УДК 517.937

В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, Рівне)

ДО ТЕОРІЇ ФАВАРА БЕЗ $\mathcal{H}$-КЛАСІВ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

We obtain necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of solutions bounded on the real axis with precompact sets of values of linear almost periodic differential-functional equations in Banach spaces.

Отримано необхідні й достатні умови існування й єдиності обмежених на числовій осі розв'язків із передкомпактними множинами значень лінійних майже періодичних диференціально-функціональних рівнянь у банаховому просторі.

1. Основні означення й об'єкт досліджень. Нехай $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел, $\mathbb{K}$ — дійсне поле $\mathbb{R}$ або комплексне поле $\mathbb{C}$, E — нескінченновимірний банаховий простір над полем $\mathbb{K}$ з нормою $\|\cdot\|_E$, X і Y — довільні банахові простори і $L(X,Y)$ — банаховий простір лінійних неперервних операторів $A\colon X\to Y$ з нормою

$$\|A\|_{L(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y.$$

Позначимо через C^0 банаховий простір обмежених і неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $x=x(t)$ зі значеннями в E з нормою

$$\|x\|_{C^0} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_E,$$

а через C^1 банаховий простір функцій $x\in C^0$, для кожної з яких $\dfrac{dx}{dt}\in C^0$, з нормою

$$\|x\|_{C^1} = \max\left\{\|x\|_{C^0}, \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{C^0}\right\}.$$

У просторі C^0 визначимо оператор зсуву S_h, $h\in\mathbb{R}$, за допомогою співвідношення

$$(S_hx)(t) = x(t+h), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Очевидно, що кожен із просторів C^0 і C^1 є інваріантним по відношенню до операторів S_h, $h\in\mathbb{R}$.

Означення 1. *Елемент $y\in C^k$, $k=\overline{0,1}$, називається майже періодичним (див.* [1, 2]), *якщо замикання множини $\{S_hy\colon h\in\mathbb{R}\}$ у просторі C^k є компактною підмножиною цього простору, тобто з кожної послідовності $(S_{h_n}y)_{n\geq 1}$ можна виділити збіжну в C^k підпослідовність.*

Множина майже періодичних елементів простору C^k є підпростором цього простору з нормою $\|\cdot\|_{C^k}$. Цей підпростір позначимо через B^k.

Означення 2. *Оператор $A\in L(C^k,C^m)$, $k,m\in\{0,1\}$, називається майже періодичним (див.* [3, 4]), *якщо для кожної послідовності $(h_s)_{s\geq 1}$ дійсних чисел існує така підпослідовність $(h_{s_l})_{l\geq 1}$, що*

$$\lim_{l_1\to\infty,\, l_2\to\infty} \left\| S_{h_{s_{l_1}}} A S_{-h_{s_{l_1}}} - S_{h_{s_{l_2}}} A S_{-h_{s_{l_2}}} \right\|_{L(C^k,C^m)} = 0.$$

Означення 3. *Оператор* $A \in L(C^k, C^m)$ *називається автономним, якщо*

$$S_h A S_{-h} = A$$

для всіх $h \in \mathbb{R}$.

Очевидно, що автономний оператор є майже періодичним.

Нехай $\mathcal{K}$ — множина всіх непорожніх компактних підмножин $K \subset E$, $\mathcal{K}_{\text{a.v.}}$ — множина всіх абсолютно опуклих [5] множин $K \in \mathcal{K}$ і $R(x)$ — множина значень функції $x = x(t)$, тобто $\{x(t) : t \in \mathbb{R}\}$. Для $K \in \mathcal{K}$ позначимо через $\mathfrak{D}^0_K$ множину всіх елементів $x \in C^0$, для кожного з яких $R(x) \subset K$, а через $\mathfrak{D}^1_K$ множину всіх елементів $x \in C^1$, для кожного з яких $R(x) \cup R(dx/dt) \subset K$.

Зручним для дослідження майже періодичних рівнянь є наступне означення майже періодичного оператора, вперше розглянуте автором у [6] у випадку дискретних рівнянь.

Означення 4. *Оператор* $A \in L(C^k, C^m)$, $k, m \in \{0, 1\}$, *будемо називати майже періодичним, якщо для кожних множини* $K \in \mathcal{K}$ *і послідовності* $(h_s)_{s \ge 1}$ *дійсних чисел існує така підпослідовність* $(h_{s_l})_{l \ge 1}$, *що*

$$\lim_{l_1 \to \infty,\ l_2 \to \infty} \sup_{x \in \mathfrak{D}^k_K} \left\| S_{h_{s_{l_1}}} A S_{-h_{s_{l_1}}} x - S_{h_{s_{l_2}}} A S_{-h_{s_{l_2}}} x \right\|_{C^m} = 0. \tag{1}$$

Аналогічні означення майже періодичного оператора автор використовував при знаходженні умов майже періодичності обмежених розв'язків диференціальних, різницевих, функціональних і диференціально-функціональних рівнянь (див. [6 – 16]).

Зауважимо, що майже періодичний у сенсі означення 4 оператор A може не бути майже періодичним у сенсі означення 2 (приклад такого оператора при $k = m = 0$ наведено в [15]). У випадку $\dim E < \infty$ обидва твердження рівносильні.

Для подальшого розгляду потрібні множини

$$\mathfrak{S}^0 = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} \mathfrak{D}^0_K \quad \text{і} \quad \mathfrak{S}^1 = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} \mathfrak{D}^1_K.$$

Ці множини є підпросторами просторів C^0 і C^1 відповідно з нормами $\|\cdot\|_{\mathfrak{S}^0} = \|\cdot\|_{C^0}$ і $\|\cdot\|_{\mathfrak{S}^1} = \|\cdot\|_{C^1}$ (див. п. 2). Аналогічно множини

$$\mathfrak{S}^0_K = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \lambda\, \mathfrak{D}^0_K \quad \text{і} \quad \mathfrak{S}^1_K = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \lambda\, \mathfrak{D}^1_K,$$

де $\lambda\, \mathfrak{D}^0_K = \{\lambda x : x \in \mathfrak{D}^0_K\}$ і $\lambda\, \mathfrak{D}^1_K = \{\lambda x : x \in \mathfrak{D}^1_K\}$, у випадку $K \in \mathcal{K}_{\text{a.v.}}$ також є підпросторами просторів C^0 і C^1 відповідно з нормами $\|\cdot\|_{\mathfrak{S}^0_K} = \|\cdot\|_{C^0}$ і $\|\cdot\|_{\mathfrak{S}^1_K} = \|\cdot\|_{C^1}$ (див. п. 2). Очевидно, що $B^0 \subset \mathfrak{S}^0$ і $B^1 \subset \mathfrak{S}^1$.

У цій статті будемо використовувати означення майже періодичного оператора.

Означення 5. *Оператор* $A \in L(C^k, C^m)$, *де* $k, m \in \{0, 1\}$, *будемо називати* $(\mathfrak{S}^k, \mathfrak{S}^m)$-*майже періодичним, якщо* $A\mathfrak{S}^k \subset \mathfrak{S}^m$ *і для кожної послідовності* $(h_s)_{s \ge 1}$ *дійсних чисел існує така підпослідовність* $(h_{s_l})_{l \ge 1}$, *що*

$$\lim_{l_1 \to \infty,\ l_2 \to \infty} \sup_{x \in \mathfrak{S}^k,\ \|x\|_{\mathfrak{S}^k} = 1} \left\| S_{h_{s_{l_1}}} A S_{-h_{s_{l_1}}} x - S_{h_{s_{l_2}}} A S_{-h_{s_{l_2}}} x \right\|_{\mathfrak{S}^m} = 0. \tag{2}$$

Це означення наводиться вперше. Очевидно, що майже періодичний у сенсі означення 5 оператор A є майже періодичним і в сенсі означення 4. Однак такий оператор може не бути майже періодичним у сенсі означення 2, що підтверджується згаданим вище прикладом оператора, наведеним у [15] (для відповідного оператора в [15] виконується не лише співвідношення (1), а і співвідношення (2)).

