусть выполнены следующие условия*: 1) *производная Фреше* $F'(x)$ *равномерно непрерывна в* $S(x^0,\rho_0)$; 2) $F'(x)$ *ограниченно обратима для всех* $x\in S(x^0,\rho_0)$ *и* $\|[F'(x)]^{-1}\|_{L(Y,X)}\le\gamma$, γ — *постоянная;* 3) $\gamma\,\|F(x_0)\|_Y<\rho_0$. *Тогда существует число* $\alpha_0\ge 1$ *такое, что для любого* $\alpha\ge\alpha_0$ *последовательность* $\{x^{(n+1)}\}$, $n=0,1,2,\ldots,$ *определяемая итерационным процессом*

$$x^{(0)}=x^0, \qquad x^{(n+1)}=x^{(n)}-\frac{1}{\alpha}[F'(x^{(n)})]^{-1}F(x^{(n)}), \qquad n=0,1,2,\ldots, \tag{4.3}$$

содержится в $S(x^0,\rho_0)$ *и сходится к* x^* — *решению уравнения* (4.2), *принадлежащему* $S(x^0,\rho_0)$, *а также справедлива оценка*

$$\|x^*-x^0\|_X\le\gamma\,\|F(x_0)\|_Y. \tag{4.4}$$

При этом любое решение уравнения (4.2) *в* $S(x^0,\rho_0)$ *изолированно.*

Пусть условие $\mathcal{A}$ выполнено и задан параметр $\lambda^{(0)}=(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\ldots,\lambda_N^{(0)})\in R^{nN}$ с элементами $\lambda_r^{(0)}\in S(x^0,\rho-M_r(t_r-t_{r-1}))$, $r=\overline{1,N}$.

Решая задачи Коши

$$\frac{du_r}{dt}=f(t,u_r+\lambda_r^{(0)}), \qquad u_r(t_{r-1})=0, \qquad t\in[t_{r-1},t_r], \qquad r=\overline{1,N}, \tag{4.5}$$

находим функции $u_r(t,\lambda_r^{(0)})$, $r=\overline{1,N}$. Функцию $x^{(0)}(t)$ на $[0,T]$ определим равенствами

$$x^{(0)}(t)=\lambda_r^{(0)}+u_r(t,\lambda_r^{(0)}), \qquad t\in[t_{r-1},t_r), \quad r=\overline{1,N}, \qquad x^{(0)}(T)=\lambda_N^{(0)}+u_N(T,\lambda_N^{(0)}).$$

Эта функция кусочно-непрерывна на $[0,T]$ с возможными точками разрыва $t=t_p$, $p= =\overline{1,N-1}$.

Построим множество $G(x^{(0)}(t),\rho_0)=\big\{(t,x): t\in[0,T], \|x-x^{(0)}(t)\|<\rho_0\big\}$ и предположим, что $G(x^{(0)}(t),\rho_0)\subseteq G^0(\Delta_N,\rho)$.

Условие $\mathcal{B}$. *Функции* $f(t,x)$ *и* $g(v,w)$ *имеют равномерно непрерывные частные производные* $f'_x(t,x)$ *и* $g'_v(v,w)$, $g'_w(v,w)$ *в* $G(x^{(0)}(t),\rho_0)$ *и* $S(x^{(0)}(0),\rho_0)\times S(x^{(0)}(T),\rho_0)$ *соответственно, и выполняются неравенства*

$$\|f'_x(t,x)\| \le L, \qquad \|g'_v(v,w)\| \le L_1 \quad \text{и} \quad \|g'_w(v,w)\| \le L_2.$$

Возьмем любой параметр $\widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \ldots, \widehat{\lambda}_N) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_0)$, где

$$S(\lambda^{(0)}, \rho_0) = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N) \in R^{nN} : \|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\| < \rho_0,\ r = \overline{1,N}\}.$$

Для вычисления значения вектора $Q_*(\Delta_N; \lambda)$ при $\lambda = \widehat{\lambda}$ решаем задачи Коши для нелинейных ОДУ на подынтервалах

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \widehat{\lambda}_r), \qquad u_r(t_{r-1}) = 0, \qquad t \in [t_{r-1}, t_r], \qquad r = \overline{1,N},$$

и находим функции $u_r(t, \widehat{\lambda}_r)$, $r = \overline{1,N}$. Тогда

$$Q_*(\Delta_N; \widehat{\lambda}) = \begin{pmatrix} g[\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_N + u_N(T, \widehat{\lambda}_N)] \\ \widehat{\lambda}_1 + u_1(t_1, \widehat{\lambda}_1) - \widehat{\lambda}_2 \\ \ldots \\ \widehat{\lambda}_{N-1} + u_{N-1}(t_{N-1}, \widehat{\lambda}_{N-1}) - \widehat{\lambda}_N \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Чтобы определить $\dfrac{\partial u_r(t,\lambda_r)}{\partial \lambda_r}$, $r = \overline{1,N}$, мы снова рассмотрим задачи Коши с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r), \qquad u_r(t_{r-1}) = 0, \qquad t \in [t_{r-1}, t_r], \qquad r = \overline{1,N}.$$

Дифференцируя обе части дифференциального уравнения и начальных условий относительно λ_r, имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_r(t,\lambda_r)}{\partial \lambda_r}\right) = f'_x(t, u_r(t,\lambda_r) + \lambda_r)\frac{\partial u_r(t,\lambda_r)}{\partial \lambda_r} + f'_x(t, u_r(t,\lambda_r) + \lambda_r), \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1,N},$$

и

$$\frac{\partial u_r(t,\lambda_r)}{\partial \lambda_r}\Big|_{t=t_{r-1}} = 0, \qquad r = \overline{1,N}.$$

Поэтому $\dfrac{\partial u_r(t,\widehat{\lambda}_r)}{\partial \lambda_r}$ является единственным решением матричной задачи Коши для линейного ОДУ

$$\frac{dz}{dt} = \widehat{A}_r(t) z + \widehat{A}_r(t), \qquad z(t_{r-1}) = 0, \qquad t \in [t_{r-1}, t_r], \tag{4.7}$$

с $\widehat{A}_r(t) = f'_x(t, u_r(t, \widehat{\lambda}_r) + \widehat{\lambda}_r)$, $r = \overline{1,N}$. Через $\widehat{a}_r(\widehat{A}_r, t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r]$, $r = \overline{1,N}$, обозначим единственное решение задачи Коши (4.7).

