К О Р О Т К І   П О В І Д О М Л Е Н Н Я

УДК 517.54

А. К. Бахтин, И. В. Денега (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ВНУТРЕННИХ РАДИУСОВ НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ

We consider the problem of maximum of the functional

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right),$$

where $B_0,\ldots,B_n$, $n\geq 2$, are pairwise disjoint domains in $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0=0$, $|a_k|=1$, $k=\overline{1,n}$, and $\gamma\in(0,n]$ ($r(B,a)$ is the inner radius of the domain $B\subset\overline{\mathbb{C}}$ with respect to a). Show that it attains its maximum at a configuration of domains B_k and points a_k possessing rotational n-symmetry. This problem was solved by Dubinin for $\gamma=1$ and by Kuz'mina for $0<\gamma<1$. Later, Kovalev solved this problem for $n\geq 5$ under an additional assumption that the angles between neighboring linear segments $[0,a_k]$ do not exceed $2\pi/\sqrt{\gamma}$. We generalize this problem to the case of arbitrary locations of the systems of points in the complex plane and obtain some estimates for the functional for all n and $\gamma\in(1,n]$.

Розглядається задача про максимум функціонала

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k),$$

де $B_0,\ldots,B_n$, $n\geq 2$, — області в $\overline{\mathbb{C}}$, що взаємно не перетинаються, $a_0=0$, $|a_k|=1$, $k=\overline{1,n}$, і $\gamma\in(0,n]$ ($r(B,a)$ — внутрішній радіус області $B\subset\overline{\mathbb{C}}$ відносно a). Потрібно показати, що максимум досягається при конфігурації областей B_k і точок a_k, які мають n-кратну симетрію. В. М. Дубінін розв'язав її при $\gamma=1$, Г. В. Кузьміна — при $0<\gamma<1$. Пізніше Л. В. Ковальов розв'язав цю задачу при $n\geq 5$ і додатковому припущенні, що кути між сусідніми відрізками $[0,a_k]$ не перевищують $2\pi/\sqrt{\gamma}$. У статті цю задачу узагальнено на випадок довільного розташування систем точок на комплексній площині й отримано деякі оцінки функціонала для всіх n і $\gamma\in(1,n]$.

Задачи о максимизации произведения внутренних радиусов непересекающихся областей хорошо известны в геометрической теории функций комплексной переменной [1 – 16]. Одна из задач такого рода рассматривается в данной статье. Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — одноточечная компактификация комплексной плоскости или сфера Римана, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множества натуральных и вещественных чисел соответственно, $\mathbb{R}^+=(0,\infty)$. Величина $r(B,a)$ обозначает внутренний радиус области $B\subset\overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a\in B$. Внутренний радиус области B связан с обобщенной функцией Грина $g_B(z,a)$ области B соотношениями

$$g_B(z,a)=-\ln|z-a|+\ln r(B,a)+o(1),\quad z\to a,$$

$$g_B(z,\infty)=\ln|z|+\ln r(B,\infty)+o(1),\quad z\to\infty.$$

Систему точек $A_n:=\left\{a_k\in\mathbb{C},\ k=\overline{1,n}\right\}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, назовем n-лучевой, если $|a_k|\in\mathbb{R}^+$ при $k=\overline{1,n}$ и $0=\arg a_1<\arg a_2<\ldots<\arg a_n<2\pi$. Введем обозначения $a_{n+1}:=a_1$, $\alpha_k:=\dfrac{1}{\pi}\arg\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1}:=\alpha_1$, $k=\overline{1,n}$, $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=2$.

Рассмотрим следующую экстремальную задачу со свободными полюсами на $\overline{\mathbb{C}}$.

Задача. При всех фиксированных значениях параметра $\gamma \in (0, n]$ и $R \in \mathbb{R}^+$ найти максимум функционала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k), \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ a_0 = 0,\ |a_k| \in \mathbb{R}^+,\ 0 < |a_k| \leq R,\ k = \overline{1,n},$ — такая система различных точек, что $\prod_{k=1}^{n} |a_k| \leq 1,\ \{B_k\}_{k=0}^{n}$ — система взаимно непересекающихся областей (т. е. $B_p \cap B_j = \varnothing$ при $p \neq j,\ p, j = \overline{0,n}$) таких, что $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$ при $k = \overline{0,n},$ и описать все экстремали.