Якщо в означенні 5 простори $\mathfrak{S}^k$ і $\mathfrak{S}^m$ замінити просторами $\mathfrak{S}^k_K$ і $\mathfrak{S}^m_K$, $K \in \mathcal{K}_{\text{a.v.}}$, відповідно, то отримаємо ще один клас майже періодичних операторів.

У подальшому будемо використовувати також оператори, наділені властивістю c-неперервності.

Означення 6. *Нехай $\mathfrak{X} \in \{C^0, \mathfrak{S}^0, \mathfrak{S}^0_K\}$ і $\mathfrak{Y} \in \{C^1, \mathfrak{S}^1, \mathfrak{S}^1_K\}$, де $K \in \mathcal{K}_{\text{a.v.}}$. Послідовності елементів $x_k \in \mathfrak{X}$, $y_k \in \mathfrak{Y}$, $k \in \mathbb{N}$, будемо називати локально збіжними до елементів $x \in \mathfrak{X}$, $y \in \mathfrak{Y}$ при $k \to \infty$ відповідно, якщо ці послідовності обмежені і для кожного числа $T > 0$*

$$\lim_{k\to\infty} \max_{|t|\le T} \|x_k(t) - x(t)\|_E = 0$$

і

$$\lim_{k\to\infty} \max_{|t|\le T} \left(\|y_k(t) - y(t)\|_E + \left\| \frac{dy_k(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt} \right\|_E \right) = 0.$$

Нехай $\mathfrak{R} = \mathfrak{X} \bigcup \mathfrak{Y}$ і $\mathfrak{Z} \in \mathfrak{R}$. Для локально збіжної послідовності елементів $z_k \in \mathfrak{Z}$ до елемента $z \in \mathfrak{Z}$ при $k \to \infty$ будемо використовувати позначення

$$z_k \xrightarrow{\text{loc, } \mathfrak{Z}} z \ \text{ при } \ k \to \infty.$$

Поняття локально збіжної послідовності введено автором (див. [17, 18]).

Означення 7. *Оператор $A \in L(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ називається c-неперервним, якщо*

$$Ax_k \xrightarrow{\text{loc, } \mathfrak{Y}} Ax \quad \textit{при} \ \ k \to \infty$$

для кожної послідовності

$$x_k \xrightarrow{\text{loc, } \mathfrak{X}} x \quad \textit{при} \ \ k \to \infty.$$

c-Неперервні оператори (на мові „ε, δ”) введені Е. Мухамадієвим (див. [3, 4]).

У подальшому будемо використовувати ще одне означення.

Розглянемо диференціально-функціональне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{3}$$

з лінійним майже періодичним у сенсі означення 5 оператором $A \in L(C^0, C^0)$. Оператору A поставимо у відповідність замикання множини $\{S_h A S_{-h} : h \in \mathbb{R}\}$ у просторі $L(C^0, C^0)$, яке позначимо через $\mathcal{H}(A)$.

Означення 8. *$\mathcal{H}$-класом рівняння* (3) *називається множина рівнянь*

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{A}x, \tag{4}$$

де $\tilde{A} \in \mathcal{H}(A)$.

Розглянемо диференціально-функціональне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = Ax + y, \tag{5}$$

де $A\colon C^0 \to C^0$ — оператор, що і в рівнянні (3), і $y \in \mathfrak{S}^0$.

Метою статті є знаходження для (5) умов без використання $\mathcal{H}$-класу рівняння (3), при виконанні яких рівняння (5) для кожної функції $y \in \mathfrak{S}^0$ має єдиний розв'язок $x \in \mathfrak{S}^1$, що є майже періодичним, якщо $y \in B^0$.

2. Теореми Фавара і Мухамадієва та інші допоміжні твердження. Спочатку наведемо потрібні для подальшого два твердження, в яких банаховий простір E вважається скінченновимірним, а оператор $A \in L(C^1, C)$, що розглядається в першому твердженні, має вигляд

$$(Ax)(t) = B(t)x(t),$$

де $B(t)$ — неперервна майже періодична в сенсі означення 1 функція зі значеннями в $L(E, E)$.

Теорема 1 (Фавар [2, 19])**.** *Якщо рівняння* (4) *для кожного* $\tilde{A} \in \mathcal{H}(A)$ *не має обмежених ненульових розв'язків, то для рівняння* (5), *де* $y \in C^0$, *його обмежений розв'язок, якщо він існує, є майже періодичним.*

Теорема 2 (Мухамадієв [3])**.** *Нехай майже періодичний у сенсі означення* 2 *оператор* $A \in L(C^0, C^0)$ *є с-неперервним і рівняння* (4) *не має ненульових розв'язків у* C^0 *для всіх* $\tilde{A} \in \mathcal{H}(A)$.

Тоді рівняння (5) *для кожної функції* $y \in C^0$ *має єдиний розв'язок* $x \in C^0$, *який майже періодичний, якщо* $y \in B^0$.

Очевидно, що теорема Мухамадієва узагальнює і посилює теорему Фавара.

У подальшому банаховий простір E буде нескінченновимірним, оператор A буде задовольняти менше умов, ніж у теоремі Мухамадієва, і при дослідженні рівняння (5) не буде використовуватися $\mathcal{H}$-клас рівняння (3).

Перш ніж сформулювати основний результат, наведемо чотири допоміжні твердження.

Теорема 3. *Нехай* K *належить* $\mathcal{K}_{\text{a.v.}}$. *Множини* $\mathfrak{S}^0$, $\mathfrak{S}^0_K$ *і* $\mathfrak{S}^1$, $\mathfrak{S}^1_K$ — *підпростори просторів* C^0 *і* C^1 *відповідно.*

Доведення. Доведення того, що $\mathfrak{S}^0$ — підпростір простору C^0, повторює доведення аналогічного твердження у випадку $E = l_1$ [15], тому ми його не наводимо.

Доведемо, що $\mathfrak{S}^1$ — підпростір простору C^1.

Очевидно, що $x + y, \alpha x \in \mathfrak{S}^1$, якщо $x, y \in \mathfrak{S}^1$ і $\alpha \in \mathbb{K}$. Тому $\mathfrak{S}^1$ — векторний простір. Цей простір, очевидно, також є нормованим простором із нормою $\|\cdot\|_{C^1}$.

Покажемо, що простір $\mathfrak{S}^1$ є повним, тобто замикання множини значень кожного елемента множини $\overline{\mathfrak{S}^1}$ є компактною множиною ($\overline{\mathfrak{S}^1}$ — замикання множини $\mathfrak{S}^1$ у просторі C^1).

Нехай z належить $\overline{\mathfrak{S}^1}$ і ε — довільне додатне число. Існує елемент $w \in \mathfrak{S}^1$, для якого

$$\|z - w\|_{C^1} < \frac{\varepsilon}{2},$$

і тому

$$\inf\left\{\|a - b\|_E : a \in \overline{R(z)}, b \in \overline{R(w)}\right\} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{6}$$

$$\inf\left\{\|a - b\|_E : a \in \overline{R\left(\frac{dz}{dt}\right)}, b \in \overline{R\left(\frac{dw}{dt}\right)}\right\} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Нехай M_1 і M_2 — скінченні $\dfrac{\varepsilon}{2}$-сітки [20] для компактних множин $\overline{R(w)}$ і $\overline{R\left(\dfrac{dw}{dt}\right)}$ відповідно. Тоді на підставі (6) і (7) множини M_1 і M_2 — скінченні ε-сітки для множин $\overline{R(z)}$ и $\overline{R\left(\dfrac{dz}{dt}\right)}$ відповідно.