Очевидно, что в силу условия $\mathcal{B}$ вектор-функция $Q_*(\Delta_N; \lambda)$ размерности nN имеет равномерно непрерывную матрицу Якоби $\dfrac{\partial Q_*(\Delta_N; \widehat{\lambda})}{\partial \lambda} : R^{nN} \to R^{nN}$ в $S(\lambda^{(0)}, \rho_0)$. При этом матрица Якоби имеет вид

$$\begin{pmatrix} \widehat{B} & O & O & \dots & O & \widehat{C}[I+\widehat{a}_N(\widehat{A}_N,T)] \\ I+\widehat{a}_1(\widehat{A}_1,t_1) & -I & O & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & \dots & I+\widehat{a}_{N-1}(\widehat{A}_{N-1},t_{N-1}) & -I \end{pmatrix}, \qquad (4.8)$$

где

$$\widehat{B} = g'_v[\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_N + u_N(T,\widehat{\lambda}_N)], \qquad \widehat{C} = g'_w[\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_N + u_N(T,\widehat{\lambda}_N)]. \qquad (4.9)$$

Таким образом, для заданного $\widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \dots, \widehat{\lambda}_N) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_0)$ значения вектора $Q_*(\Delta_N; \widehat{\lambda})$ и матрицы Якоби $\dfrac{\partial Q_*(\Delta_N;\widehat{\lambda})}{\partial\lambda}$ находим, решая только задачи Коши для ОДУ на подынтервалах. Задачи Коши для нелинейных ОДУ определяют элементы вектора, а задачи Коши для линейных матричных ОДУ — элементы матрицы Якоби.

Выберем $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}) \in R^{nN}$ как начальное приближение и найдем решение системы (4.1) с помощью итерационного процесса

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \Delta\lambda^{(k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots. \qquad (4.10)$$

Здесь $\Delta\lambda^{(k)}$ — решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial Q_*(\Delta_N; \lambda^{(k)})}{\partial\lambda}\Delta\lambda = -\frac{1}{\alpha} Q_*(\Delta_N; \lambda^{(k)}), \qquad (4.11)$$

где $\alpha \ge 1$.

Применяя теорему A к системе (4.1), получаем следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть выполняется условие $\mathcal{B}$, матрица Якоби* $\dfrac{\partial Q_*(\Delta_N;\lambda)}{\partial\lambda} : R^{nN} \to R^{nN}$ *обратима для всех $\lambda \in S(\lambda^{(0)}, \rho_0)$ и имеют место неравенства*

$$\left\| \left[\frac{\partial Q_*(\Delta_N;\lambda)}{\partial\lambda}\right]^{-1} \right\| \le \gamma_*, \qquad \gamma_* \left\| Q_*(\Delta_N; \lambda^{(0)}) \right\| < \rho_0,$$

γ_* — постоянная. Тогда существует число $\alpha_0 \ge 1$ такое, что для всех $\alpha \ge \alpha_0$ последовательность $\{\lambda^{(k)}\}$, $k = 0, 1, 2, \dots,$ определяемая итерационным процессом (4.10), (4.11), *принадлежит $S(\lambda^0, \rho_0)$ и сходится к изолированному решению λ^* системы* (4.1), *а также справедлива оценка*

$$\left\|\lambda^* - \lambda^{(0)}\right\| \le \gamma_* \left\| Q_*(\Delta_N; \lambda^{(0)}) \right\|. \qquad (4.12)$$

При определенных предположениях относительно $f(t,x)$ и $g(v,w)$ можно выбрать $\alpha = 1$ в итерационном процессе (4.10), (4.11). В этом случае мы получим итерационный процесс Ньютона для решения системы нелинейных алгебраических уравнений (4.1).

Предполагая, что условия теоремы 4.1 выполнены, предлагаем следующий алгоритм решения задачи (1.1), (1.2).

***Шаг* 1. а)** Используя векторы $u_r(t_r, \lambda_r^{(0)})$, $r = \overline{1,N}$, найденные при решении задач Коши (4.5), и формулу (4.6), определяем

$$Q_*(\Delta_N;\lambda^{(0)}) = \begin{pmatrix} g[\lambda_1^{(0)}, \lambda_N^{(0)} + u_N(T, \lambda_N^{(0)})] \\ \lambda_1^{(0)} + u_1(t_1, \lambda_1^{(0)}) - \lambda_2^{(0)} \\ \ldots \\ \lambda_{N-1}^{(0)} + u_{N-1}(t_{N-1}, \lambda_{N-1}^{(0)}) - \lambda_N^{(0)} \end{pmatrix}.$$

b) Вычисляем $(n{\times}n)$-матрицы $A^{(0)}(t) = f'_x(t, x^{(0)}(t))$. Решаем матричные задачи Коши для линейных ОДУ на подынтервалах $\dfrac{dz}{dt} = A^{(0)}(t)z + A^{(0)}(t), \quad z(t_{r-1}) = 0, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1,N}$, и находим $(n \times n)$-матрицы $a_r^{(0)}(A^{(0)}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$. Используя найденные матрицы и формулы (4.8), (4.9), составляем $(nN \times nN)$-матрицу Якоби

$$\frac{\partial Q_*(\Delta_N;\lambda^{(0)})}{\partial \lambda} =$$

$$= \begin{pmatrix} B^{(0)} & O & O & ... & O & C^{(0)}[I + a_N^{(0)}(A^{(0)}, T)] \\ I + a_1^{(0)}(A^{(0)}, t_1) & -I & O & ... & O & O \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ O & O & O & ... & I + a_{N-1}^{(0)}(A^{(0)}, t_{N-1}) & -I \end{pmatrix},$$