Эта задача в случае $|a_k| = 1,\ k = \overline{1,n},$ была поставлена в качестве открытой проблемы в работе [1]. В настоящее время она полностью не решена, ее частичные случаи изучались во многих работах (см., например, [1 – 16]). В работе [1] для случая единичной окружности она была решена для значения параметра $\gamma = 1$ и всех значений натурального параметра $n \geq 2$. А именно, было показано, что при ее условиях выполняется неравенство

$$r(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq r(D_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k),$$

где $d_k,\ D_k,\ k = \overline{0,n},$ — полюсы и круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - 1)w^n + 1}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

Л. В. Ковалев [3] в 1996 г. получил решение задачи при определенных достаточно жестких ограничениях на геометрию расположения систем точек на единичной окружности, а именно для систем точек, для которых выполняются условия

$$|a_k| = 1, \quad 0 < \alpha_k \leq 2/\sqrt{\gamma}, \quad k = \overline{1,n}, \quad n \geq 5.$$

В работе [9] показано, что результат Л. В. Ковалева справедлив и при $n = 4$. В 2003 г. в работе [2] было получено решение этой задачи при $\gamma \in (0, 1]$. В монографии [8] было показано, что аналог результата В. Н. Дубинина [1] выполняется для произвольного $\gamma \in \mathbb{R}^+$, но начиная с некоторого номера $n_0(\gamma)$. Также в монографии [8] был предложен метод „управляющих” функционалов, который позволяет ослабить условия на геометрию расположения систем точек. В результате этого удалось обобщить проблему В. Н. Дубинина.

Поскольку решить эту задачу для всех $\gamma \in (1, n]$ до сих пор не удалось, целью данной работы является получение оценки для функционала (1) при всех $\gamma \in (1, n]$, которая как можно меньше уклоняется от значения функционала $I_n(\gamma)$, достигаемого на системе круговых областей и полюсов квадратичного дифференциала (см. [1, 3, 7, 8])

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\left(n^2 - \gamma\right) w^n + \gamma}{w^2 \left(w^n - 1\right)^2}\, dw^2. \tag{2}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (1, n]$. *Тогда для любой системы фиксированных различных точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n} \in \mathbb{C}/\{0\}$ *такой, что*

$$\prod_{k=1}^{n} |a_k| \leq 1,$$

и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, *выполняется неравенство*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $d(E)$ — трансфинитный диаметр компактного множества $E \subset \mathbb{C}$. Тогда справедливы соотношения

$$r\left(B_0, 0\right) = r\left(B_0^{+}, \infty\right) = \frac{1}{d\left(\overline{\mathbb{C}} \setminus B_0^{+}\right)} \leq \frac{1}{d\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{B}_k^{+}\right)}, \tag{4}$$

где $B^{+} = \left\{ z; \dfrac{1}{z} \in B \right\}$.

В силу известной теоремы Пойа [16, с. 28] имеет место неравенство

$$\mu E \leq \pi d^2(E),$$

где μE обозначает лебегову меру компактного множества E. Отсюда получаем

$$d(E) \geq \left(\frac{1}{\pi} \mu E \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда из (4) находим

$$r\left(B_0, 0\right) \leq \frac{1}{d\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{B}_k^{+}\right)} \leq \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\pi} \mu \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{B}_k^{+}\right)}} = \left[\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \mu \overline{B}_k^{+} \right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Для произвольной ограниченной области B, $a \in B$, рассмотрим класс всех регулярных функций $\varphi(z)$, $\varphi(a) = 0$, $\varphi'(a) = 1$, заданных в области B, и площадь образа области B при отображении произвольной функцией $\varphi(z)$. Из теоремы о минимизации площади [5, с. 34] следует, что

$$\iint\limits_{B} \left| \varphi'(z) \right|^2 dx dy \geq \pi r^2(B, a), \tag{6}$$

где $r(B, a)$ — внутренний радиус области B относительно точки a.