Отже, завдяки довільності вибору числа $\varepsilon > 0$ множини $\overline{R(z)}$ і $\overline{R\left(\dfrac{dz}{dt}\right)}$ компактні, і тому $\mathfrak{S}^1$ — підпростір банахового простору C^1.

Множини $\mathfrak{S}^0_K$ і $\mathfrak{S}^1_K$ також є підпросторами просторів C^0 і C^1 відповідно, що встановлюється аналогічним чином. Потрібно використати абсолютну опуклість множини $K \in \mathcal{K}_{\mathrm{a.v.}}$, на підставі якої $x+y,\ \alpha x \in \mathfrak{S}^0_K$, якщо $x, y \in \mathfrak{S}^0_K$ і $\alpha \in \mathbb{K}$, і $x+y,\ \alpha x \in \mathfrak{S}^1_K$, якщо $x, y \in \mathfrak{S}^1_K$ і $\alpha \in \mathbb{K}$.

Теорему 3 доведено.

У подальшому також будемо використовувати твердження про локально збіжні послідовності елементів просторів $\mathfrak{S}^0$ і $\mathfrak{S}^1$.

Розглянемо один клас допоміжних операторів. Кожному $n \in \mathbb{N}$ поставимо у відповідність функцію $p_n \in C^1$ (у випадку $E = \mathbb{R}$) і оператор $P_n \in L(C^0, C^0) \bigcup L(C^1, C^1)$ рівностями

$$p_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad |t| \le n, \\ \cos^2 \dfrac{|t| - n}{2}, & \text{якщо} \quad |t| \in (n, n+\pi], \\ 0, & \text{якщо} \quad |t| \ge n + \pi, \end{cases}$$

і

$$(P_n x)(t) = p_n(t) x(t).$$

Очевидно, що $\|p_n\|_{C^0} = \|p_n\|_{C^1} = 1$, $\|P_n\|_{L(C^0,C^0)} = 1$ і $\|P_n\|_{L(C^1,C^1)} = 2$ для всіх $n \ge 1$.

Теорема 4. *Нехай $\mathfrak{X}$ належить $\{C^0, C^1, \mathfrak{S}^0, \mathfrak{S}^1, \mathfrak{S}^0_K, \mathfrak{S}^1_K\}$, $K \in \mathcal{K}_v$, $(x_k)_{k\ge1}$ — обмежена послідовність елементів простору $\mathfrak{X}$ і для кожного $n \in \mathbb{N}$ послідовність $(P_n x_k)_{k\ge1}$ передкомпактна в $\mathfrak{X}$.*

Тоді існують строго зростаюча послідовність $(k_l)_{l\ge1}$ натуральних чисел і елемент $x \in \mathfrak{X}$, для яких

$$x_{k_l} \xrightarrow{\mathrm{loc},\ \mathfrak{X}} x \ \ \textit{при} \ \ l \to \infty \tag{8}$$

і

$$\|x\|_{\mathfrak{X}} \le \sup_{l\ge1} \|x_{k_l}\|_{\mathfrak{X}}. \tag{9}$$

Доведення. На підставі умов теореми існують збіжні послідовності

$$\begin{gathered} P_1 x_{k_{1,1}}, P_1 x_{k_{1,2}}, \ldots, P_1 x_{k_{1,m}}, \ldots, \\ P_2 x_{k_{2,1}}, P_2 x_{k_{2,2}}, \ldots, P_2 x_{k_{2,m}}, \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_m x_{k_{m,1}}, P_m x_{k_{m,2}}, \ldots, P_m x_{k_{m,m}}, \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

для яких послідовності $(k_{l,p})_{p\geq 1}$, $l \in \mathbb{N}$, є строго зростаючими і

$$\{k_{l,p} : p \in \mathbb{N}\} \supset \{k_{l+1,p} : p \in \mathbb{N}\} \tag{10}$$

для кожного $l \in \mathbb{N}$.

Позначимо через b_m границю $\lim_{p\to\infty} P_m x_{k_{m,p}}$, яка, очевидно, є елементом простору $\mathfrak{X}$. Завдяки властивостям послідовностей, що розглядаються, для кожного $k \in \mathbb{N}$

$$P_k b_{m_1} = P_k b_{m_2},$$

якщо $k < m_1 < m_2$. Тому існує такий елемент $b \in \mathfrak{X}$, що

$$P_m b = P_m b_{m+1}$$

для всіх $m \geq 1$.

Із (10) випливає, що

$$k_{q,q} \in \{k_{m,p} : p \in \mathbb{N}\}$$

для $q \geq m$ і $m \in \mathbb{N}$. Тому послідовність

$$P_n x_{k_{1,1}}, P_n x_{k_{2,2}}, \ldots, P_n x_{k_{q,q}}, \ldots$$

є збіжною для кожного $n \in \mathbb{N}$ і, отже,

$$x_{k_{q,q}} \xrightarrow{\text{loc, } \mathfrak{X}} b \quad \text{при} \quad q \to \infty, \tag{11}$$

тобто для послідовності $(x_{k_{q,q}})_{q\geq 1}$ виконується співвідношення (8).

Нерівність (9) для послідовності $(x_{k_{q,q}})_{q\geq 1}$ випливає з (11).

Теорему 4 доведено.

Теорема 5. *Нехай $K \in \mathcal{K}_{\text{a.v.}}$ і $(x_k)_{k\geq 1}$ — обмежена послідовність елементів простору $\mathfrak{S}^1_K$.*

Тоді існують строго зростаюча послідовність $(k_l)_{l\geq 1}$ натуральних чисел і елемент $x \in \mathfrak{S}^0_K$, для яких виконуються співвідношення (8) *і* (9) *при $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}^0_K$.*

Завдяки умовам теореми для кожного $n \in \mathbb{N}$ сім'я $\{P_n x_k : k \geq 1\} \subset \mathfrak{S}^0_K$ функцій $P_n x_k$ є рівномірно обмеженою і рівностепенево неперервною на $\mathbb{R}$. Отже, на підставі узагальненої теореми Арцела (див. [20, с. 110]) для кожного $n \in \mathbb{N}$ послідовність $(P_n x_k)_{k\geq 1}$ передкомпактна в $\mathfrak{S}^0_K$. Тому теорема 5 є окремим випадком теореми 4.

Далі наведемо ще одне важливе для подальшого твердження.