где

$$B^{(0)} = g'_v\Big[\lambda_1^{(0)}, \lambda_N^{(0)} + u_N(T, \lambda_N^{(0)})\Big] \quad \text{и} \quad C^{(0)} = g'_w\Big[\lambda_1^{(0)}, \lambda_N^{(0)} + u_N(T, \lambda_N^{(0)})\Big].$$

c) Решая систему линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial Q_*(\Delta_N;\lambda^{(0)})}{\partial \lambda}\Delta\lambda = -\frac{1}{\alpha} Q_*(\Delta_N;\lambda^{(0)}),$$

находим $\Delta\lambda^{(0)}$. Параметр $\lambda^{(1)}$ определяется равенством $\lambda^{(1)} = \lambda^{(0)} + \Delta\lambda^{(0)}$.

d) Решаем задачи Коши для нелинейных ОДУ с параметрами на подынтервалах

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r^{(1)}), \qquad u_r(t_{r-1}) = 0, \qquad t \in [t_{r-1}, t_r], \qquad r = \overline{1,N},$$

и находим функции $u_r(t, \lambda_r^{(1)})$, $r = \overline{1,N}$. Равенствами

$$x^{(1)}(t) = \lambda_r^{(1)} + u_r(t, \lambda_r^{(1)}), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,N}, \quad \text{и} \quad x^{(1)}(T) = \lambda_N^{(1)} + u_N(T, \lambda_N^{(1)})$$

определяем кусочно-непрерывную функцию $x^{(1)}(t)$ на $[0, T]$.

***Шаг* 2. a)** Используя найденные $u_r(t_r, \lambda_r^{(1)})$, $r = \overline{1,N}$, и формулу (4.6), вычисляем $Q_*(\Delta_N;\lambda^{(1)})$.

b) Определяем $(n \times n)$-матрицу $A^{(1)}(t) = f'_x(t, x^{(1)}(t))$. Решаем матричные задачи Коши для линейных ОДУ на подынтервалах

$$\frac{dz}{dt} = A^{(1)}(t)z + A^{(1)}(t), \quad z(t_{r-1}) = 0, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,N},$$

и находим $(n \times n)$-матрицы $a_r^{(1)}(A^{(1)}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$.

Используя формулы (4.8) и (4.9), строим $(nN \times nN)$-матрицу Якоби $\dfrac{\partial Q_*(\Delta_N;\lambda^{(1)})}{\partial\lambda}$.

c) Решая систему линейных алгебраических уравнений $\dfrac{\partial Q_*(\Delta_N;\lambda^{(1)})}{\partial\lambda}\Delta\lambda = -\dfrac{1}{\alpha}Q_*(\Delta_N;\lambda^{(1)})$, находим $\Delta\lambda^{(1)}$ и определяем $\lambda^{(2)} = \lambda^{(1)} + \Delta\lambda^{(1)}$.

d) Решаем задачу Коши для нелинейных ОДУ на подынтервалах

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r^{(2)}), \qquad u_r(t_{r-1}) = 0, \qquad t \in [t_{r-1}, t_r], \qquad r = \overline{1,N},$$

и находим функции $u_r(t,\lambda_r^{(2)})$, $r = \overline{1,N}$. Равенствами $x^{(2)}(t) = \lambda_r^{(2)} + u_r(t,\lambda_r^{(2)})$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$, и $x^{(2)}(T) = \lambda_N^{(2)} + u_N(T,\lambda_N^{(2)})$ определяем кусочно-непрерывную функцию $x^{(2)}(t)$ на $[0,T]$.

Продолжая итерационный процесс, на k-м шаге получаем $\lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \ldots, \lambda_N^{(k)}) \in R^{nN}$ и $x^{(k)}(t)$, $t \in [0,T]$. Нетрудно установить, что

$$\big\|\lambda^{(k)} - \lambda^*\big\| \le \gamma_*\big\|Q_*(\Delta_N;\lambda^{(k)})\big\|.$$

Используя неравенство Гронуолла–Беллмана, получаем оценку

$$\sup_{t\in[0,T]}\big\|x^{(k)}(t) - x^*(t)\big\| \le \gamma_*\big\|Q_*(\Delta_N;\lambda^{(k)})\big\|\exp\Big(L\max_{r=\overline{1,N}}(t_r - t_{r-1})\Big),$$

которая показывает погрешность между приближенным и точным решениями через k шагов алгоритма.

5. Построение приближенного общего решения уравнения (1.1) и один подход к нахождению начального приближения к решению системы (1.3). Разобьем интервал $[0,T]$ на N частей с шагом $h > 0\colon Nh = T$ и обозначим через Δ^h разбиение: $t_0 = 0 < t_1 = h < \ldots < t_r = rh < \ldots < t_N = T$.

Условие A_0. *Функция* $f(t,x)$ *непрерывна и ограничена в* $G^0(\rho) = \{(t,x)\colon t \in [0,T], \|x - x^0\| < \rho\}$, *и выполняются следующие неравенства*:

1) $\|f(t,x) - f(t,\bar{x})\| \le L\|x - \bar{x}\|$, $L = \text{const}$, $x, \overline{x} \in S(x^0,\rho)$,

2) $Mh \le \dfrac{\rho}{2}$, *где* $M = \sup_{(t,x)\in[0,T]\times S(x^0,\rho)}\|f(t,x)\|$.

При условии A_0 задача Коши с параметром

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r), \qquad u_r[(r-1)h] = 0, \qquad t \in [(r-1)h, rh), \tag{5.1}$$

имеет единственное решение $u_r(t,\lambda_r)$ для любого $\lambda_r \in S(x^0, \rho - Mh)$ и $r = \overline{1,N}$. При этом выполняются следующие неравенства:

$$\|u_r(t,\lambda_r)\| \le M[t - (r-1)h], \qquad t \in [(r-1)h, rh), \qquad r = \overline{1,N}. \tag{5.2}$$

Задача Коши (5.1) эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$u_r(t,\lambda_r) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f\Big(\tau_1, \lambda_r + u_r(\tau_1,\lambda_r)\Big)d\tau_1, \qquad t \in [(r-1)h, rh). \tag{5.3}$$

