УДК 517.5

Е. А. Севостьянов, С. А. Скворцов (Житомир. гос. ун-т им. И. Франко)

О РАВНОСТЕПЕННОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ СЕМЕЙСТВ ОТОБРАЖЕНИЙ В СЛУЧАЕ ПЕРЕМЕННЫХ ОБЛАСТЕЙ

We study the problem of local behavior of maps in the closure of a domain in the Euclidean space. The equicontinuity of families of these mappings is established in the case where the mapped domain is not fixed. We separately consider the domains with bad and good boundaries, as well as the homeomorphisms and maps with branching.

Досліджено питання про локальну поведінку відображень у замиканні області евклідового простору. Отримано результати про одностайну неперервність сімей таких відображень у випадку, коли відображена область не є фіксованою. Окремо розглянуто області з поганими і гарними межами, а також гомеоморфізми і відображення з розгалуженням.

1. Введение. Основные определения и обозначения, используемые в статье, взяты из [1–4].

Недавно первый автор опубликовал результаты о поведении одного класса отображений в замыкании области. „Замыкание” понималось в смысле так называемых простых концов, при этом изучались как гомеоморфизмы, так и отображения с ветвлением (см., например, [5]). Основная цель статьи — распространить эти результаты на случай, когда отображенные области могут меняться. Отметим, что в [5] изучались отображения двух фиксированных областей, при этом рассматривались классы Орлича – Соболева и отображения с неравенством Полецкого. Мы продолжаем исследования в этом направлении. Отдельно будут рассмотрены случаи однолистных и неоднолистных отображений, а также случай областей, являющихся локально связными на границе и не имеющих указанных свойств. В частности, случай простых концов относится к последней из упомянутых ситуаций. (По этому поводу см. также классические результаты Р. Някки и Б. Палка для квазиконформных отображений [6].) Теория простых концов, а также граничное поведение квазиконформных отображений в их терминах развиты Р. Някки [7]. В случае отображений с неограниченной характеристикой этот подход был использован в работах В. Я. Гутлянского, В. И. Рязанова, Д. А. Ковтонюка и Э. Якубова (см. [3, 4]).

Здесь и далее

$$A(x_0, r_1, r_2) := \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}\,, \qquad (1)$$

а $M_p(\Gamma)$ обозначает p-модуль семейства кривых Γ. Пусть $p \geq 1$ и $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, равная нулю вне D. Введем в рассмотрение следующее понятие (см. [1], разд. 7.6). Будем говорить, что $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — *кольцевое Q-отображение в точке* $x_0 \in \overline{D}$, $x_0 \neq \infty$, *относительно p-модуля*, если для некоторого $r_0 = r(x_0) > 0$, произвольных $0 < r_1 < r_2 < r_0$ и континуумов $E_1 \subset \overline{B(x_0, r_1)} \cap D$, $E_2 \subset \left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(x_0, r_2)\right) \cap D$ отображение f удовлетворяет соотношению

$$M_p\big(f(\Gamma(E_1, E_2, D))\big) \leq \int\limits_A Q(x)\eta^p(|x - x_0|)\, dm(x) \qquad (2)$$

для произвольной измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, удовлетворяющей неравенству

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geq 1. \tag{3}$$

Аналогично, условимся говорить, что отображение $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является кольцевым Q-отображением в $\overline{D} \setminus \{\infty\}$ относительно p-модуля, если условие (2) выполнено в каждой точке $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$. В точке $x_0 = \infty$ данное определение может быть сформулировано с помощью инверсии: $\varphi(x) = \dfrac{x}{|x|^2}$, $\infty \mapsto 0$. В дальнейшем $h(x, y)$ обозначает хордальное расстояние между точками $x, y \in \overline{\mathbb{R}^n}$, а $h(E)$ — хордальный диаметр множества $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ (см. [1], гл. 1).

Пусть I — фиксированный набор индексов и D_i, $i \in I$, — некоторая последовательность областей. Следуя [6] (разд. 2.4), будем говорить, что семейство областей $\{D_i\}_{i\in I}$ является *равностепенно равномерным относительно p-модуля*, если для каждого $r > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что неравенство

$$M_p\bigl(\Gamma(F^*, F, D_i)\bigr) \geq \delta \tag{4}$$

выполнено для всех $i \in I$ и континуумов $F, F^* \subset D$ таких, что $h(F) \geq r$ и $h(F^*) \geq r$.

***Замечание* 1.** В работе [6] рассматривался частный случай $p = n$, а неравенство (4) здесь выполняется не только для континуумов F и F^*, но и для произвольных связных множеств. Указанное обстоятельство (несущественно) отличает приведенное выше определение от аналогичного определения Р. Някки и Б. Палка [6].

Покажем, что для фиксированной области D_i соотношение (4) влечет так называемую сильную достижимость ее границы относительно p-модуля (см. также [8], теорема 6.2). Зафиксируем для этого $i \in I$, точку $x_0 \in \partial D_i$ и некоторую ее окрестность U. Можно считать, что $x_0 \neq \infty$. Пусть $\varepsilon_1 > 0$ таково, что $V := B(x_0, \varepsilon_1)$ и $\overline{V} \subset U$. Предположим, что $\partial U \neq \varnothing$ и $\partial V \neq \varnothing$, тогда положим $\varepsilon_2 := \operatorname{dist}(\partial U, \partial V) > 0$. Пусть континуумы F и G в области D_i таковы, что $F \cap \partial U \neq \varnothing \neq F \cap \partial V$ и $G \cap \partial U \neq \varnothing \neq G \cap \partial V$. Из последних соотношений следует, что $h(F) \geq \varepsilon_2$ и $h(G) \geq \varepsilon_2$. Тогда согласно условию равностепенной равномерности областей D_i относительно p-модуля найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon_2) > 0$, что $M_p(\Gamma(F, G, D_i)) \geq \delta > 0$ для континуумов F и G, указанных выше. В частности, *для произвольной окрестности U точки x_0 нашлись окрестность V этой же точки, компакт F в D_i и число $\delta > 0$ такие, что $M_p(\Gamma(F, G, D_i)) \geq \delta > 0$ для произвольного континуума $G \subset D_i$ такого, что* $G \cap \partial U \neq \varnothing \neq G \cap \partial V$. Это свойство и называется в дальнейшем сильной достижимостью ∂D_i в точке x_0 относительно p-модуля, и оно установлено для любой области D_i, являющейся элементом некоторого равностепенно равномерного семейства $\{D_i\}_{i\in I}$.