Розглянемо визначену і неперервну разом із похідною першого порядку функцію $q = q(t)$, для якої $q(t) = 1$, якщо $|t| \leq 1/2$, $q(t) = 0$, якщо $|t| \geq 1$, і $0 \leq q(t) \leq 1$ для всіх $t \in [-1, 1]$. Визначимо оператор $Q_{\varepsilon,\tau} \in L(\mathfrak{S}^1, \mathfrak{S}^0)$ рівністю

$$(Q_{\varepsilon,\tau} x)(t) = q(\varepsilon(t - \tau))x(t).$$

Теорема 6. *Нехай $(\mathfrak{S}^1, \mathfrak{S}^0)$-майже періодичний оператор $D \in L(\mathfrak{S}^1, \mathfrak{S}^0)$ є с-неперервним.*

Тоді

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{T\in\mathbb{R},\ \|x\|_{\mathfrak{S}^1}=1} \|Q_{\varepsilon,T} Dx - DQ_{\varepsilon,T} x\|_{\mathfrak{S}^0} = 0. \tag{12}$$

Доведення. Оскільки завдяки $(\mathfrak{S}^1, \mathfrak{S}^0)$-майже періодичності оператора D замикання $\overline{\{S_h D S_{-h} : h \in \mathbb{R}\}}$ множини $\{S_h D S_{-h} : h \in \mathbb{R}\}$ у просторі $L(\mathfrak{S}^1, \mathfrak{S}^0)$ компактне в цьому просторі, то на підставі c-неперервності всіх елементів множини $\overline{\{S_h D S_{-h} : h \in \mathbb{R}\}}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\tau \in \mathbb{R},\ \|x\|_{\mathfrak{S}^1}=1} \|(Dx)(\tau) - (DQ_{\varepsilon,\tau}x)(\tau)\|_{\mathfrak{S}^0} = 0. \tag{13}$$

Зафіксуємо довільні числа $\delta > 0$ і $\varepsilon > 0$. Розглянемо величини

$$\alpha(\delta, \varepsilon) = \sup_{\tau, T \in \mathbb{R},\ \|x\|_{\mathfrak{S}^1}=1} \|(DQ_{\varepsilon,T}x)(\tau) - (DQ_{\delta,\tau}Q_{\varepsilon,T}x)(\tau)\|_E,$$

$$\beta(\delta, \varepsilon) = \sup_{\tau, T \in \mathbb{R},\ \|x\|_{\mathfrak{S}^1}=1} \|q(\varepsilon(\tau - T))(Dx)(\tau) - q(\varepsilon(\tau - T))(DQ_{\delta,\tau}x)(\tau)\|_E$$

і

$$\gamma(\delta, \varepsilon) = \sup_{\tau, T \in \mathbb{R},\ \|x\|_{\mathfrak{S}^1}=1} \|(DQ_{\delta,\tau}(Q_{\varepsilon,T} - Q_{\varepsilon,\tau})x)(\tau)\|_E.$$

На підставі нерівності трикутника

$$\sup_{T \in \mathbb{R},\ \|x\|_{\mathfrak{S}^1}=1} \|Q_{\varepsilon,T}Dx - DQ_{\varepsilon,T}x\|_{\mathfrak{S}^0} \leq \alpha(\delta, \varepsilon) +$$

$$+ \sup_{\tau, T \in \mathbb{R},\ \|x\|_{\mathfrak{S}^1}=1} \|q(\varepsilon(\tau - T))(Dx)(\tau) - (DQ_{\delta,\tau}Q_{\varepsilon,T}x)(\tau)\|_E \leq \alpha(\delta, \varepsilon) + \beta(\delta, \varepsilon) +$$

$$+ \sup_{\tau, T \in \mathbb{R},\ \|x\|_{\mathfrak{S}^1}=1} \|(DQ_{\delta,\tau}(Q_{\varepsilon,T} - Q_{\varepsilon,\tau})x)(\tau)\|_E = \alpha(\delta, \varepsilon) + \beta(\delta, \varepsilon) + \gamma(\delta, \varepsilon).$$

Наведені нерівності виконуються для всіх $\delta > 0$ і $\varepsilon > 0$. Звідси і зі співвідношень

$$\lim_{\delta \to 0} \alpha(\delta, \varepsilon) = 0 \quad \text{для всіх} \quad \varepsilon > 0,$$

$$\lim_{\delta \to 0} \beta(\delta, \varepsilon) = 0 \quad \text{для всіх} \quad \varepsilon > 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \gamma(\delta, \varepsilon) = 0 \quad \text{для всіх} \quad \delta > 0,$$

що випливають із (13), отримуємо (12).

Теорему 6 доведено.

***Зауваження* 1.** У теоремі 6 і в доведенні цієї теореми простори $\mathfrak{S}^0$ і $\mathfrak{S}^1$ можна замінити просторами $\mathfrak{S}^0_K$ і $\mathfrak{S}^1_K$ відповідно для кожного $K \in \mathcal{K}_{\text{a.c.}}$.

3. Основний результат. Основним результатом статті є наступне твердження.

Теорема 7. *Нехай оператор $A \in L(C^0, C^0)$ є $(\mathfrak{S}^0, \mathfrak{S}^0)$-майже періодичним, с-неперервним і для кожної компактної множини $C \in \mathcal{K}$ існують абсолютно опукла компактна множина $K \in \mathcal{K}_{\text{a.c.}}$ і додатне число ω, для яких $C \subset K$ і $A\mathfrak{D}^0_K \subset \omega\mathfrak{D}^0_K$ (множину всіх таких абсолютно опуклих множин позначимо через $\mathcal{K}^A_{\text{a.c.}}$).*

Для того щоб рівняння (5) *для кожного $y \in \mathfrak{S}^0$ мало єдиний розв'язок $x \in \mathfrak{S}^1$ і $x \in B^1$, якщо $y \in B^0$, необхідно і достатньо, щоб*

$$\inf_{x \in \mathfrak{S}^1_K,\ \|x\|_{\mathfrak{S}^1_K}=1} \left\| \frac{dx}{dt} - Ax \right\|_{\mathfrak{S}^0_K} > 0 \tag{14}$$

для кожного $K \in \mathcal{K}^A_{\text{a.c.}}$.

Очевидно, що співвідношення (14) рівносильне співвідношенню

$$\inf_{x\in\mathfrak{S}^1_K,\ \|x\|_{\mathfrak{S}^1_K}=1}\left\|\frac{dx}{dt}-A|_{\mathfrak{S}^0_K}x\right\|_{\mathfrak{D}^0_K}>0 \tag{15}$$

для кожного $K\in\mathcal{K}^A_{\text{a.c.}}$, де $A|_{\mathfrak{S}^0_K}$ — звуження A на $\mathfrak{S}^0_K$.

Доведення. *Достатність*. Зафіксуємо довільний елемент $y\in\mathfrak{S}^0$. Для передкомпактної множини $R(y)$ існують абсолютно опукла компактна множина $K\in\mathcal{K}^A_{\text{a.c.}}$, для якої $R(y)\subset K$ (тоді $y\in\mathfrak{D}^0_K$), і число $\omega>0$, для яких $A\mathfrak{D}^0_K\subset\omega\mathfrak{D}^0_K$.

Для рівняння (5) розглянемо допоміжне рівняння

$$\frac{dx}{dt}=A|_{\mathfrak{S}^0_K}x+y, \tag{16}$$

де звуження $A|_{\mathfrak{S}^0_K}$ оператора A на простір $\mathfrak{S}^0_K$ є c-неперервним елементом простору $L(\mathfrak{S}^0_K,\mathfrak{S}^0_K)$. Завдяки умовам теореми існує строго зростаюча і необмежена послідовність $(\omega_l)_{l\ge1}$ дійсних чисел, більших за 1, для якої

$$\lim_{l\to\infty}\sup_{x\in\mathfrak{S}^0_K,\ \|x\|_{\mathfrak{S}^0_K}=1}\left\|S_{\omega_l}A|_{\mathfrak{S}^0_K}S_{-\omega_l}x-A|_{\mathfrak{S}^0_K}x\right\|_{\mathfrak{S}^0_K}=0. \tag{17}$$

Позначимо через $\mathfrak{S}^k_{K,\omega_l}$, $k\in\{0,1\}$, банаховий підпростір простору $\mathfrak{S}^k_K$ ω_l-періодичних функцій з нормою $\|\cdot\|_{\mathfrak{S}^k_{K,\omega_l}}=\|\cdot\|_{\mathfrak{S}^k_K}$.