Заменяя $u_r(\tau_1,\lambda_r)$ соответствующей правой частью (5.3), получаем

$$u_r(t,\lambda_r)=\int\limits_{(r-1)h}^{t} f\left(\tau_1,\lambda_r+\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} f\left(\tau_2,\lambda_r+u_r(\tau_2,\lambda_r)\right)d\tau_2\right)d\tau_1,$$

$$t\in[(r-1)h,rh),\qquad r=\overline{1,N}.$$

Повторяя этот процесс ν, $\nu=1,2,\ldots,$ раз, имеем

$$u_r(t,\lambda_r)=$$

$$=\int\limits_{(r-1)h}^{t} f\left(\tau_1,\lambda_r+\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} f\left(\tau_2,\lambda_r+\ldots+\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu,\lambda_r+u_r(\tau_\nu,\lambda_r))d\tau_\nu\ldots\right)d\tau_2\right)d\tau_1,$$

$$t\in[(r-1)h,rh),\qquad r=\overline{1,N}.$$

Введем следующие функции:

$$u_{r,\nu}(t,\lambda_r)=\int\limits_{(r-1)h}^{t} f\left(\tau_1,\lambda_r+\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} f\left(\tau_2,\lambda_r+\ldots+\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu,\lambda_r)d\tau_\nu\ldots\right)d\tau_2\right)d\tau_1,$$

$$t\in[(r-1)h,rh),\qquad r=\overline{1,N}. \tag{5.4}$$

Из условия A_0 и неравенства (5.2) следуют оценки

$$\|u_{r,\nu}(t,\lambda_r)-u_r(t,\lambda_r)\|\le\int\limits_{(r-1)h}^{t} L\left(\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} L\left(\ldots\left(\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} L\|u_r(\tau_\nu,\lambda_r)\|d\tau_\nu\right)\ldots\right)d\tau_2\right)d\tau_1\le$$

$$\le M(L)^\nu\frac{1}{(\nu+1)!}[t-(r-1)h]^{\nu+1},\qquad t\in[(r-1)h,rh),\quad r=\overline{1,N}. \tag{5.5}$$

Поскольку оценки (5.5) справедливы для всех $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N)\in R^{nN}$ с $\lambda_r\in S(x^0,\rho-Mh)$, $r=\overline{1,N}$, то при больших ν или малых $h>0: Nh=T$ мы можем аппроксимировать $u_r(t,\lambda_r)$ функцией $u_{r,\nu}(t,\lambda_r)$. Обозначим приближенное Δ^h-общее решение уравнения (1.1) с ν через $x(\Delta^h,\nu,t,\lambda)$ и определим его равенствами

$$x(\Delta^h,\nu,t,\lambda)=\lambda_r+u_{r,\nu}(t,\lambda_r),\qquad t\in[(r-1)h,rh),\quad r=\overline{1,N},$$

$$x(\Delta^h,\nu,T,\lambda)=\lambda_N+\lim_{t\to T-0}u_{N,\nu}(t,\lambda_N),$$

где ν — натуральное число.

Рассмотрим нелинейную краевую задачу (1.1), (1.2). Для разбиения Δ^h краевое условие и условия непрерывности запишем следующим образом:

$$g[x(0),x(T)]=0, \tag{5.6}$$

$$\lim_{t \to ph-0} x(t) - x(ph) = 0, \qquad p = \overline{1, N-1}. \tag{5.7}$$

Используя (5.6), (5.7) и Δ^h-общее решение уравнения (1.1), имеем

$$Q_*(\Delta^h; \lambda) = 0, \qquad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N) \in R^{nN}. \tag{5.8}$$

Если же мы используем Δ^h-приближенное общее решение с некоторым ν, то, подставляя правую часть (5.4) в (5.6), (5.7), получаем следующую систему нелинейных алгебраических уравнений относительно λ_r, $r = \overline{1, N}$:

$$g\left[\lambda_1, \lambda_N + \int\limits_{(N-1)h}^{Nh} f\left(\tau_1, \lambda_N + \ldots + \int\limits_{(N-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_N) d\tau_\nu \ldots\right) d\tau_1\right] = 0, \tag{5.9}$$

$$\lambda_p + \int\limits_{(p-1)h}^{ph} f\left(\tau_1, \lambda_p + \ldots + \int\limits_{(p-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_p) d\tau_\nu \ldots\right) d\tau_1 - \lambda_{p+1} = 0, \quad p = \overline{1, N-1}. \tag{5.10}$$

Запишем систему уравнений (5.9), (5.10) в виде

$$Q_\nu(\Delta^h; \lambda) = 0, \qquad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N) \in R^{nN}. \tag{5.11}$$

Пусть $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \ldots, \widetilde{\lambda}_N) \in R^{nN}$ — решение системы (5.11) для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$ и $h > 0$: $Nh = T$, т. е. $Q_\nu(\Delta^h; \widetilde{\lambda}) = 0$.

Решая задачи Коши

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \widetilde{\lambda}_r), \qquad u_r[(r-1)h] = 0, \qquad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N},$$

находим $u_r(t, \widetilde{\lambda}_r)$, $r = \overline{1, N}$. Равенствами $\widetilde{x}(t) = \widetilde{\lambda}_r + u_r(t, \widetilde{\lambda}_r)$, $\quad t \in [(r-1)h, rh)$, $\quad r = \overline{1, N}$, и $\widetilde{x}(T) = \widetilde{\lambda}_N + \lim_{t \to T-0} u_N(t, \widetilde{\lambda}_N)$ определим функцию $\widetilde{x}(t)$ на $[0, T]$. Выберем $\widetilde{\rho} > 0$ и составим множество $G(\widetilde{x}(t), \widetilde{\rho}) = \{(t, x) : t \in [0, T], \|x - \widetilde{x}(t)\| < \widetilde{\rho}\}$.