Теперь введем в рассмотрение два класса отображений, поведение которых мы будем исследовать. Для $p \geq 1$, заданного числа $\delta > 0$, фиксированной области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, континуума $A \subset D$ и заданной функции $Q\colon D \to [0, \infty]$ обозначим через $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$ семейство всех кольцевых Q-гомеоморфизмов $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в $\overline{D}$ относительно p-модуля, удовлетворяющих условиям $h(f(A)) \geq \delta$ и $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \geq \delta$. Полагаем

$$q_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{|x - x_0| = r} Q(x)\, dS,$$

где dS — элемент площади поверхности S, и

$$q_b'(r) := \frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}} \int\limits_{|x-b|=r} Q'(x)\, dS, \quad Q'(x) = \max\{Q(x), 1\}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что $p \in (n-1, n]$, область D локально связна в каждой точке $x_0 \in \partial D$ и области $D_f' = f(D)$ являются равностепенно равномерными относительно p-модуля по всем $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$. Если функция Q имеет конечное среднее колебание в $\overline{D}$ либо в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$ при некотором $\beta(x_0) > 0$ выполнено условие*

$$\int\limits_0^{\beta(x_0)} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}'^{\frac{1}{p-1}}(t)} = \infty, \tag{5}$$

то каждое из отображений $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$ имеет непрерывное продолжение в $\overline{D}$ и семейство $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(\overline{D})$, состоящее из продолженных отображений $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, является равностепенно непрерывным в $\overline{D}$.

В случае отображений с ветвлением теорема 1 допускает некоторое обобщение, в связи с чем напомним следующее определение. Отображение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ области $D \subset \mathbb{R}^n$ на область $D' \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ назовем *замкнутым*, если $C(f, \partial D) \subset \partial D'$, где, как обычно, $C(f, \partial D)$ — предельное множество отображения f на ∂D. Для $p \geq 1$, фиксированной области $D \subset \mathbb{R}^n$, множества $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ и числа $\delta > 0$ обозначим через $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$ семейство всех открытых дискретных замкнутых кольцевых Q-отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$ относительно p-модуля в $\overline{D}$ со следующим условием: для любой области $D_f' := f(D)$ найдется континуум $K_f \subset D_f'$ такой, что $h(K_f) \geq \delta$ и $h(f^{-1}(K_f), \partial D) \geq \delta > 0$.

Теорема 2. *Предположим, что $p \in (n-1, n]$, область D локально связна в каждой точке $x_0 \in \partial D$ и, кроме того, области $D_f' = f(D)$ являются равностепенно равномерными относительно p-модуля по всем $f \in \mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$. Пусть при $p = n$ множество E имеет положительную емкость, а при $n - 1 < p < n$ является произвольным замкнутым множеством. Если функция Q имеет конечное среднее колебание в $\overline{D}$ либо в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$ при некотором $\beta(x_0) > 0$ выполнено условие* (5), *то каждое из отображений $f \in \mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$ имеет непрерывное продолжение в $\overline{D}$ и семейство $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(\overline{D})$, состоящее из продолженных отображений $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, является равностепенно непрерывным в $\overline{D}$.*

Теоремы 1 и 2 относятся к случаю локально связных границ, когда граничное продолжение отображений и равностепенную непрерывность их семейств необходимо понимать в обычном, „поточечном”, смысле. Случай более сложных границ соответствует ситуации так называемых простых концов (определение и соответствующую терминологию см. в работе [3]). Будем говорить, что граница области D в $\mathbb{R}^n$ является *локально квазиконформной*, если каждая точка $x_0 \in \partial D$ имеет окрестность U, которая может быть отображена квазиконформным отображением φ на единичный шар $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ так, что $\varphi(\partial D \cap U)$ является пересечением $\mathbb{B}^n$ с координатной гиперплоскостью. Говорим, что ограниченная область D в $\mathbb{R}^n$ *регулярна*, если D может быть квазиконформно отображена на область с локально квазиконформной границей. Если $\overline{D}_P$ является пополнением регулярной области D ее простыми концами, а g_0 — квазиконформным отображением области D_0 с локально квазиконформной границей на D, то оно естественным образом определяет в $\overline{D}_P$ некоторую топологию (см. [3]). Соответствующее топологическое пространство метризуемо (см. там же).

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 3. *Предположим, что* $p \in (n-1, n]$, *область* D *регулярна и области* $D'_f = f(D)$ *являются ограниченными равностепенно равномерными относительно* p*-модуля по* $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$ *областями с локально квазиконформной границей. Если функция* Q *имеет конечное среднее колебание в* $\overline{D}$ *либо в каждой точке* $x_0 \in \overline{D}$ *при некотором* $\beta(x_0) > 0$ *выполнено условие* (5), *то каждое из отображений* $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$ *имеет непрерывное продолжение* $\overline{f}\colon \overline{D}_P \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *в* $\overline{D}_P$ *и семейство* $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(\overline{D})$, *состоящее из всех таким образом продолженных отображений* $\overline{f}\colon \overline{D}_P \to \overline{\mathbb{R}^n}$, *является равностепенно непрерывным в* $\overline{D}_P$.

Теорема 4. *Предположим, что* $p \in (n-1, n]$, *область* D *регулярна и области* $D'_f = f(D)$ *являются ограниченными равностепенно равномерными относительно* p*-модуля по* $f \in \mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$ *областями с локально квазиконформной границей. Пусть при* $p = n$ *множество* E *имеет положительную емкость, а при* $n - 1 < p < n$ *является произвольным замкнутым множеством. Если функция* Q *имеет конечное среднее колебание в* $\overline{D}$ *либо в каждой точке* $x_0 \in \overline{D}$ *при некотором* $\beta(x_0) > 0$ *выполнено условие* (5), *то каждое из отображений* $f \in \mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$ *имеет непрерывное продолжение в* $\overline{D}_P$ *и семейство* $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(\overline{D})$, *состоящее из всех таким образом продолженных отображений* $\overline{f}\colon \overline{D}_P \to \overline{\mathbb{R}^n}$, *является равностепенно непрерывным в* $\overline{D}_P$.

***Замечание* 2.** В теоремах 3 и 4 равностепенную непрерывность следует понимать в терминах семейств отображений между метрическими пространствами (X, d) и (X', d'), где $X = \overline{D}_P$, d — одна из возможных метрик, соответствующих топологическому пространству $\overline{D}_P$, $X' = \overline{\mathbb{R}^n}$ и d' — хордальная (сферическая) метрика.

2. Формулировки и доказательства основных лемм. Основным инструментом при доказательстве теорем 1 и 2 являются следующие два утверждения.

Лемма 1. *Предположим, что область* D *локально связна в каждой точке* $x_0 \in \partial D$ *и области* $D'_f = f(D)$ *являются равностепенно равномерными относительно* p*-модуля по всем* $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$. *Предположим также, что для каждой точки* $x_0 \in \overline{D}$ *найдутся* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0) > 0$ *и измеримая по Лебегу функция* $\psi\colon (0, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$ *такие, что*

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \qquad I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{6}$$

и, кроме того, при $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} Q(x) \psi^p(|x - x_0|)\, dm(x) = o(I^p(\varepsilon, \varepsilon_0)), \tag{7}$$

где, как обычно, сферическое кольцо $A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$ *определено, как в* (1). *Тогда каждое из отображений* $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$ *имеет непрерывное продолжение в* $\overline{D}$ *и семейство* $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(\overline{D})$, *состоящее из всех таким образом продолженных отображений* $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, *является равностепенно непрерывным в* $\overline{D}$.