Визначимо оператор $A_{\omega_l}\in L(\mathfrak{S}^0_{K,\omega_l},\mathfrak{S}^0_{K,\omega_l})$ рівністю $(A_{\omega_l}x)(t)=y(t)$, де $y(t)$ — ω_l-періодична функція, що задається на відрізку $[0,\omega_l]$ формулою

$$y(t)=\begin{cases}\left(A|_{\mathfrak{S}^0_K}x\right)(t) & \text{при}\quad t\in[1/l,\omega_l]\,,\\ (1-lt)\left(A|_{\mathfrak{S}^0_K}x\right)(t+\omega_l)+lt\left(A|_{\mathfrak{S}^0_K}x\right)(t) & \text{при}\quad t\in[0,1/l)\,.\end{cases}$$

Із співвідношення (17) випливає, що існує послідовність $(\alpha_l)_{l\ge1}$ додатних чисел $\alpha_l\to+\infty$, для яких $\alpha_l<\omega_l$, $l\ge1$, і

$$\lim_{l\to\infty}\sup_{x\in\mathfrak{S}^0_{K,\omega_l},\ \|x\|_{\mathfrak{S}^0_{K,\omega_l}}=1}\max_{t\in[-\alpha_l,\omega_l]}\left\|(A_{\omega_l}x)(t)-\left(A|_{\mathfrak{S}^0_K}x\right)(t)\right\|_E=0. \tag{18}$$

Покажемо, що для деякого числа $d>0$ виконується співвідношення

$$\varliminf_{l\to\infty}\inf_{\|x\|_{\mathfrak{S}^1_{K,\omega_l}}=1}\left\|\left(\frac{d}{dt}-A_{\omega_l}\right)x\right\|_{\mathfrak{S}^0_{K,\omega_l}}\ge d. \tag{19}$$

Припустимо протилежне, тоді на підставі (18) існують послідовність $(l_k)_{k\ge1}$ натуральних чисел l_k ($l_k\ge k$, $k\ge1$) і послідовність $(z_k)_{k\ge1}$ функцій $z_k\in\mathfrak{S}^1_{K,\omega_{l_k}}$ ($\|z_k\|_{\mathfrak{S}^1_{K,\omega_{l_k}}}=1$, $k\ge1$), для яких

$$\lim_{k\to\infty}\max_{t\in[-\alpha_{l_k},\omega_{l_k}]}\left\|\left(\left(\frac{d}{dt}-A|_{\mathfrak{S}^0_K}\right)z_k\right)(t)\right\|_E=0. \tag{20}$$

Завдяки включенню $z_k \in \mathfrak{S}^1_{K,\omega_{l_k}}$ знайдеться число $s_k \in [-\alpha_{l_k}/2, \omega_{l_k} - \alpha_{l_k}/2]$, для якого

$$\max\left\{\|z_k(s_k)\|_E, \left\|\frac{dz_k(s_k)}{dt}\right\|_E\right\} = 1. \tag{21}$$

Розглянемо функцію $q_k = q\left(\dfrac{2}{\alpha_{l_k}}(t - s_k)\right)$. Із (20) випливає, що

$$\lim_{k\to\infty}\left\|q_k\left(\frac{d}{dt} - A|_{\mathfrak{S}^0_K}\right)z_k\right\|_{\mathfrak{S}^0_K} = 0.$$

Тому на підставі теореми 6 і зауваження 1

$$\lim_{k\to\infty}\left\|q_k\left(\frac{d}{dt} - A|_{\mathfrak{S}^0_K}\right)z_k - \left(\frac{d}{dt} - A|_{\mathfrak{S}^0_K}\right)q_k z_k\right\|_{\mathfrak{S}^0_K} = 0.$$

Теорему 6 і зауваження 1 можна застосовувати, оскільки на підставі того, що оператор $A|_{\mathfrak{S}^0_K}$: $\mathfrak{S}^0_K \to \mathfrak{S}^0_K$ є $(\mathfrak{S}^0_K, \mathfrak{S}^0_K)$-майже періодичним і c-неперервним, оператор $\dfrac{d}{dt} - A \colon \mathfrak{S}^1_K \to \mathfrak{S}^0_K$ є $(\mathfrak{S}^1_K, \mathfrak{S}^0_K)$-майже періодичним і c-неперервним. Тоді

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\left(\frac{d}{dt} - A|_{\mathfrak{S}^0_K}\right)q_k z_k\right\|_{\mathfrak{S}^0_K} = 0,$$

що суперечить (14), оскільки завдяки (21) $\overline{\lim}_{k\to\infty}\|q_k z_k\|_{\mathfrak{S}^1_K} \in [1, 2]$.

Отже, припущення про невиконання співвідношення (19) є хибним.

Не обмежуючи загальності доведення можна вважати, що замість співвідношення (19) виконується співвідношення

$$\inf_{\|x\|_{\mathfrak{S}^1_{K,\omega_l}}=1}\left\|\left(\frac{d}{dt} - A_{\omega_l}\right)x\right\|_{\mathfrak{S}^0_{K,\omega_l}} \geq d, \quad l \geq 1. \tag{22}$$

Далі покажемо, що рівняння (16) із зафіксованим довільним елементом $y \in \mathfrak{S}^0$ $(y \in \mathfrak{D}^0_K)$ має єдиний розв'язок $x \in \mathfrak{S}^1_K$. Якщо y — нульовий елемент простору $\mathfrak{S}^0_K$, то, очевидно, завдяки (14) рівняння (16) має лише нульовий розв'язок $x \in \mathfrak{S}^1_K$. Будемо вважати, що $y \neq 0$.

Візьмемо довільну послідовність функцій $y_k \in \mathfrak{S}^0_{K,\omega_{l_k}}$, $k \geq 1$, для якої

$$\|y_k\|_{\mathfrak{S}^0_{K,\omega_{l_k}}} \leq \|y\|_{\mathfrak{S}^0_{K,\omega_{l_k}}}, \quad k \geq 1, \tag{23}$$

і

$$y_k \xrightarrow{\text{loc},\ \mathfrak{S}^0_K} y \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{24}$$

Розглянемо рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} - (A_{\omega_{l_k}}x)(t) = y_k(t). \tag{25}$$

Тут оператор $A_{\omega_{l_k}} : \mathfrak{S}^1_{K,\omega_{l_k}} \to \mathfrak{S}^0_{K,\omega_{l_k}}$ цілком неперервний (на підставі узагальненої теореми Арцела), оскільки кожна обмежена множина елементів $x \in \mathfrak{S}^1_{K,\omega_{l_k}}$ є рівностепенево неперервною підмножиною простору $\mathfrak{S}^0_{K,\omega_{l_k}}$. Тому рівняння (25) на підставі (22) має єдиний розв'язок $x_k \in \mathfrak{S}^1_{K,\omega_{l_k}}$, причому

$$\|x_k\|_{\mathfrak{S}^1_{K,\omega_{l_k}}} \leq \frac{\|y\|_{\mathfrak{S}^0_{K,\omega_{l_k}}}}{d}, \quad k \geq 1. \tag{26}$$

Справді, задача про існування розв'язків рівняння (25) у просторі $\mathfrak{S}^1_{K,\omega_{l_k}}$ зводиться до дослідження інтегрального рівняння

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)} \Big[x(s) + (A_{\omega_{l_k}} x)(s)\Big]\, ds + \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)} y_k(s)\, ds \tag{27}$$