Условие B_0. *Функции $f(t, x)$ и $g(v, w)$ имеют равномерно непрерывные частные производные $f'_x(t, x)$ и $g'_v(v, w)$, $g'_w(v, w)$ в $G(\widetilde{x}(t), \widetilde{\rho})$ и $S(\widetilde{x}(0), \widetilde{\rho}) \times S(\widetilde{x}(T), \widetilde{\rho})$ соответственно, а также выполняются следующие неравенства*:

$$\|f'_x(t, x)\| \le L, \qquad \|g'_v(v, w)\| \le L_1, \qquad \|g'_w(v, w)\| \le L_2.$$

При выполнении условия B_0 из оценки (5.5) и вида уравнений (5.9), (5.10) следует, что

$$\|Q_*(\Delta^h; \widetilde{\lambda})\| = \|Q_*(\Delta^h; \widetilde{\lambda}) - Q_\nu(\Delta^h; \widetilde{\lambda})\| \le \max(1, L_2) \frac{h^{\nu+1}}{(\nu+1)!} L^\nu M. \tag{5.12}$$

Таким образом, для больших натуральных чисел ν или малых шагов разбиения $h > 0 : Nh = T$ мы можем рассматривать решение системы (5.11) как приближенное решение системы (5.8). Отметим, что система (5.11) становится более сложной для больших $\nu \in \mathbb{N}$. Уменьшение $h > 0$ приводит к увеличению числа неизвестных параметров $\lambda_r \in R^n$, $r = \overline{1, N}$. Однако, в отличие от системы (5.8), система (5.11) полностью определяется через данные краевой задачи (1.1), (1.2). Качественные свойства этой системы также определяются свойствами функций $f(t,x)$ и $g(v,w)$.

Пусть $\lambda^h = (\lambda_1^h, \lambda_2^h, \ldots, \lambda_N^h) \in R^{nN}$ является решением системы (5.8). Решая задачи Коши с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, \lambda_r^h + u_r), \qquad u_r[(r-1)h] = 0, \qquad t \in [(r-1)h, (r-0,5)h],$$

находим значения функций $u_r(t, \lambda_r^h)$ в точках $t = (r-0,5)h$, $r = \overline{1,N}$. Составим вектор $\lambda^{h/2} = (\lambda_1^{h/2}, \lambda_2^{h/2}, \ldots, \lambda_{2N-1}^{h/2}, \lambda_{2N}^{h/2}) \in R^{2nN}$ с элементами $\lambda_1^{h/2} = \lambda_1^h$, $\lambda_2^{h/2} = \lambda_1^h + u_1(h/2, \lambda_1^h)$, $\lambda_3^{h/2} = \lambda_2^h$, $\lambda_4^{h/2} = \lambda_2^h + u_2(3h/2, \lambda_2^h)$, $\ldots$, $\lambda_{2N-1}^{h/2} = \lambda_N^h$, $\lambda_{2N}^{h/2} = \lambda_N^h + u_N(T - h/2, \lambda_N^h)$.

Легко проверить, что вектор $\lambda^{h/2} \in R^{2nN}$ удовлетворяет системе $Q_*(\Delta^{h/2}; \lambda) = 0$, $\lambda \in \in R^{2nN}$. Предположим, что для $h = h_0 > 0 \colon N_0 h_0 = T$ и $\nu = \nu_0$ мы можем найти решение или его приближение для системы нелинейных алгебраических уравнений

$$Q_{\nu_0}(\Delta^{h_0}; \lambda) = 0, \qquad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{N_0}) \in R^{nN_0}. \tag{5.13}$$

Основываясь на указанной выше взаимосвязи между $\lambda^h \in R^{nN}$ и $\lambda^{h/2} \in R^{2nN}$, мы можем уменьшить шаг разбиения h наполовину. Возьмем $h_1 = h_0/2$ и рассмотрим систему $2nN_0$ нелинейных алгебраических уравнений

$$Q_{\nu_0}(\Delta^{h_0/2}; \lambda) = 0, \qquad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2N_0}) \in R^{2nN_0}. \tag{5.14}$$

Решая задачи Коши $\dfrac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r^{(0)})$, $\quad u_r[(r-1)h_0] = 0$, $\quad t \in [(r-1)h_0, (r-0,5)h_0]$, находим $u_r[(r-0,5)h_0, \lambda_r^{(0)}]$, $r = \overline{1,N_0}$. Выберем $\lambda^{(1,0)} = (\lambda_1^{(1,0)}, \lambda_2^{(1,0)}, \ldots, \lambda_{2N_0}^{(1,0)}) \in R^{2nN_0}$ с элементами

$$\lambda_1^{(1,0)} = \lambda_1^{(0)}, \ \ \lambda_2^{(1,0)} = \lambda_1^{(0)} + u_1(h_0/2, \lambda_1^{(0)}), \ \ \lambda_3^{(1,0)} = \lambda_2^{(0)},$$

$$\lambda_4^{(1,0)} = \lambda_2^{(0)} + u_2(3h_0/2, \lambda_2^{(0)}), \ldots, \lambda_{2N_0-1}^{(1,0)} = \lambda_{N_0}^{(0)},$$

$$\lambda_{2N_0}^{(1,0)} = \lambda_{N_0}^{(0)} + u_{N_0}(T - h_0/2, \lambda_{N_0}^{(0)}),$$

как начальное приближение к $\lambda^{(1)}$ — решению системы (5.14).

Применяя подходящий метод, например метод Ньютона [9, 20, 25], находим $\lambda^{(1)}$ или его приближение. Далее берем $h_2 = h_0/4$ и, повторяя вышеописанный процесс, находим решение системы $4nN_0$ нелинейных алгебраических уравнений и т. д.

Учитывая вид $Q_\nu(\Delta^h; \lambda)$, устанавливаем оценку

$$\Big\| Q_{\nu+1}(\Delta^h; \lambda) - Q_\nu(\Delta^h; \lambda) \Big\| \le \max(1, L_2) L^\nu M \frac{h^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \tag{5.15}$$

для любого $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N) \in R^{nN}$ с $\lambda_r \in S(\widetilde{\lambda}_r, \widetilde{\rho})$, $r = \overline{1,N}$.

Теперь зафиксируем h_0 и увеличим ν. Возьмем $\nu = \nu_0 + 1$ и решим систему nN_0 нелинейных алгебраических уравнений

$$Q_{\nu_0+1}(\Delta^{h_0};\lambda)=0, \qquad \lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{N_0})\in R^{nN_0}. \tag{5.16}$$

Здесь размерность неизвестного вектора $\lambda\in R^{nN_0}$ не меняется, однако, как было отмечено выше, система (5.11) становится более сложной. Основываясь на (5.15), берем $\lambda^{(0)}=(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\ldots,\lambda_N^{(0)})\in R^{nN}$ — решение уравнения (5.13) — как начальную итерацию и решаем систему (5.16) итерационным методом.