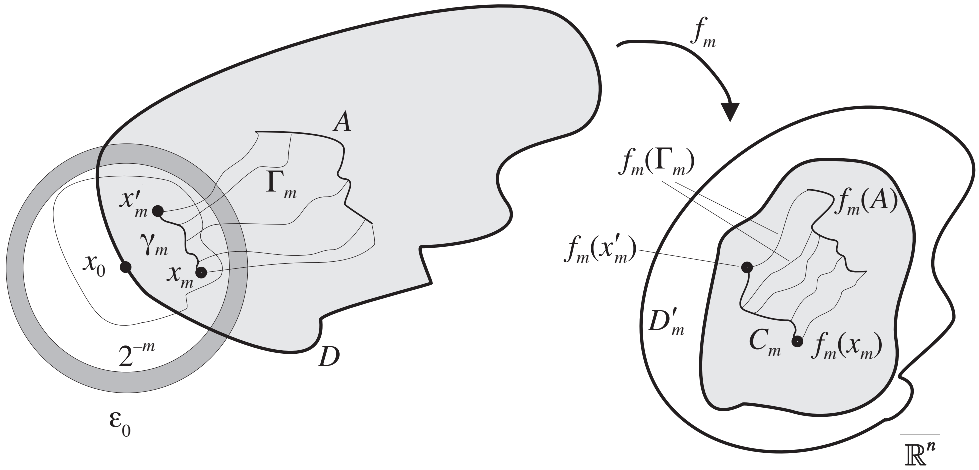

Рис. 1

Доказательство. Равностепенная непрерывность $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(\overline{D})$ внутри области D следует из леммы 3.2.2 [2] в случае $p = n$ и леммы 2.4 [9] при $n-1 < p < n$. Возможность продолжения каждого элемента $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$ до непрерывного отображения в замыкании D следует из леммы 1 [10] при $p = n$ и с учетом замечания 1 (доказательство этого факта в случае $n-1 < p < n$ проводится аналогично).

Осталось показать, что семейство $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(\overline{D})$ равностепенно непрерывно в точках ∂D. Предположим противное, тогда найдутся $x_0 \in \partial D$ и число $a > 0$ со следующим свойством: для каждого $m = 1, 2, \ldots$ существуют точка $x_m \in \overline{D}$ и элемент f_m семейства $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(\overline{D})$ такие, что $|x_0 - x_m| < 1/m$ и $h(f_m(x_m), f_m(x_0)) \geq a$. Поскольку f_m имеет непрерывное продолжение в точку x_0, мы можем найти такую последовательность $x'_m \in D$, $x'_m \to x_0$ при $m \to \infty$, что $h\big(f_m(x'_m), f_m(x_0)\big) \leq 1/m$. Таким образом,

$$h\big(f_m(x_m), f_m(x'_m)\big) \geq a/2 \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Можно считать, что $x_0 \neq \infty$. Ввиду возможности непрерывного продолжения каждого f_m на границу D можем считать, что $x_m \in D$.

В силу локальной связности области D в точке x_0 найдется последовательность окрестностей V_m точки x_0 с $h(V_m) \to 0$ при $m \to \infty$ такая, что множества $D \cap V_m$ являются областями и $D \cap V_m \subset B(x_0, 2^{-m})$. Не ограничивая общности рассуждений, переходя к подпоследовательности, если это необходимо, можем считать, что $x_m, x'_m \in D \cap V_m$. Соединим точки x_m и x'_m кривой $\gamma_m \colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ так, что $\gamma_m(0) = x_m$, $\gamma_m(1) = x'_m$ и $\gamma_m(t) \in V_m$ при $t \in (0,1)$ (см. рис. 1). Обозначим через C_m образ кривой $\gamma_m(t)$ при отображении f_m. Из соотношения (8) следует, что

$$h(C_m) \geq a/2 \quad \forall m \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

где h обозначает хордальный диаметр множества.

Не ограничивая общности рассуждений можно считать, что континуум A из определения класса $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$ лежит вне шаров $B(x_0, 2^{-m})$, $m = 1, 2, \ldots,$ и $B(x_0, \varepsilon_0) \cap A = \varnothing$. Пусть Γ_m — семейство кривых, соединяющих γ_m и A в D. Из определения кольцевого Q-отображения относительно p-модуля в точке x_0 следует, что

$$M_p(f_m(\Gamma_m)) \leq \int\limits_{A(x_0, \frac{1}{2^m}, \varepsilon_0)} Q(x)\eta^p(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{10}$$

для каждой измеримой функции $\eta\colon \left(\frac{1}{2^m}, \varepsilon_0\right) \to [0, \infty]$ такой, что $\int_{\frac{1}{2^m}}^{\varepsilon_0} \eta(r)\, dr \geq 1$. Заметим, что функция

$$\eta(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(2^{-m}, \varepsilon_0), & t \in (2^{-m}, \varepsilon_0), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (2^{-m}, \varepsilon_0), \end{cases}$$

где $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt$, удовлетворяет условию нормировки вида (3) при $r_1 := 2^{-m}$, $r_2 := \varepsilon_0$, поэтому из условий (7) и (10) следует, что

$$M_p(f_m(\Gamma_m)) \leq \alpha(2^{-m}) \to 0 \tag{11}$$

при $m \to \infty$, где $\alpha(\varepsilon)$ — некоторая неотрицательная функция, стремящаяся к нулю при $\varepsilon \to 0$, которая существует в силу условия (7).

С другой стороны, заметим, что $f_m(\Gamma_m) = \Gamma(C_m, f_m(A), D'_m)$. По условию леммы $h(f_m(A)) \geq \delta$ при всех $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, в силу (9) $h(f_m(A)) \geq \delta_1$ и $h(C_m) \geq \delta_1$, где $\delta_1 := \min\{\delta, a/2\}$. Воспользовавшись тем, что области $D'_m := f_m(D)$ являются равностепенно равномерными относительно p-модуля, заключаем, что существует такое $\sigma > 0$, что

$$M_p(f_m(\Gamma_m)) = M_p\big(\Gamma(C_m, f_m(A), D'_m)\big) \geq \sigma \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

а это противоречит условию (11). Полученное противоречие свидетельствует о том, что предположение об отсутствии равностепенной непрерывности семейства $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(\overline{D})$ было ошибочным.

Лемма 1 доказана.

В случае отображений с ветвлением лемма 1 принимает следующий вид.