із цілком неперервним оператором $\mathfrak{A}_k : \mathfrak{S}^1_{K,\omega_{l_k}} \to \mathfrak{S}^1_{K,\omega_{l_k}}$, що визначається рівністю

$$(\mathfrak{A}_k x)(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)} \Big[x(s) + (A_{\omega_{l_k}} x)(s)\Big]\, ds.$$

Цілковита неперервність оператора $\mathfrak{A}_k : \mathfrak{S}^1_{K,\omega_{l_k}} \to \mathfrak{S}^1_{K,\omega_{l_k}}$ випливає з того, що оператор

$$(D_k x)(t) = x(t) + (A_{\omega_{l_k}} x)(t)$$

є цілком неперервним елементом простору $L\left(\mathfrak{S}^1_{K,\omega_{l_k}}, \mathfrak{S}^0_{K,\omega_{l_k}}\right)$. На підставі повної неперервності оператора $\mathfrak{A}_k$ рівняння (27) є фредгольмовим [21], і тому завдяки (22) рівняння (27), а отже і рівняння (25), для кожної функції $y_k \in \mathfrak{S}^0_{K,\omega_{l_k}}$ має єдиний розв'язок $x_k \in \mathfrak{S}^1_{K,\omega_{l_k}}$. Співвідношення (26) випливає із співвідношень (22) і (23).

Із співвідношень (24) – (26) і теореми 5 випливає, що існують такі функція $u \in \mathfrak{S}^0_K$ і строго зростаюча послідовність $(k_n)_{n \geq 1}$ натуральних чисел, що

$$x_{k_n} \xrightarrow{\text{loc},\ \mathfrak{S}^0_K} u \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{28}$$

Оскільки x_k — розв'язок рівняння (25), то завдяки цьому рівнянню

$$x_{k_n}(t) - x_{k_n}(0) - \int\limits_0^t \left(A|_{\mathfrak{S}^0_K} x_{k_n}\right)(s) ds - \int\limits_0^t \left(\left(A_{\omega_{l_{k_n}}} - A|_{\mathfrak{S}^0_K}\right) x_{k_n}\right)(s) ds = \int\limits_0^t y_{k_n}(s)\, ds$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$. Тому на підставі (24), (18), (28) і c-неперервності оператора $A|_{\mathfrak{S}^0_K}$

$$u(t) - u(0) - \int\limits_0^t \left(A|_{\mathfrak{S}^0_K} u\right)(s) ds = \int\limits_0^t y(s)\, ds$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$. Звідси випливає, що функція $u(t)$ є неперервно диференційовною на $\mathbb{R}$ і

$$\frac{du(t)}{dt} - \left(A|_{\mathfrak{S}^1_K} u\right)(t) \equiv y(t).$$

Таким чином, показано, що для кожної функції $y \in \mathfrak{S}^0_K$ рівняння (16), тобто рівняння (5) у просторі $\mathfrak{S}^1_K$, має розв'язок $u \in \mathfrak{S}^1_K$. Завдяки (14) цей розв'язок єдиний. Отже, оператор $\dfrac{d}{dt} - A|_{\mathfrak{S}^0_K} : \mathfrak{S}^1_K \to \mathfrak{S}^0_K$ на підставі теореми Банаха про обернений оператор [20] має неперервний обернений $\left(\dfrac{d}{dt} - A|_{\mathfrak{S}^0_K}\right)^{-1}$.

Далі покажемо, що

$$\left(\frac{d}{dt} - A|_{\mathfrak{S}^0_K}\right)^{-1} B^0 \subset B^1. \tag{29}$$

Спочатку покажемо, що оператор $\left(\dfrac{d}{dt} - A|_{\mathfrak{S}^0_K}\right)^{-1} : \mathfrak{S}^0_K \to \mathfrak{S}^1_K$ майже періодичний. Із рівностей $\dfrac{d}{dt} - S_\tau A|_{\mathfrak{S}^0_K} S_{-\tau} = S_\tau \left(\dfrac{d}{dt} - A|_{\mathfrak{S}^0_K}\right) S_{-\tau}$, $S_\tau^{-1} = S_{-\tau}$, де $\tau \in \mathbb{R}$, випливає, що оператор $\dfrac{d}{dt} - S_\tau A|_{\mathfrak{S}^0_K} S_{-\tau}$ має неперервний обернений $\left(\dfrac{d}{dt} - S_\tau A|_{\mathfrak{S}^0_K} S_{-\tau}\right)^{-1}$, $\left(\dfrac{d}{dt} - S_\tau A|_{\mathfrak{S}^0_K} S_{-\tau}\right)^{-1} = S_\tau \left(\dfrac{d}{dt} - A|_{\mathfrak{S}^0_K}\right)^{-1} S_{-\tau}$ і

$$\left\| \left(\frac{d}{dt} - S_\tau A|_{\mathfrak{S}^0_K} S_{-\tau}\right)^{-1} \right\|_{L(\mathfrak{S}^0_K, \mathfrak{S}^1_K)} = \left\| \left(\frac{d}{dt} - A|_{\mathfrak{S}^0_K}\right)^{-1} \right\|_{L(\mathfrak{S}^0_K, \mathfrak{S}^1_K)} \tag{30}$$

для всіх $\tau \in \mathbb{R}$.

Використаємо замкнені множини

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{S}^1_K, \mathfrak{S}^0_K} = \overline{\left\{ S_h \left(\frac{d}{dt} - A|_{\mathfrak{S}^0_K}\right) S_{-h} : h \in \mathbb{R} \right\}}$$

і

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{S}^0_K, \mathfrak{S}^1_K} = \overline{\left\{ S_h \left(\frac{d}{dt} - A|_{\mathfrak{S}^0_K}\right)^{-1} S_{-h} : h \in \mathbb{R} \right\}}$$

у просторах $L(\mathfrak{S}^1_K, \mathfrak{S}^0_K)$ і $L(\mathfrak{S}^0_K, \mathfrak{S}^1_K)$ відповідно. Перша із цих множин компактна. Покажемо, що друга множина має таку ж властивість.

Розглянемо довільну послідовність $(D_n)_{n \geq 1}$ елементів $D_n \in \mathcal{H}_{\mathfrak{S}^0_K, \mathfrak{S}^1_K}$. Існує така послідовність $(\tau_n)_{n \geq 1}$ дійсних чисел, що

$$\left\| D_n - \left(\frac{d}{dt} - S_{\tau_n} A|_{\mathfrak{S}^0_K} S_{-\tau_n}\right)^{-1} \right\|_{L(\mathfrak{S}^0_K, \mathfrak{S}^1_K)} < \frac{1}{n}, \quad n \geq 1. \tag{31}$$

Із компактності множини $\mathcal{H}_{\mathfrak{S}^1_K, \mathfrak{S}^0_K}$ випливає існування оператора $B \in \mathcal{H}_{\mathfrak{S}^1_K, \mathfrak{S}^0_K}$ і строго зростаючої послідовності натуральних чисел n_k, для яких

$$\lim_{k\to\infty}\left\|B-\left(\frac{d}{dt}-S_{\tau_{n_k}}A|_{\mathfrak{S}^0_K}S_{-\tau_{n_k}}\right)\right\|_{L(\mathfrak{S}^1_K,\mathfrak{S}^0_K)}=0. \tag{32}$$

Із співвідношень (30), (32) і рівностей

$$\left(\frac{d}{dt}-S_\tau A|_{\mathfrak{S}^0_K}S_{-\tau}\right)\mathfrak{S}^1_K=S_\tau\left(\frac{d}{dt}-A|_{\mathfrak{S}^0_K}\right)S_{-\tau}\mathfrak{S}^1_K=$$

$$=S_\tau\left(\frac{d}{dt}-A|_{\mathfrak{S}^0_K}\right)\mathfrak{S}^1_K=S_\tau\mathfrak{S}^0_K=\mathfrak{S}^0_K,\quad \tau\in\mathbb{R},$$