***Пример* 5.1.** На $[0,1]$ рассмотрим периодическую краевую задачу для дифференциального уравнения Матье

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt}=-x_1+\cos 2t\cdot x_1+\frac{1}{2}x_1^3+f(t), \tag{5.17}$$

$$x_1(0)=x_1(1), \qquad x_2(0)=x_2(1), \tag{5.18}$$

где

$$f(t)=\sin 2\pi t\cdot\left(-2\pi^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{1}{16}\sin^2 2\pi t\right).$$

Введем функции $F_1(t,x_1,x_2)=x_2$ и $F_2(t,x_1,x_2)=-x_1+\cos 2t\cdot x_1+\frac{1}{2}x_1^3+f(t)$. Запишем (5.17), (5.18) в векторной форме

$$\frac{dx}{dt}=F(t,x), \qquad t\in(0,1), \qquad x\in R^2, \tag{5.19}$$

$$x(0)=x(1). \tag{5.20}$$

Функция $F(t,x)$ определена для всех $(t,x)\in[0,1]\times R^2$, и Δ^1-приближенное общее решение с $\nu=1$ имеет вид

$$x(\Delta^1,1,t,\lambda)=\lambda+\int_0^t F(\tau,\lambda)d\tau, \qquad t\in[0,1], \quad \lambda\in R^2. \tag{5.21}$$

Подставляя правую часть (5.21) в краевое условие (5.20), получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно координат вектора $\lambda=(\lambda^1,\lambda^2)\in R^2$:

$$\int_0^1 dt\lambda^2=0, \qquad -\lambda^1+\int_0^1\cos 2tdt\lambda^1+\frac{1}{2}(\lambda^1)^3+\int_0^1 f(t)dt=0.$$

Эта система имеет три приближенных решения: $\lambda_{(1)}=(1,1445;\ 0)$, $\lambda_{(2)}=(-0,9014;\ 0)$ и $\lambda_{(3)}=(-0,2431;\ 0)$.

Разобьем интервал $[0,1]$ пополам и построим $\Delta^{0,5}$-приближенное общее решение с $\nu=1$:

$$x(\Delta^{0,5},1,t,\lambda)=\lambda_1+\int_0^t F(\tau,\lambda_1)d\tau, \qquad t\in[0;\ 0,5), \qquad \lambda_1\in R^2,$$

$$x(\Delta^{0,5},1,t,\lambda)=\lambda_2+\int_{0,5}^t F(\tau,\lambda_2)d\tau, \qquad t\in[0,5;\ 1], \qquad \lambda_2\in R^2.$$

Подставляя соответствующие выражения в краевое условие (5.20) и условие непрерывности решения в точке $t = 0,5$, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\lambda_{11} - \lambda_{21} - \int\limits_{0,5}^{1} \lambda_{22} dt = 0, \qquad \lambda_{12} - \lambda_{22} - \int\limits_{0,5}^{1} \left(\lambda_{21}(\cos 2t - 1) + \frac{1}{2}\lambda_{21}^3 + f(t) \right) dt = 0,$$

$$\lambda_{11} + \int\limits_{0}^{0,5} \lambda_{12} dt - \lambda_{21} = 0, \qquad \lambda_{12} + \int\limits_{0}^{0,5} \left(\lambda_{11}(\cos 2t - 1) + \frac{1}{2}\lambda_{11}^3 + f(t) \right) dt - \lambda_{22} = 0,$$

которую запишем в виде

$$Q_1(\Delta^{0,5}; \lambda) = 0, \qquad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in R^4, \quad \lambda_1 = (\lambda_{11}, \lambda_{12}), \quad \lambda_2 = (\lambda_{21}, \lambda_{22}). \tag{5.22}$$

Используя метод Рунге – Кутта четвертого порядка с шагом $h = 0,005$ и решая задачи Коши $\dfrac{du}{dt} = F(t, \lambda_{(i)} + u), \quad u(0) = 0, \quad t \in [0;\ 0,5), \quad u \in R^2, \quad i = 1,2,3,$ получаем $u(0,5; \lambda_{(i)})$.

Составим начальные приближения к решению системы (5.22):

$$\lambda_{(1)}^{(0)} = (\lambda_{(1)}, \lambda_{(1)} + u(0,5; \lambda_{(1)})) = (1,1445;\ 0;\ -0,3663;\ -6,1195),$$

$$\lambda_{(2)}^{(0)} = (\lambda_{(2)}, \lambda_{(2)} + u(0,5; \lambda_{(2)})) = (-0,9014;\ 0;\ -2,5675;\ -7,0909),$$

$$\lambda_{(3)}^{(0)} = (\lambda_{(3)}, \lambda_{(3)} + u(0,5; \lambda_{(3)})) = (-0,2431;\ 0;\ -1,8216;\ -6,419).$$

Применение итерационного метода Ньютона с этими начальными приближениями приводит к одному и тому же решению системы (5.22), параметру

$$\lambda^{(0,0)} = (-0,0885;\ 3,1334;\ 1,4782;\ -3,1334).$$

Теперь мы используем $\Delta^{0,5}$-приближенное общее решение уравнения (5.19) с $\nu = 2$:

$$x(\Delta^{0,5}, 2, t, \lambda) = \lambda_1 + \int\limits_0^t F\left(\tau_1, \lambda_1 + \int\limits_0^{\tau_1} F(\tau_2, \lambda_1) d\tau_2\right) d\tau_1, \qquad t \in [0;\ 0,5), \qquad \lambda_1 \in R^2,$$

$$x(\Delta^{0,5}, 2, t, \lambda) = \lambda_2 + \int\limits_{0,5}^t F\left(\tau_1, \lambda_2 + \int\limits_{0,5}^{\tau_1} F(\tau_2, \lambda_2) d\tau_2\right) d\tau_1, \qquad t \in [0,5;\ 1], \qquad \lambda_2 \in R^2.$$