Лемма 2. *Предположим, что* $p \in (n-1, n]$, *область* D *локально связна в каждой точке* $x_0 \in \partial D$ *и области* $D'_f = f(D)$ *являются равностепенно равномерными относительно* p*-модуля по всем* $f \in \mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$. *Пусть при* $p = n$ *множество* E *имеет положительную емкость, а при* $n-1 < p < n$ *является произвольным замкнутым множеством. Предположим также, что для каждой точки* $x_0 \in \overline{D}$ *найдутся* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0) > 0$ *и измеримая по Лебегу функция* $\psi\colon (0, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$ *со следующим свойством: для любого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *выполнено условие* (6) *и, кроме того, при* $\varepsilon \to 0$ *выполнено условие* (7). *Тогда каждое из отображений* $f \in \mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$ *имеет непрерывное продолжение в* $\overline{D}$ *и семейство* $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(\overline{D})$, *состоящее из продолженных отображений* $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, *является равностепенно непрерывным в* $\overline{D}$.

Доказательство. Равностепенная непрерывность внутри области D следует из леммы 3.6.1 [2] в случае $p = n$ и леммы 2.4 [9] при $n-1 < p < n$, а возможность продолжения каждого элемента f семейства отображений $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$ до непрерывного отображения в замыкании D — из леммы 1 [10] при $p = n$ (здесь необходимо учесть замечание 1; доказательство этого факта в случае $n-1 < p < n$ проводится аналогично).

Осталось показать, что семейство $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(\overline{D})$ равностепенно непрерывно в точках ∂D. Предположим противное, тогда найдутся $x_0 \in \partial D$ и число $a > 0$ со следующим свойством: для каждого $m = 1, 2, \ldots$ существуют точка $x_m \in \overline{D}$ и элемент f_m семейства $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(\overline{D})$ такие,

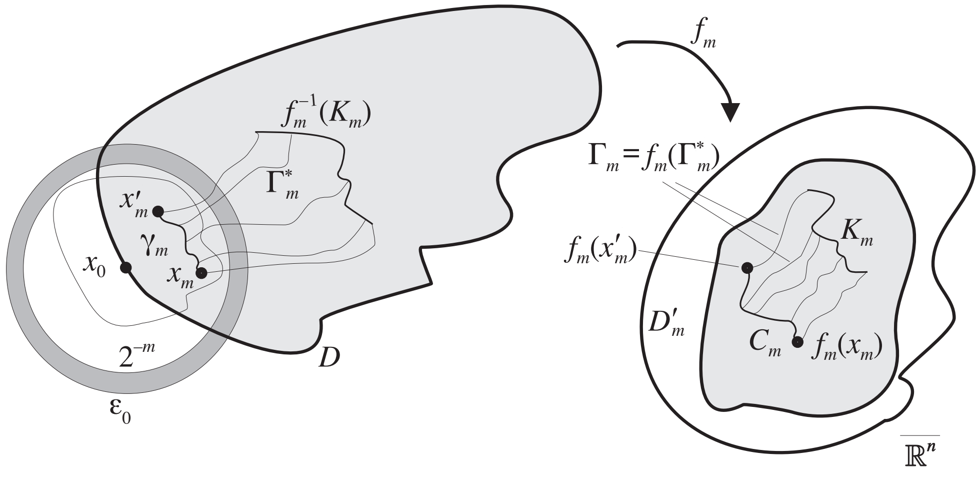

Рис. 2

что $|x_0 - x_m| < 1/m$ и выполнено условие (8). Можно считать, что $x_0 \neq \infty$. Ввиду возможности непрерывного продолжения каждого f_m на границу D можем считать, что $x_m \in D$. Более того, в силу того, что f_m продолжается по непрерывности в точку x_0, найдется последовательность $x'_m \in D$, сходящаяся к точке x_0 при $m \to \infty$, такая, что при некотором $a > 0$ выполнены неравенства в (8).

В силу локальной связности области D в точке x_0 найдется последовательность окрестностей V_m точки x_0 с $h(V_m) \to 0$ при $m \to \infty$ такая, что множества $D \cap V_m$ являются областями и $D \cap V_m \subset B(x_0, 2^{-m})$. Не ограничивая общности рассуждений, переходя к подпоследовательности, если это необходимо, можем считать, что $x_m, x'_m \in D \cap V_m$. Соединим точки x_m и x'_m кривой $\gamma_m : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ так, что $\gamma_m(0) = x_m$, $\gamma_m(1) = x'_m$ и $\gamma_m(t) \in V_m \cap D$ при $t \in (0, 1)$ (см. рис. 2). Обозначим через C_m образ кривой γ_m при отображении f_m. Из соотношения (8) следует, что выполнено условие вида (9), где h обозначает хордальный диаметр множества.

По определению семейства отображений $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$ для любого $f_m \in \mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$ и любой области $D'_m := f_m(D)$ найдется континуум $K_m \subset D'_m$ такой, что $h(K_m) \geq \delta$ и $h(f_m^{-1}(K_m), \partial D) \geq \delta > 0$. Поскольку по условию леммы области D'_m являются равностепенно равномерными относительно p-модуля, в силу изложенного, учитывая условие (9), получаем, что при всех $m = 1, 2, \ldots$ и некотором $b > 0$ выполняется неравенство

$$M_p\big(\Gamma(K_m, C_m, D'_m)\big) \geq b. \tag{12}$$

Рассмотрим семейство Γ_m, состоящее из всех кривых $\beta\colon [0, 1) \to D'_m$, где $\beta(0) \in C_m$ и $\beta(t) \to p \in K_m$ при $t \to 1$. Пусть Γ_m^* — семейство всех полных поднятий $\alpha\colon [0, 1) \to D$ семейства Γ_m при отображении f_m с началом на γ_m. Такое семейство корректно определено в силу теоремы 3.7 [11]. Вследствие замкнутости отображения f_m имеем $\alpha(t) \to f_m^{-1}(K_m)$, где $f_m^{-1}(K_m)$ — полный прообраз континуума K_m при отображении f_m.