випливає, що оператор B має неперервний обернений B^{-1},

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\left(\frac{d}{dt}-S_{\tau_{n_k}}A|_{\mathfrak{S}^0_K}S_{-\tau_{n_k}}\right)^{-1}-B^{-1}\right\|_{L(\mathfrak{S}^0_K,\mathfrak{S}^1_K)}=0$$

і

$$B^{-1}\in\mathcal{H}_{\mathfrak{S}^1_K,\mathfrak{S}^0_K}.$$

Тоді завдяки (31)

$$\lim_{k\to\infty}\left\|D_{n_k}-B^{-1}\right\|_{L(\mathfrak{S}^0_K,\mathfrak{S}^1_K)}=0,$$

що доводить компактність множини $\mathcal{H}_{\mathfrak{S}^0_K,\mathfrak{S}^1_K}$. Отже, $\left(\frac{d}{dt}-A|_{\mathfrak{S}^0_K}\right)^{-1}$ — майже періодичний елемент простору $L(\mathfrak{S}^0_K,\mathfrak{S}^1_K)$.

Тепер доведемо включення (29).

Нехай $y\in B^0$. Покажемо, що $\left(\frac{d}{dt}-A|_{\mathfrak{S}^0_K}\right)^{-1}y\in B^1$, тобто замикання $\overline{M}$ множини $M=\left\{S_\tau\left(\frac{d}{dt}-A|_{\mathfrak{S}^0_K}\right)^{-1}y\colon \tau\in\mathbb{R}\right\}$ в B^1 компактне в B^1. Позначимо через $\mathcal{H}_{B^0}(y)$ замикання множини $\{S_\tau y\colon \tau\in\mathbb{R}\}$ в B^0. Очевидно, що $\overline{M}\subset N$, де $N=\{Bz\colon B\in\mathcal{H}_{\mathfrak{S}^0_K,\mathfrak{S}^1_K},\ z\in\mathcal{H}_{B^0}(y)\}$. Оскільки множина $\mathcal{H}_{\mathfrak{S}^0_K,\mathfrak{S}^1_K}$ компактна в $L(\mathfrak{S}^0_K,\mathfrak{S}^1_K)$, а множина $\mathcal{H}_{B^0}(y)$ компактна в B^0 завдяки включенню $y\in B^0$, то множина N компактна в B^1, тобто $\left(\frac{d}{dt}-A|_{\mathfrak{S}^0_K}\right)^{-1}y\in B^1$.

Таким чином, достатність доведено.

Необхідність. Нехай рівняння (5) для кожного $y\in\mathfrak{S}^0$ має єдиний розв'язок $x\in\mathfrak{S}^1$ і $x\in B^1$, якщо $y\in B^0$. Тоді оператор $\frac{d}{dt}-A\colon\mathfrak{S}^1\to\mathfrak{S}^0$ має неперервний обернений $\left(\frac{d}{dt}-A\right)^{-1}$ і, отже,

$$\inf_{x\in\mathfrak{S}^1,\ \|x\|_{\mathfrak{S}^1}=1}\left\|\left(\frac{d}{dt}-A\right)x\right\|_{\mathfrak{S}^0}>0.$$

Оскільки для всіх $K\in\mathcal{K}^A_{\text{a.c.}}$

$$\inf_{x\in\mathfrak{S}^1_K,\ \|x\|_{\mathfrak{S}^1_K}=1}\left\|\left(\frac{d}{dt}-A|_{\mathfrak{S}^0_K}\right)x\right\|_{\mathfrak{S}^0_K}=\inf_{x\in\mathfrak{S}^1_K,\ \|x\|_{\mathfrak{S}^1_K}=1}\left\|\left(\frac{d}{dt}-A\right)x\right\|_{\mathfrak{S}^0_K}\geq$$

$$\geq\inf_{x\in\mathfrak{S}^1,\ \|x\|_{\mathfrak{S}^1}=1}\left\|\left(\frac{d}{dt}-A\right)x\right\|_{\mathfrak{S}^0},$$

то необхідність доведено.

Теорему 7 доведено.

Окремими випадками теореми 7 є такі два твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай звуження $A|_{\mathfrak{S}^0}$ оператора $A\in L(C^0,C^0)$ на простір $\mathfrak{S}^0$ є автономним c-неперервним елементом простору $L(\mathfrak{S}^0,\mathfrak{S}^0)$ і $A\mathfrak{S}^0\subset\mathfrak{S}^0$.*

Для того щоб рівняння (5) *для кожного $y\in\mathfrak{S}^0$ мало єдиний розв'язок $x\in\mathfrak{S}^1$ і $x\in B^1$, якщо $y\in B^0$, необхідно і достатньо, щоб*

$$\left(\frac{d}{dt}-A\right)z\neq 0 \tag{33}$$

для всіх ненульових $z\in\mathfrak{S}^1$.

Доведення. Очевидно, що достатньо показати рівносильність співвідношень (15) і (33).

Із (15), очевидно, випливає (33).

Покажемо, що з (33) випливає (15). Припустимо, що для деякого $K\in\mathcal{K}^A_{\text{a.c.}}$

$$\inf_{x\in\mathfrak{S}^1_K,\ \|x\|_{\mathfrak{S}^1_K}=1}\left\|\frac{dx}{dt}-A|_{\mathfrak{S}^0_K}x\right\|_{\mathfrak{S}^0_K}=0. \tag{34}$$

Завдяки автономності оператора $A|_{\mathfrak{S}^0}$ існують нормована послідовність $(x_n)_{n\geq1}$ елементів простору $\mathfrak{S}^1$ і число $\delta>0$, для яких

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{dx_n}{dt}-A|_{\mathfrak{S}^0_K}x_n\right\|_{\mathfrak{S}^0_K}=0$$

і

$$\|x_n(0)\|_E\geq\delta,\quad n\geq1.$$

Не обмежуючи загальності доведення можна вважати, що на підставі теореми 5 існує функція $u\in\mathfrak{S}^0_K$, для якої

$$x_n\xrightarrow{\text{loc},\ \mathfrak{S}^0_K}u\quad\text{при}\quad n\to\infty$$

і

$$\delta\leq\|u\|_{\mathfrak{S}^0_K}\leq1.$$

Аналогічно, як і при доведенні достатності теореми 7 з урахуванням c-неперервності оператора $A|_{\mathfrak{S}^0}$, переконуємося в тому, що u належить $\mathfrak{S}^1_K$ і

$$\left(\frac{d}{dt}-A|_{\mathfrak{S}^0_K}\right)u=0.$$

Отримана рівність суперечить (33).

Отже, припущення про виконання співвідношення (34) для деякого $K \in \mathcal{K}^A_{\text{a.c.}}$ є хибним.

Таким чином, співвідношення (15) і (33) рівносильні. Звідси випливає твердження наслідку 1.