Пусть $\varphi_1(z) = (z - a)$, тогда из (6) имеем

$$S(B) = \mu(B) \geq \pi r^2(B, a).$$

Из неравенства (5) непосредственно следует, что

$$r(B_0,0)\le\left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\mu\overline{B}_k^+\right]^{-\frac{1}{2}}\le\left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\mu B_k^+\right]^{-\frac{1}{2}}\le\left[\sum_{k=1}^{n}r^2\left(B_k^+,a_k^+\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда получаем неравенство

$$r(B_0,0)\le\frac{1}{\left[\sum_{k=1}^{n}r^2\left(B_k^+,a_k^+\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Используя конформную инвариантность функции Грина, имеем

$$g_{B_k}(z,a_k)=g_{B_k^+}\left(w^+,a_k^+\right),\quad w^+=\frac{1}{z}.$$

Тогда

$$g_{B_k^+}\left(w^+,a_k^+\right)=g_{B_k^+}\left(\frac{1}{z},\frac{1}{a_k}\right)=\ln\frac{1}{\left|\frac{1}{z}-a_k^+\right|}+\ln r\left(B_k^+,a_k^+\right)+o(1).$$

Используя несложные преобразования, получаем

$$g_{B_k^+}\left(w^+,a_k^+\right)=\ln\frac{|z|}{\left|1-za_k^+\right|}+\ln r\left(B_k^+,a_k^+\right)+o(1)=$$

$$=\ln\frac{|z|}{\left|a_k^+\right|}\frac{1}{\left|\frac{1}{a_k^+}-z\right|}+\ln r\left(B_k^+,a_k^+\right)+o(1)=$$

$$=\ln\frac{1}{|z-a_k|}+\ln|a_kz|+\ln r\left(B_k^+,a_k^+\right)+o(1)=$$

$$=\ln\frac{1}{|z-a_k|}+\ln|a_k|^2+\ln\left|1-\frac{1}{a_k}(z-a_k)\right|+\ln r\left(B_k^+,a_k^+\right)+o(1)=$$

$$=\ln\frac{1}{|z-a_k|}+\ln|a_k|^2r\left(B_k^+,a_k^+\right)+o(1).$$

Таким образом,

$$r\left(B_k^+,a_k^+\right)=\frac{r(B_k,a_k)}{|a_k|^2},$$

и мы приходим к неравенству

$$r(B_0,0)\le\left[\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\dfrac{r^2(B_k,a_k)}{|a_k|^4}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Из предположения теоремы следует соотношение

$$\Delta = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq \frac{\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)}{\left[\sum_{k=1}^{n} \dfrac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}},$$

где Δ — максимум функционала $I_n(\gamma)$. Из неравенства Коши автоматически получаем соотношение

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4} \geq \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Отсюда, используя соотношение

$$\prod_{k=1}^{n} |a_k| \leq 1,$$

нетрудно получить неравенства

$$\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}} \geq \left[n \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{\gamma}{2}} \geq n^{\frac{\gamma}{2}} \left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)\right]^{\frac{\gamma}{n}}.$$

Таким образом,

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq \frac{\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)}{n^{\frac{\gamma}{2}} \left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)\right]^{\frac{\gamma}{n}}} = n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Отсюда получаем неравенство (3).

Теорема 1 доказана.

Замечание. Если $\gamma = n$, то при условиях теоремы 1 имеем соотношение

$$r^{n}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{n}{2}}.$$

На множестве всех n-лучевых систем точек введем „управляющий” функционал

$$\mathcal{L}(A_n) := \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right) |a_k|, \quad \chi(t) := \frac{1}{2}\left(t + t^{-1}\right).$$

Как следствие теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (1, n]$. Тогда для произвольной n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ такой, что $\mathcal{L}(A_n) = 1$, и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, выполняется неравенство* (3).

В работе [8] (теорема 5.1.1) для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ и любой системы взаимно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, доказано неравенство

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq 2^n \mathcal{L}(A_n) \prod_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

Используя это неравенство и теорему 2, получаем следующие утверждения.

***Следствие* 1.** *Пусть* $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ \gamma \in (1, n]$. *Тогда для произвольной* n*-лучевой системы точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *такой, что* $\mathcal{L}(A_n) = 1$, *и любых взаимно непересекающихся областей* $B_k,\ a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}},\ k = \overline{0, n},\ a_0 = 0$, *выполняется неравенство*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 2^{(n-\gamma)} n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

В случае, когда $\alpha_k = \dfrac{2}{n},\ k = \overline{1, n}$, справедлив следующий результат.