Заметим, что вследствие компактности пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$ при каждом фиксированном $\delta > 0$ множество $C_\delta := \{x \in D\colon h(x, \partial D) \geq \delta\}$ является компактом в D и $f_m^{-1}(K_m) \subset C_\delta$. Согласно лемме 1 [12], множество C_δ можно вложить в континуум E_δ, лежащий в области D, при этом можно считать, что $\operatorname{dist}(x_0, E_\delta) \geq \varepsilon_0$ за счет уменьшения ε_0, если это необходимо. Тогда на основании (2)

$$M_p\big(f_m(\Gamma^*_m)\big) \le M_p\big(f_m(\Gamma(|\gamma_m|, E_\delta, D))\big) \le \int\limits_{A(x_0,\frac{1}{2^m},\varepsilon_0)} Q(x)\eta^p(|x-x_0|)\,dm(x) \qquad (13)$$

для каждой измеримой функции $\eta\colon \left(\dfrac{1}{2^m}, \varepsilon_0\right) \to [0,\infty]$ такой, что $\displaystyle\int_{\frac{1}{2^m}}^{\varepsilon_0} \eta(r)\,dr \ge 1$. Заметим, что функция

$$\eta(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(2^{-m}, \varepsilon_0), & t \in (2^{-m}, \varepsilon_0), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (2^{-m}, \varepsilon_0), \end{cases}$$

где $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \displaystyle\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt$, удовлетворяет условию нормировки вида (3) при $r_1 := 2^{-m}$, $r_2 := \varepsilon_0$, поэтому из условий (7) и (13) следует, что

$$M_p\big(f_m(\Gamma^*_m)\big) \le \alpha(2^{-m}) \to 0 \qquad (14)$$

при $m \to \infty$, где $\alpha(\varepsilon)$ — некоторая неотрицательная функция, стремящаяся к нулю при $\varepsilon \to 0$, которая существует в силу условия (7). Кроме того, заметим, что $f_m(\Gamma^*_m) = \Gamma_m$ и $M_p(\Gamma_m) = M_p\big(\Gamma(K_m, C_m, D'_m)\big)$, так что

$$M_p\big(f_m(\Gamma^*_m)\big) = M_p\big(\Gamma(K_m, C_m, D'_m)\big). \qquad (15)$$

Однако соотношения (14) и (15) в совокупности противоречат (12). Полученное противоречие свидетельствует о том, что исходное предположение (8) было ошибочным, и, значит, семейство отображений $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(\overline{D})$ равностепенно непрерывно в каждой точке $x_0 \in \partial D$.

Лемма 2 доказана.

Приведем также доказательства утверждений, аналогичных леммам 1 и 2, для случая, когда область D не является локально связной на своей границе.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Предположим, что $p \in (n-1, n]$, область D регулярна и области $D'_f = f(D)$ являются ограниченными равностепенно равномерными относительно p-модуля по $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$ областями с локально квазиконформной границей. Предположим также, что для каждой точки $x_0 \in \overline{D}$ найдутся $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0) > 0$ и измеримая по Лебегу функция $\psi\colon (0, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$ со следующим свойством: для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ выполнено условие* (6) *и, кроме того, при $\varepsilon \to 0$ выполнено условие* (7)*. Тогда каждое из отображений $f \in \mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$ имеет непрерывное продолжение $\overline{f}\colon \overline{D}_P \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в $\overline{D}_P$ и семейство $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(\overline{D})$, состоящее из всех таким образом продолженных отображений $\overline{f}\colon \overline{D}_P \to \overline{\mathbb{R}^n}$, является равностепенно непрерывным в $\overline{D}_P$.*

Доказательство. Равностепенная непрерывность внутри области D следует из леммы 3.2.2 [2] в случае $p = n$ и леммы 2.4 [9] при $n - 1 < p < n$, а возможность продолжения каждого элемента f семейства отображений $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$ до непрерывного отображения в замыкании D — из леммы 3 [5]. В частности, из замечания 1 следует сильная достижимость границы области в образе при отображении.

Покажем равностепенную непрерывность семейства $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(\overline{D})$ в точках E_D, где E_D обозначает пространство простых концов, соответствующих области D. Предположим противное, а именно, что семейство $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(\overline{D})$ не является равностепенно непрерывным в некоторой точке $P_0 \in E_D$. Тогда найдутся число $a > 0$, последовательность $P_k \in \overline{D}_P$, $k = 1, 2, \ldots$, и

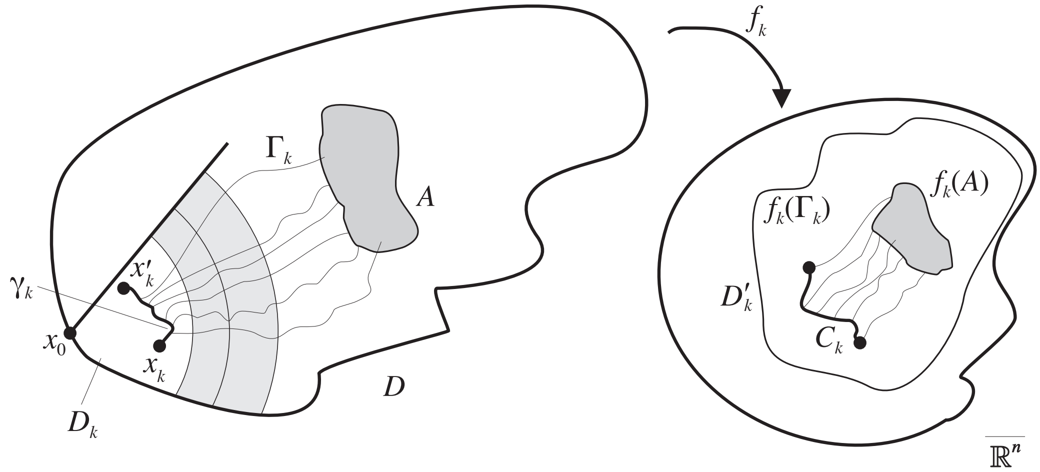

Рис. 3

элементы $f_k \in \mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$ такие, что $d(P_k, P_0) < 1/k$ и

$$h\big(f_k(P_k), f_k(P_0)\big) \geq a, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{16}$$

Ввиду возможности непрерывного продолжения каждого f_k на границу D в терминах простых концов для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется элемент $x_k \in D$ такой, что $d(x_k, P_k) < 1/k$ и $h(f_k(x_k), f_k(P_k)) < 1/k$. Тогда из (16) следует, что

$$h(f_k(x_k), f_k(P_0)) \geq a/2, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{17}$$

Аналогично, в силу непрерывного продолжения отображения f_k в $\overline{D_P}$ найдется последовательность $x'_k \in D$, $x'_k \to P_0$ при $k \to \infty$, такая, что $h(f_k(x'_k), f_k(P_0)) < 1/k$ при $k = 1, 2, \ldots.$ Тогда из (17) следует, что

$$h(f_k(x_k), f_k(x'_k)) \geq a/4, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

где последовательности x_k и x'_k принадлежат D и сходятся к простому концу P_0 при $k \to \infty$ (см. рис. 3). В силу леммы 2 [3] простой конец P_0 регулярной области D в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, содержит цепь разрезов σ_k, лежащую на сферах S_k с центром в некоторой точке $x_0 \in \partial D$ и с евклидовыми радиусами $r_k \to 0$ при $k \to \infty$. Пусть D_k — области, ассоциированные с разрезами σ_k, $k = 1, 2, \ldots.$ Поскольку последовательности x_k и x'_k сходятся к простому концу P_0 при $k \to \infty$, можем считать, что точки x_k, x'_k принадлежат D_k при всех $k = 1, 2, \ldots.$ Соединим точки x_k и x'_k кривой γ_k, полностью лежащей в D_k. Можно также считать, что континуум A из определения класса $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(D)$ не пересекается ни с одной из областей D_k и $\mathrm{dist}\,(\partial D, A) > \varepsilon_0$.