Подставляя правые части этих равенств в краевое условие (5.20) и условия непрерывности решения в точке $t = 0,5$, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\lambda_{11} - \lambda_{21} - \int\limits_{0,5}^{1} \left(\lambda_{22} + \int\limits_{0,5}^{t} \left(\lambda_{21}(\cos 2\tau - 1) + \frac{1}{2}\lambda_{21}^3 + f(\tau) \right) d\tau \right) dt = 0,$$

$$\lambda_{12} - \lambda_{22} - \int\limits_{0,5}^{1} \left(\left(\lambda_{21} + \int\limits_{0,5}^{t} \lambda_{22} d\tau \right) (\cos 2t - 1) + \frac{1}{2} \left(\lambda_{21} + \int\limits_{0,5}^{t} \lambda_{22} d\tau \right)^3 + f(t) \right) dt = 0,$$

$$\lambda_{11}+\int\limits_0^{0,5}\left(\lambda_{12}+\int\limits_0^t\left(\lambda_{11}(\cos 2\tau-1)+\frac{1}{2}\lambda_{11}^3+f(\tau)\right)d\tau\right)dt-\lambda_{21}=0,$$

$$\lambda_{12}+\int\limits_0^{0,5}\left(\left(\lambda_{11}+\int\limits_0^t\lambda_{12}d\tau\right)(\cos 2t-1)+\frac{1}{2}\left(\lambda_{11}+\int\limits_0^t\lambda_{12}d\tau\right)^3+f(t)\right)dt-\lambda_{22}=0.$$

Запишем эту систему в виде

$$Q_2(\Delta^{0,5};\lambda)=0, \qquad \lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in R^4. \tag{5.23}$$

Выбирая $\lambda^{(0,0)}\in R^4$ как начальную итерацию и решая систему (5.23) методом Ньютона, находим $\lambda^{(0)}=(-0,2875;\ 3,1203;-0,2961;\ -3,118)$.

Далее выбираем $\lambda^{(0)}$ как начальное приближение к решению системы нелинейных алгебраических уравнений $Q_*(\Delta^{0,5};\lambda)=0,\quad \lambda\in R^4$, и решаем краевую задачу (5.17), (5.18) с помощью алгоритма, предложенного в пункте 4.

Задачи Коши для нелинейных ОДУ на подынтервалах имеют вид

$$\frac{du_r}{dt}=F(t,u_r+\lambda_r),\quad u_r\big[0,5(r-1)\big]=0,\qquad t\in\big[0,5(r-1),\ 0,5r\big],\quad r=\overline{1,2}. \tag{5.24}$$

Значение $Q_*(\Delta^{0,5};\lambda)$ для заданного $\widehat{\lambda}=(\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)\in R^4$ определяется равенством

$$Q_*(\Delta^{0,5};\lambda)=\begin{pmatrix}\widehat{\lambda}_1-\widehat{\lambda}_2-u_2(1,\widehat{\lambda}_2)\\ \widehat{\lambda}_1+u_1(0,5;\ \widehat{\lambda}_1)-\widehat{\lambda}_2\end{pmatrix},$$

где $u_r(t,\widehat{\lambda}_r)$ — решение задачи Коши (5.24) для $\lambda_r=\widehat{\lambda}_r,\ r=\overline{1,2}$.

(2×2)-Матрица $\widehat{A}(t)$ имеет вид

$$\widehat{A}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1+\cos 2t+\dfrac{3}{2}[\widehat{x}_1(t)]^2 & 0\end{pmatrix}.$$

Здесь $\widehat{x}_1(t)$ — первая координата вектор-функции $\widehat{x}(t)$, определяемая равенствами

$$\widehat{x}(t)=\widehat{\lambda}_r+u_r(t,\widehat{\lambda}_r),\quad t\in\big[0,5(r-1),0,5r\big),\quad r=\overline{1,2},$$

и

$$\widehat{x}(1)=\widehat{\lambda}_2+\lim_{t\to 1-0}u_2(t,\widehat{\lambda}_2).$$

Матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_*(\Delta^{0,5};\lambda)}{\partial\lambda}:R^4\to R^4$ дается формулой

$$\begin{pmatrix}I & -I-\widehat{a}_2(\widehat{A},1)\\ I+\widehat{a}_1(\widehat{A};\ 0,5) & -I\end{pmatrix}.$$

В этой формуле (2×2)-матрицы $\widehat{a}_r(\widehat{A};\ 0,5r)$ определяются решениями задач Коши для линейных матричных ОДУ на подынтервалах

$$\frac{dz}{dt} = \widehat{A}(t)z + \widehat{A}(t), \qquad z\big[0,5(r-1)\big] = 0, \qquad t \in \big[0,5(r-1), 0,5r\big], \qquad r = \overline{1,2}. \quad (5.25)$$

Задачи Коши (5.24) и (5.25) решаются методом Рунге – Кутта четвертого порядка с шагом $h = 0,005$. Чтобы определить решения задачи Коши на всем интервале $[0,1]$, мы используем кубическую сплайн-аппроксимацию.

Представим результаты первых четырех шагов алгоритма:

$$\lambda^{(1)} = (0,0997;\ 3,1454;\ 0,099;\ -3,1518),$$

$$\lambda^{(2)} = (-0,0035;\ 3,1433;\ -0,0034;\ -3,1431),$$

$$\lambda^{(3)} = (3,4005 \cdot 10^{-6};\ 3,141592;\ 3.381 \cdot 10^{-6};\ -3,1592),$$

$$\lambda^{(4)} = (-1,565 \cdot 10^{-10};\ 3,14159265;\ -7,8773 \cdot 10^{-11};\ -3,14159265).$$

Решением задачи (5.17), (5.18) является вектор-функция $x^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t))$ с координатами $x_1^*(t) = 0,5\ \sin(2\pi t)$ и $x_2^*(t) = \pi\ \cos(2\pi t)$. Таким образом, значения решения в точках $t_0 = 0$ и $t_1 = 0,5$ дает вектор $\lambda^* = (0, \pi, 0, -\pi)$.