***Следствие* 2.** *Пусть* $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ \gamma \in (1, n]$. *Тогда для произвольной* n*-лучевой системы точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *такой, что* $\mathcal{L}(A_n) = 1$, *и любых взаимно непересекающихся областей* $B_k,\ a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}},\ k = \overline{0, n},\ a_0 = 0$, *выполняется неравенство*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{4}{n} \right)^{n-\gamma}.$$

При изучении сформулированной выше задачи в работах [1, 3, 7, 8] было показано, что максимум функционала $I_n(\gamma)$ достигается на системе круговых областей D_k и системе полюсов $d_k,\ k = \overline{0, n}$, квадратичного дифференциала (2). Пусть

$$I_n^0(\gamma) = r^\gamma(D_0, d_0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k),$$

тогда из теоремы 5.2.3 [8] имеем

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n} \right)^n \frac{\left(\dfrac{4\gamma}{n^2} \right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \dfrac{\gamma}{n^2} \right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}} \right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Оценки максимума функционала $I_n(\gamma)$ из теоремы 1 и величины $I_n^0(\gamma)$ при $\gamma = n$ для $n = \overline{2, 10}$ приведены в таблице.

n	$I_n^0(n)$	$I_n(n)$	$I_n(n) - I_n^0(n)$	$\dfrac{I_n(n) - I_n^0(n)}{I_n^0(n)}$
2	0,4373948985	0,5000000000	0,0626051015	0,14313176
3	0,1670457996	0,1924500897	0,0254042901	0,15207979
4	0,0520245897	0,0625000000	0,0104754103	0,20135498
5	0,0135131849	0,0178885438	0,0043753589	0,32378443
6	0,0029989525	0,0046296296	0,0016306771	0,54374889
7	0,0005800482	0,0011019372	0,0005218890	0,89973385
8	0,0000993416	0,0002441406	0,0001447990	1,45758675
9	0,0000152588	0,0000508053	0,0000355465	2,32957375
10	0,0000021241	0,0000100000	0,0000078759	3,70787628

Как видно из этой таблицы, оценки максимума функционала $I_n(n)$ незначительно отличаются от значений величины $I_n^0(n)$.

Литература

1. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1(295). – С. 3 – 76.
2. *Kuz'mina G. V.* The method of extremal metric in extremal decomposition problems with free parameters // J. Math. Sci. – 2005. – **129**, № 3. – P. 3843 – 3851.
3. *Ковалев Л. В.* К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности // Дальневост. мат. сб. – 1996. – № 2. – С. 96 – 98.
4. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 159 – 245.
5. *Goluzin G. M.* Geometric theory of functions of a complex variable. – Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1969.
6. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
7. *Dubinin V. N.* Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory. – Basel: Birkhäuser/Springer, 2014. – 344 p.
8. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2008. – 308 с.
9. *Bakhtin A. K., Denega I. V.* Addendum to a theorem on extremal decomposition of the complex plane // Bull. Soc. Sci. Lett. Lódź. Sér. Rech. Déform. – 2012. – **62**, № 2. – P. 83 – 92.
10. *Denega I. V.* Generalization of some extremal problems on non-overlapping domains with free poles // Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska. – 2013. – **67**, № 1. – P. 11 – 22.
11. *Bakhtin A., Dvorak I., Denega I.* Separating transformation and extremal decomposition of the complex plane // Bull. Soc. Sci. Lett. Lódź. Sér. Rech. Déform. – 2016. – **66**, № 2. – P. 13 – 20.
12. *Bakhtin A., Vygivska L., Denega I.* N-radial systems of points and problems for non-overlapping domains // Lobachevskii J. Math. – 2017. – **38**, № 2. – P. 229 – 235.
13. *Bakhtin A. K., Zabolotnii Ya. V.* Estimates of a product of the inner radii of nonoverlapping domains // J. Math. Sci. – 2017. – **221**, № 5. – P. 623 – 629.
14. *Bakhtin A. K., Vygivska L. V., Denega I. V.* Inequalities for the internal radii of non-overlapping domains // J. Math. Sci. – 2017. – **220**, № 5. – P. 584 – 590.
15. *Denega I. V., Zabolotnii Ya. V.* Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane // Complex Var. and Elliptic Equat. – 2017. – **62**, № 11. – P. 1611 – 1618.
16. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. – М.: Физматгиз, 1962. – 336 с.

Получено 20.12.18