Обозначим через C_k образ кривой γ_k при отображении f_k. Из соотношения (18) следует, что

$$h(C_k) \geq a/4 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{19}$$

где h обозначает хордальный диаметр множества.

Пусть Γ_k — семейство кривых, соединяющих $|\gamma_k|$ и A в D. Из определения кольцевого Q-отображения относительно p-модуля в точке x_0 следует, что

$$M_p(f_k(\Gamma_k)) \leq \int\limits_{A(x_0,r_k,\varepsilon_0)} Q(x)\eta^p(|x-x_0|)\,dm(x) \tag{20}$$

для каждой измеримой функции $\eta\colon (r_k,\varepsilon_0)\to[0,\infty]$ такой, что $\int_{r_k}^{\varepsilon_0}\eta(r)\,dr\geq 1$. Заметим, что функция

$$\eta(t)=\begin{cases}\psi(t)/I(r_k,\varepsilon_0), & t\in(r_k,\varepsilon_0),\\ 0, & t\in\mathbb{R}\setminus(r_k,\varepsilon_0),\end{cases}$$

где $I(\varepsilon,\varepsilon_0):=\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt$, удовлетворяет условию нормировки вида (3), поэтому из условий (7) и (20) следует, что

$$M_p(f_k(\Gamma_k))\leq\alpha(r_k)\to 0 \tag{21}$$

при $k\to\infty$, где $\alpha(\varepsilon)$ — некоторая неотрицательная функция, стремящаяся к нулю при $\varepsilon\to 0$, которая существует в силу условия (7).

С другой стороны, заметим, что $f_k(\Gamma_k)=\Gamma(C_k,f_k(A),D_k')$, где $D_k'=f_k(D)$. Поскольку по условию леммы $h(f_k(A))\geq\delta$ при всех $k\in\mathbb{N}$, в силу (19) $h(f_k(A))\geq\delta_1$ и $h(C_k)\geq\delta_1$, где $\delta_1:=\min\{\delta,a/4\}$. Вследствие того, что области D_k' являются равностепенно равномерными относительно p-модуля, заключаем, что существует такое $\sigma>0$, что

$$M_p(f_k(\Gamma_k))=M_p\big(\Gamma(C_k,f_k(A),D_k')\big)\geq\sigma\quad\forall k\in\mathbb{N},$$

а это противоречит условию (21). Полученное противоречие свидетельствует о том, что предположение об отсутствии равностепенной непрерывности семейства $\mathfrak{F}_{Q,A,p,\delta}(\overline{D})$ было ошибочным.

Лемма 3 доказана.

Для отображений с ветвлением лемма 3 принимает следующий вид.

Лемма 4. *Предположим, что $p\in(n-1,n]$, область D регулярна и области $D_f'=f(D)$ являются ограниченными равностепенно равномерными относительно p-модуля по $f\in\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$ областями с локально квазиконформной границей. Пусть при $p=n$ множество E имеет положительную емкость, а при $n-1<p<n$ является произвольным замкнутым множеством. Предположим также, что для каждой точки $x_0\in\overline{D}$ найдутся $\varepsilon_0=\varepsilon_0(x_0)>0$ и измеримая по Лебегу функция $\psi\colon(0,\varepsilon_0)\to[0,\infty]$ со следующим свойством: для любого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ выполнено условие* (6) *и, кроме того, при $\varepsilon\to 0$ выполнено условие* (7). *Тогда каждое из отображений $f\in\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$ имеет непрерывное продолжение в $\overline{D}_P$ и семейство $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(\overline{D})$, состоящее из всех таким образом продолженных отображений $\overline{f}\colon\overline{D}_P\to\overline{\mathbb{R}^n}$, является равностепенно непрерывным в $\overline{D}_P$.*

Доказательство. Равностепенная непрерывность внутри области D следует из леммы 3.6.1 [2] в случае $p=n$ и леммы 2.4 [9] при $n-1<p<n$, а возможность продолжения каждого элемента f семейства отображений $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$ до непрерывного отображения в замыкании D_P — из леммы 3 [5]. Сильная достижимость границы отображенной области, как и прежде, следует из замечания 1.

Осталось показать, что семейство $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(\overline{D})$ равностепенно непрерывно в точках $\partial_P D:=\overline{D}_P\setminus D$. Предположим противное. Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 3, построим две последовательности x_k и $x_k'\in D$, сходящиеся к простому концу P_0 при

$k \to \infty$, для которых справедливо соотношение вида (18). Соединим точки x_k и x'_k кривой $\gamma_k : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ так, что $\gamma_k(0) = x_k$, $\gamma_k(1) = x'_k$ и $\gamma_k(t) \in D$ при $t \in (0,1)$. Обозначим через C_k образ кривой γ_k при отображении f_k. Из соотношения (18) следует, что

$$h(C_k) \geq a/4, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{22}$$

В силу леммы 2 [3] простой конец P_0 регулярной области D в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, содержит цепь разрезов σ_k, лежащую на сферах S_k с центром в некоторой точке $x_0 \in \partial D$ и с евклидовыми радиусами $r_k \to 0$ при $k \to \infty$. Пусть D_k — области, ассоциированные с разрезами σ_k, $k = 1, 2, \ldots$. Поскольку последовательности x_k и x'_k сходятся к простому концу P_0 при $k \to \infty$, можно считать, что точки $x_k, x'_k \in D_k$ при всех $k = 1, 2, \ldots$.

По определению семейства отображений $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$ для любого $f_k \in \mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(D)$ и любой области $D'_k := f_k(D)$ найдется континуум $K_k \subset D'_k$ такой, что $h(K_k) \geq \delta$ и $h(f^{-1}(K_k), \partial D) \geq \geq \delta > 0$. Поскольку по условию леммы области D'_k являются равностепенно равномерными относительно p-модуля, в силу изложенного, учитывая условие (22), получаем, что при всех $k = 1, 2, \ldots$ и некотором $b > 0$ выполняется неравенство

$$M_p\big(\Gamma(K_k, C_k, D'_k)\big) \geq b. \tag{23}$$

Рассмотрим семейство Γ_k, состоящее из всех кривых $\beta \colon [0,1) \to D'_k$, где $\beta(0) \in C_k$ и $\beta(t) \to \to p \in K_k$ при $t \to 1$. Пусть Γ^*_k — семейство всех полных поднятий $\alpha \colon [0,1) \to D$ семейства Γ_k при отображении f_k с началом на γ_k. Такое семейство корректно определено в силу теоремы 3.7 [11]. Вследствие замкнутости отображения f_k имеем $\alpha(t) \to f_k^{-1}(K_k)$ при $t \to 1$, где $f_k^{-1}(K_k)$ — полный прообраз континуума K_k при отображении f_k.