Наслідок 2. *Нехай оператор $A \in L(C^0, C^0)$ для деякого $K \in \mathcal{K}^A_{\text{a.c.}}$ є $(\mathfrak{S}^0_K, \mathfrak{S}^0_K)$-майже періодичним і звуження $A|_{\mathfrak{S}^0_K}$ оператора A на простір $\mathfrak{S}^0_K$ є c-неперервним елементом простору $L(\mathfrak{S}^0_K, \mathfrak{S}^0_K)$.*

Для того щоб рівняння (5) для кожного $y \in \mathfrak{S}^0_K$ мало єдиний розв'язок $x \in \mathfrak{S}^1_K$ і $x \in B^1$, якщо $y \in B^0$, необхідно і достатньо, щоб

$$\inf_{x \in \mathfrak{S}^1_K,\ \|x\|_{\mathfrak{S}^1_K}=1} \left\| \frac{dx}{dt} - Ax \right\|_{\mathfrak{S}^0_K} > 0.$$

Зауваження **2.** Теорема 7 і, зокрема, наслідок 2 узагальнюють теорему Мухамадієва (теорему 2), оскільки, наприклад, у наслідку 2 множина $K \in \mathcal{K}^A_{\text{a.c.}}$ може не бути підмножиною скінченновимірного простору. Також важливою властивістю цих тверджень є те, що в них не використовується $\mathcal{H}$-клас рівняння (3).

4. Додаткові зауваження та літературні вказівки. Основні результати статті (теорема 7 і наслідки 1, 2) є важливим доповненням до досліджень майже періодичності обмежених розв'язків лінійних і нелінійних рівнянь без використання $\mathcal{H}$-класів відповідних рівнянь [6 – 16].

Теорема 7 і наслідок 2 узагальнюють теорему Мухамадієва (теорему 2) про оборотність майже періодичних у сенсі означення 2 диференціально-функціональних операторів у просторі обмежених на осі функцій зі значеннями в скінченновимірному просторі E (у теоремі 7 та наслідку 2 простір E нескінченновимірний і не використовуються $\mathcal{H}$-класи досліджуваних рівнянь).

Усі наведені в п. 3 результати про існування й єдиність обмежених і майже періодичних розв'язків лінійних диференціально-функціональних рівнянь є новими, оскільки банаховий простір E нескінченовимірний. На відміну від теорем Фавара [1, 2, 19], Амеріо [22, 23] і Мухамадієва [3, 4] в теоремі 7 і наслідку 2 не використовуються $\mathcal{H}$-класи відповідних рівнянь.

Самостійний інтерес мають означення 5 $(\mathfrak{S}^k, \mathfrak{S}^m)$-майже періодичного оператора і теореми 4 – 6.

Дослідженню майже періодичних рівнянь присвячено багато публікацій. Для звичайних лінійних диференціальних рівнянь перші теореми про майже періодичні розв'язки були доведені Фаваром у роботі [19], а для нелінійних диференціальних рівнянь — Амеріо в роботі [22]. У цих працях суттєво використовуються $\mathcal{H}$-класи досліджуваних рівнянь, а в [22] — також вимога відокремленості обмежених розв'язків рівнянь. Результати Фавара суттєво покращені Е. Мухамадієвим [3, 4]. Узагальненням теорем Мухамадієва присвячено статті [24 – 26]. Важливі результати в цьому напрямку також належать Б. М. Левітану [1], М. А. Шубіну [27] і В. В. Жикову [28].

Необхідні і достатні умови існування й єдиності обмежених і майже періодичних розв'язків нелінійного диференціального рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} + f(x(t) + h_1(t)) = h_2(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

де $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервне відображення і h_1, h_2 — елементи простору C^0 або B^0 при $E = \mathbb{R}$, розглянуто у [29] (у випадку $h_1(t) \equiv 0$), у [30] (у випадку $h_2(t) \equiv 0$) і в [31] (у випадку $|h_1(t)| + |h_2(t)| \not\equiv 0$).

Література

1. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.
2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
3. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. – 1972. – **11**, № 3. – С. 269 – 274.
4. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений // Мат. заметки. – 1981. – **30**, № 3. – С. 443 – 460.
5. *Робертсон А. П., Робертсон В. Дж.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1967. – 258 с.
6. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні розв'язки нелінійних дискретних систем, що можуть не бути майже періодичними за Бохнером // Нелінійні коливання. – 2014. – **17**, № 3. – С. 407 – 418.
7. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні розв'язки нелінійних рівнянь, що можуть не бути майже періодичними за Бохнером // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 2. – С. 230 – 244.
8. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання. – 2013. – **16**, № 1. – С. 118 – 124.
9. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 2. – С. 307 – 312.
10. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з дискретним аргументом // Нелінійні коливання. – 2013. – **16**, № 3. – С. 416 – 425.
11. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків не розв'язаних відносно похідної нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 3. – С. 384 – 393.
12. *Slyusarchuk V. Yu.* Almost periodic solutions of difference equations with discrete argument on metric space // Miskolc Math. Notes. – 2014. – **15**, № 1. – P. 211 – 215.
13. *Слюсарчук В. Е.* Исследование нелинейных почти периодических дифференциальных уравнений, не использующее $\mathcal{H}$-классы этих уравнений // Мат. сб. – 2014. – **205**, № 6. – С. 139 – 160.
14. *Слюсарчук В. Е.* Условия почти периодичности ограниченных решений нелинейных дифференциально-разностных уравнений // Изв. РАН. Сер. мат. – 2014. – **78**, № 6. – С. 179 – 192.
15. *Слюсарчук В. Е.* К теории Фавара для функциональных уравнений // Сиб. мат. журн. – 2017. – **58**, № 1. – С. 206 – 218.
16. *Слюсарчук В. Ю.* Теорія Фавара – Амеріо для майже періодичних функціонально-диференціальних рівнянь без використання $\mathcal{H}$-класів цих рівнянь // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, № 6. – С. 788 – 802.
17. *Слюсарчук В. Е.* Метод c-непрерывных операторов в теории импульсных систем // Тез. докл. Всесоюз. конф. по теории и приложениям функционально-дифференциальных уравнений. – 1987. – С. 102 – 103.
18. *Слюсарчук В. Е.* Слабо нелинейные возмущения импульсных систем // Мат. физика и нелинейная механика. – 1991. – Вып. 15(49). – С. 32 – 35.
19. *Favard J.* Sur les équations différentielles à coefficients presquepériodiques // Acta math. – 1927. – **51**. – P. 31 – 81.
20. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
21. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.
22. *Amerio L.* Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati // Ann. Mat. Pura ed Appl. – 1955. – **39**. – P. 97 – 119.
23. *Amerio L.* Sull equazioni differenziali quasi-periodiche astratte // Ric. Mat. – 1960. – **30**. – P. 288 – 301.
24. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. – 1981. – **116**, № 4.– С. 483 – 501.
25. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. – 1986. – **130**, № 1. – С. 86 – 104.
26. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. – 1987. – **42**, № 2. – С. 262 – 267.

27. *Шубин М. А.* Почти периодические функции и дифференциальные операторы с частными производными // Успехи мат. наук. – 1978. – **28**, вып. 2. – С. 3 – 47.
28. *Жиков В. В.* Доказательство теоремы Фавара о существовании почти-периодического решения в случае произвольного банахова пространства // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 1. – С. 121 – 126.
29. *Slyusarchuk V. E.* Necessary and sufficient conditions for existence and uniqueness of bounded and almost-periodic solutions of nonlinear differential equations // Acta Appl. Math. – 2001. – **65**, № 1–3. – P. 333 – 341.
30. *Слюсарчук В. Ю.* Умови розв'язності нелінійних диференціальних рівнянь зі збуренням розв'язків у просторі обмежених на осі функцій // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 9. – С. 1286 – 1296.
31. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия существования и единственности ограниченных решений уравнения $\dfrac{dx(t)}{dt} = f(x(t) + h_1(t)) + h_2(t)$ // Мат. сб. – 2017. – **208**, № 2. – С. 88 – 103.

Одержано 20.10.17