Поскольку $\|\lambda^* - \lambda^{(0)}\| < 0,3$, $\|\lambda^* - \lambda^{(1)}\| < 0,1$, $\|\lambda^* - \lambda^{(2)}\| < 0,004$, $\|\lambda^* - \lambda^{(3)}\| < 10^{-5}$ и $\|\lambda^* - \lambda^{(4)}\| < 10^{-9}$, то справедливы следующие утверждения:

a) начальное приближение $\lambda^{(0)}$ отличается от λ^* менее чем на $0,3$,

b) основной алгоритм сходится к λ^* квадратично.

Поскольку λ_1 и λ_2 являются значениями решения задачи (5.17), (5.18) в точках $t_0 = 0$ и $t_1 = 0,5$ соответственно, то вектор $\lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)})$, $k = \overline{1,4}$, дает приближенные значения решения в начальных точках подынтервалов $[0;\ 0,5)$ и $[0,5;\ 1]$. Приближенные значения решения в остальных точках интервала $[0,1]$ находим, решая задачи Коши на этих подынтервалах.

6. Заключение. Основная идея предлагаемого метода заключается в построении и решении систем алгебраических уравнений относительно произвольных параметров новых общих решений. Для линейной краевой задачи эта система будет линейной. Решение нелинейной краевой задачи приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений. Задачи Коши для ОДУ на подынтервалах являются основным инструментом построения этих систем. Численные результаты, полученные в вычислительном эксперименте, показывают, что предлагаемый метод решения нелинейной краевой задачи имеет квадратичную сходимость, если начальное приближение достаточно близко к решению. Алгоритм определения хорошего начального приближения предложен в пункте 5.

Литература

1. *Aziz A.* Numerical solutions for ordinary differential equations. – New York: Acad. Press, 1975.
2. *Ascher U. M., Mattheij R. M., Russel R. D.* Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations // SIAM Classics Appl. Math. – 1995. – **13**.
3. *Babenko K. I.* Fundamentals of numerical analysis. – Moscow: Nauka, 1986.
4. *Bakhvalov N. S.* Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations. – Moscow: Mir, 1977.
5. *Bellman R., Kalaba R.* Quasilinearization and nonlinear boundary value problems. – New York: Amer. Elsevier, 1965.

6. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Berlin: De Gruyter, 2016.
7. *Brugnano L., Trigiante D.* Solving differential problems by multistep initial and boundary value methods. – Amsterdam: Gordon and Breach, 1998.
8. *Butcher J. C.* The numerical analysis of ordinary differential equations. – New York: Wiley, 1987.
9. *Deuflhard P.* Newton methods for nonlinear problems. – Springer, 2004.
10. *Dzhumabayev D. S.* Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // USSR Comput. Math. and Math. Phys. – 1989. – **29**. – P. 34 – 46.
11. *Dzhumabaev D. S.* New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems // J. Comput. and Appl. Math. – 2018. – **327**. – P. 79 – 108.
12. *Dzhumabaev D. S.* Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations // Math. Methods Appl. Sci. – 2018. – **41**. – P. 1439 – 1462.
13. *Dzhumabaev D. S.* Well-posedness of nonlocal boundary-value problem for a system of loaded hyperbolic equations and an algorithm for finding its solution // J. Math. Anal. and Appl. – 2018. – **461**. – P. 817 – 836.
14. *Dzhumabaev D. S., Temesheva S. M.* A parametrization method for solving nonlinear two-point boundary value problems // Comput. Math. and Math. Phys. – 2007. – **47**. – P. 37 – 61.
15. *Dzhumabaev D. S., Temesheva S. M.* Criteria for the existence of an isolated solution of a nonlinear boundary-value problem // Ukr. Math. J. – 2018. – **70**, № 4. – P. 410 – 421.
16. *Dzhumabaev D. S.* On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations // J. Comput. and Appl. Math. – 2016. – **294**. – P. 342 – 357.
17. *Dzhumabaev D. S.* Necessary and sufficient conditions for the solvability of linear boundary-value problems for the Fredholm integrodifferential equations // Ukr. Math. J. – 2015. – **66**, № 9. – P. 1200 – 1219.
18. *Dzhumabaev D. S.* Solvability of a linear boundary value problem for a Fredholm integro-differential equation with impulsive inputs // Different. Equat. – 2015. – **51**. – P. 1180 – 1196.
19. *Keller H. B.* Numerical methods for two-point poundary value problems. – New York: Dover, 1992.
20. *Kelley C. T.* Solving nonlinear equations with Newton's method. – Philadelphia: SIAM Publ., 2003.
21. *Lakshmikantham V., Vatsala A. S.* Generalized quasilinearization for nonlinear problems. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998.
22. *Lampert J. D.* Computational methods in ordinary differential equations. – New York: Wiley, 1973.
23. *Hall G., Watt J. M. (Eds.)* Modern numerical methods for ordinary differential equations. – Oxford: Clarendon, 1976.
24. *Ntouyas S. K.* Nonlocal initial and boundary value problems: a survey // Handb. Different. Equat. – 2005. – **2**. – P. 461 – 557.
25. *Ortega J. M., Rheinboldt W. C.* Iterative solution of nonlinear equations in several variables. – New York; London: Acad. Press, 1970.
26. *Pokutnyi O. O.* Approximation of generalized bounded solutions of evolution equations with unbounded operator // Nonlinear Oscillations. – 2011. – **14**. – P. 95 – 101.
27. *Roberts S. M., Shipman J. S.* Two-point boundary-value problems: shooting methods. – New York: Elsevier, 1972.
28. *Ronto M., Samoilenko A. M.* Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems. – New York: World Sci., River Edge, 2000.
29. *Ronto A., Ronto M.* Successive approximation techniques in non-linear boundary value problems for ordinary differential equations // Handbook Different. Equat.: Ordinary Different. Equat. – 2008. – **4**. – P. 441 – 592.
30. *Shampine L. F.* Numerical solution of ordinary differential equations. – New York: Chapman & Hall, 1994.
31. *Stoer J., Bulirsch D.* Introduction to numerical analysis. – 3rd ed. – New York: Springer, 2002.

Получено 24.09.18