Заметим, что в силу компактности пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$ при каждом фиксированном $\delta > 0$ множество $C_\delta := \{x \in D \colon h(x, \partial D) \geq \delta\}$ является компактом в D и $f_k^{-1}(K_k) \subset C_\delta$. Согласно лемме 1 [12] множество C_δ можно вложить в континуум E_δ, лежащий в области D, при этом можно считать, что $\operatorname{dist}(x_0, E_\delta) \geq \varepsilon_0$ за счет уменьшения ε_0, если это необходимо. Тогда на основании (2)

$$M_p(f_k(\Gamma^*_k)) \leq M_p\big(f_k\big(\Gamma(|\gamma_k|, E_\delta, D)\big)\big) \leq \int\limits_{A(x_0, r_k, \varepsilon_0)} Q(x)\eta^p(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{24}$$

для каждой измеримой функции $\eta \colon (r_k, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$ такой, что $\displaystyle\int_{r_k}^{\varepsilon_0} \eta(r)\, dr \geq 1$. Заметим, что функция

$$\eta(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(r_k, \varepsilon_0), & t \in (r_k, \varepsilon_0), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (r_k, \varepsilon_0), \end{cases}$$

где величина $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \displaystyle\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt$, удовлетворяет условию нормировки вида (3). Тогда из условий (7) и (24) следует, что

$$M_p(f_k(\Gamma_k)) \leq \alpha(r_k) \to 0 \tag{25}$$

при $k \to \infty$, где $\alpha(\varepsilon)$ — некоторая неотрицательная функция, стремящаяся к нулю при $\varepsilon \to 0$ и существующая в силу условия (7). Кроме того, заметим, что $f_k(\Gamma^*_k) = \Gamma_k$ и, одновременно, $M_p(\Gamma_k) = M_p\big(\Gamma(K_k, C_k, D'_k)\big)$. Тогда

$$M_p(f_k(\Gamma_k)) = M_p\big(\Gamma(K_k, C_k, D'_k)\big). \tag{26}$$

Объединяя соотношения (25) и (26), получаем противоречие с (23). Полученное противоречие свидетельствует о том, что исходное предположение (8) было ошибочным, и, значит, семейство отображений $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(\overline{D})$ равностепенно непрерывно в каждой точке $x_0 \in E_D$.

Лемма 4 доказана.

3. Доказательство основных результатов. Утверждения теорем 1 – 4 непосредственно следуют из лемм 1 – 4 и предложения 2 [5] (см. детали доказательства теоремы 2, а также [2], лемма 2.3.1).

***Замечание* 3.** При $p = n$ соответствующие версии теорем 3 и 4 получены первым автором для случая общих метрических пространств (см. [13]). Здесь рассмотрены лишь конечносвязные на границе области, что является частным случаем рассмотренных в [13] областей. Определения исследуемых семейств отображений в настоящей работе также отличаются от [13].

4. Примеры. Для простоты рассмотрим случай $p = n$.

***Пример* 1.** Как известно, дробно-линейные автоморфизмы единичного круга $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ на себя задаются формулой $f(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$, $z \in \mathbb{D}$, $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Полагая $\theta = 0$ и $a = (n-1)/n$, рассмотрим последовательность $f_n(z) = \dfrac{z-(n-1)/n}{1-z(n-1)/n}$, $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что f_n являются кольцевыми 1-гомеоморфизмами в любой точке $z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ (см., например, [14], теорема 1). Кроме того, единичный круг является равномерной областью относительно конформного модуля как плоская конечносвязная на границе область с конечным числом граничных компонент (см. [8], следствие 6.8). Очевидно также, что единичный круг является локально связным на своей границе. Таким образом, выполнены все условия теоремы 1, кроме условия $h(f_n(A)) \geq \delta$. Действительно, если бы $f_n \in \mathfrak{F}_{1,A,2,\delta}(\mathbb{D})$ хотя бы для одного континуума $A \subset \mathbb{D}$ и $\delta > 0$, то по теореме 1 семейство $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ было бы равностепенно непрерывным. В то же время последовательность f_n локально равномерно сходится к -1 внутри $\mathbb{D}$, при этом $f_n(1) = 1$. Значит, f_n не равностепенно непрерывна в точке 1.

Также легко привести пример конформных автоморфизмов единичного круга, удовлетворяющих условиям и заключению теоремы 1. Можно, например, взять $f_n(z) = \dfrac{z+1/n}{1+z/n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, положив $A = [0, 1/2]$, $\delta = 1/4$. Тогда $f_n \in \mathfrak{F}_{1,[0,1/2],2,1/4}(\mathbb{D})$ для больших $n \in \mathbb{N}$.

***Пример* 2.** Семейство отображений $f_n(z) = z^n$, $n = 1, 2, \ldots$, единичного круга на себя является примером равностепенно непрерывного семейства отображений в $\mathbb{D}$, которое не является таковым на $\partial\mathbb{D}$. Причиной последнего является нарушение условий $h(K_f) \geq \delta$ и $h\big(f^{-1}(K_f), \partial\mathbb{D}\big) \geq \delta > 0$ в определении класса $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(\mathbb{D})$ и условий теоремы 2. Опять-таки, данные отображения являются кольцевыми 1-отображениями по теореме 1 [14] (см. также [1], теорема 8.6).

Для того чтобы получить аналогичное „хорошее” семейство отображений, положим $f_n(z) = \left(\dfrac{z+1/n}{1+z/n}\right)^2$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Отображения f_n открыты, дискретны и замкнуты, при этом являются 1-отображениями (см. [14], теорема 1). Если взять $A = [0, 1/2]$, то

$$f_n(A) = \left[\frac{1}{n^2}, \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^2\right].$$

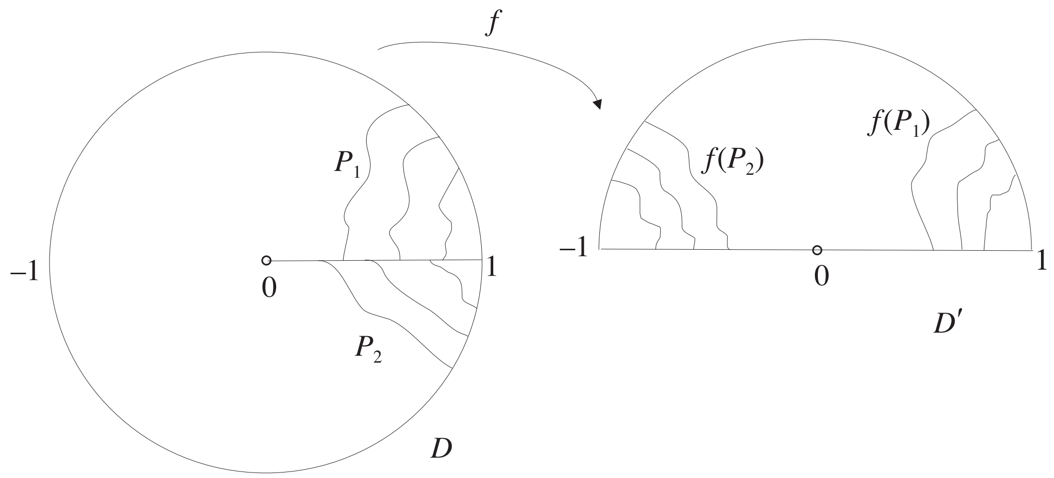

Рис. 4

Тогда в определении класса $\mathfrak{R}_{Q,\delta,p,E}(\mathbb{D})$ положим

$$Q \equiv 1, \qquad p = 2, \qquad E = \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}, \qquad K_{f_n} = f_n(A) = \left[\frac{1}{n^2}, \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^2\right].$$

Осталось определить число $\delta > 0$. Заметим, что $f_n^{-1}(K_{f_n}) = [-1/2, 1/2]$. Поскольку $h(x,y) \geq$ $\geq (1/2)|x-y|$ при $x, y \in \overline{\mathbb{D}}$, то $h(f_n^{-1}(K_{f_n}), \partial\mathbb{D}) \geq 1/4$ и $h(K_{f_n}) \geq (1/2)(1/5) = 1/10$ для больших $n \in \mathbb{N}$. Можно положить $\delta = 1/10$. Тогда $f_n \in \mathfrak{R}_{1,1/10,2,\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}}(\mathbb{D})$ для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$.

***Пример* 3.** Рассмотрим семейство отображений с неограниченной характеристикой. Пусть $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, (r, φ) — полярные координаты точки (x, y) : $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $D = \{z = (x, y) \in \mathbb{D} \colon 0 < \varphi < 2\pi\}$ — единичный круг с разрезом по лучу $y = 0$, $x \geq 0$. Положим $f(z) = (r\cos\varphi/2, r\sin\varphi/2)$. Тогда f является кольцевым Q-отображением в $\overline{D} = \overline{\mathbb{D}}$ с некоторым Q, которое вычислим, исходя из следующих соображений. Найдем производную отображения f по направлению вектора $e = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi)$, касательного к окружности $\gamma(\varphi) = (r_0\cos\varphi, r_0\sin\varphi)$ в фиксированной точке $z_0 = (r_0\cos\varphi_0, r_0\sin\varphi_0)$. Путем прямых вычислений убеждаемся, что эта производная равна 1/2, в то же время растяжение в радиальном (ортогональном к первому) направлении равно 1. В известных обозначениях $l(f'(x)) = 1/2$, $K_I(x, f) = (1/2 \cdot 1)/1/2^2 = 2$. Следовательно, отображение f является кольцевым 2-гомеоморфизмом в $\overline{\mathbb{D}}$ в силу теоремы 8.6 [1] (см. также [14], теорема 1). Отображение f, очевидно, не имеет поточечного непрерывного продолжения на $\overline{D}$, однако имеет непрерывное продолжение $\overline{f} : \overline{D}_P \to \overline{\mathbb{D}}$ в терминах простых концов $E_D \subset \overline{D}_P$ (см. рис. 4).

Определим теперь в той же области D семейство отображений

$$g_m(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{\big|(m-1)/m\big| \log \dfrac{e}{(m-1)/m}}, & z \in D \cap B(0, (m-1)/m), \\[2ex] \dfrac{z}{|z| \log \dfrac{e}{|z|}}, & z \in D \setminus B(0, (m-1)/m). \end{cases}$$

В силу теоремы 8.6 [1] отображения g_m являются кольцевыми Q-гомеоморфизмами в $\overline{\mathbb{D}}$ при $Q(z) := \log \dfrac{e}{|z|}$. Непосредственно проверяется, что функция Q удовлетворяет условию расходимости интеграла (5).

Положим теперь $H_m := f \circ g_m$. Отображения H_m переводят круг с разрезом D на полукруг $D' = \{z = (x, y) \in \mathbb{D}\colon 0 < \varphi < \pi\}$, являются кольцевыми Q_1-гомеоморфизмами для $Q_1(z) := 2\log \dfrac{e}{|z|}$ и удовлетворяют всем условиям теоремы 3. В частности, полукруг является равномерной областью в силу следствия 6.8 [8], так как область D' плоская, конечносвязная на границе и имеет конечное число граничных компонент. Круг с разрезом D является регулярной областью в силу теоремы Римана. Семейство отображений H_m не является равностепенно непрерывным на границе $\mathbb{D}$ в обычном смысле, так как эти отображения не имеют непрерывного граничного продолжения. Тем не менее это семейство является равностепенно непрерывным в терминах пространства $\overline{D}_P$ по теореме 1.

Литература

1. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer Sci. + Business Media, LLC, 2009.
2. *Севостьянов Е. А.* Исследование пространственных отображений геометрическим методом. – Киев: Наук. думка, 2014.
3. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И.* Простые концы и классы Орлича – Соболева // Алгебра и анализ. – 2015. – **27**, № 5. – С. 81 – 116.
4. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yakubov E.* The Beltrami equations and prime ends // Укр. мат. вiсн. – 2015. – **12**, № 1. – С. 27 – 66.
5. *Севостьянов Е. А.* О граничном продолжении и равностепенной непрерывности семейств отображений в терминах простых концов // Алгебра и анализ. – 2018. – **30**, № 6. – С. 97 – 146.
6. *Näkki R., Palka B.* Uniform equicontinuity of quasiconformal mappings // Proc. Amer. Math. Soc. – 1973. – **37**, № 2. – P. 427 – 433.
7. *Näkki R.* Prime ends and quasiconformal mappings // J. Anal. Math. – 1979. – **35**. – P. 13 – 40.
8. *Näkki R.* Extension of Loewner's capacity theorem // Trans. Amer. Math. Soc. – 1973. – **180**. – P. 229 – 236.
9. *Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E.* Normal families of discrete open mappings with controlled p-module // Contemp. Math. – 2016. – **667**. – P. 83 – 103.
10. *Севостьянов Е. А.* О граничном поведении открытых дискретных отображений с неограниченной характеристикой // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 6. – С. 855 – 859.
11. *Vuorinen M.* Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n-space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss. – 1976. – **11**. – P. 1 – 44.
12. *Смоловая Е. С.* Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 5. – С. 682 – 689.
13. *Sevost'yanov E.* On boundary extension of mappings in metric spaces in terms of prime ends // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2019. – **44**, № 1. – P. 65 – 90.
14. *Полецкий Е. А.* Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений // Мат. сб. – 1970. – **83**, № 2. – С. 261 – 272.

Получено 17.02.19