УДК 517.5

Ф. Г. Абдуллаєв (Киргиз.-Тур. ун-т „Манас”, Бішкек; Мерсін. ун-т, Туреччина),
Д. М. Бушев (Східноєвроп. нац. ун-т ім. Л. Українки, Луцьк),
М. Імаш кизи (Киргиз.-Тур. ун-т „Манас”, Бішкек),
Ю. І. Харкевич (Східноєвроп. нац. ун-т ім. Л. Українки, Луцьк)

ІЗОМЕТРИЧНІСТЬ ПІДПРОСТОРІВ РОЗВ’ЯЗКІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПРОСТОРАМ ДІЙСНИХ ФУНКЦІЙ

We determine the subspaces of solutions of the systems of Laplace and heat-conduction differential equations isometric to the corresponding spaces of real functions determined on the set of real numbers.

Знайдено підпростори розв’язків систем диференціальних рівнянь Лапласа і теплопровідності, що ізометричні відповідним просторам дійсних функцій, визначених на множині дійсних чисел.

1. Вступ. У статті [1] побудовано простори функцій $n+k$ змінних, ізометричні просторам дійсних функцій, заданих на дійсному n-вимірному евклідовому просторі. Для побудови підпросторів розв’язків диференціальних рівнянь і їхніх систем, ізометричних просторам дійсних функцій, було необхідно встановити умови збіжності згортки функцій із дельтоподібним ядром до цієї функції. Це було зроблено у статті [2]. В даній статті виділено підпростори розв’язків систем диференціальних рівнянь, які є просторами згорток із дельтоподібними ядрами Абеля – Пуассона, Ґаусса – Вейєрштрасса, що ізометричні просторам дійсних функцій однієї змінної. При доведенні отриманих результатів використовуються твердження з робіт [1 – 3] і методи їхніх доведень.

Нехай $\overline{\Pi}_n^+ = \big\{(x,\overline{y}) = (x, y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n) : (x \in R) \wedge (y_i \geq 0) \wedge (i = \overline{1,n})\big\}$ — підпростір простору $(n+1)$-вимірних векторів R^{n+1}, у яких всі координати вектора $\overline{y}$ невід’ємні; $\Pi_n^+ = \big\{(x,\overline{y}) = (x, y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n) : (x \in \mathbb{R}) \wedge (y_i > 0) \wedge (i = \overline{1,n})\big\}$ — підпростір простору $\overline{\Pi}_n^+$ векторів, в яких всі координати вектора $\overline{y}$ додатні; $C\overline{\Pi}_n^+$ — простори неперервних і обмежених функцій на множині $\overline{\Pi}_n^+$; $C^\infty(\Pi_n^+)$ — простори нескінченно диференційовних функцій на множині Π_n^+, тобто функцій, у яких частинні похідні будь-якого порядку неперервні на множині Π_n^+; $M^+(\Pi_n^+)$ — простори функцій $f(x,\overline{y}) = f(x, y_1, \ldots, y_n)$, визначених на множині Π_n^+ і обмежених при кожному $\overline{y} \geq \overline{y}_0 > \overline{0}$, тобто таких, для яких при кожному $\overline{y}_0 > \overline{0}$ виконується нерівність $\sup_{\overline{y} \geq \overline{y}_0} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x,\overline{y})| < K(\overline{y}_0)$, де $K(\overline{y}_0)$ — стала, що залежить лише від $\overline{y}_0$, нерівність $\overline{y}_0 > \overline{0}$ означає, що всі координати вектора $\overline{y}_0$ додатні, а нерівність $\overline{y} \geq \overline{y}_0$ — що всі координати вектора $\overline{y}_0$ не перевищують відповідних координат вектора $\overline{y}$; $\Gamma(\overline{\Pi}_n^+)$ — простір функцій, заданих на множині $\overline{\Pi}_n^+$ і таких, що майже для всіх дійсних x існує $\lim_{\overline{y} \to \overline{0}+\overline{0}} f(x,\overline{y}) = f(x, 0, \ldots, 0)$.

Нехай m_k і n_k — довільні взаємно прості натуральні числа,

$$P_{\overline{y}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\sum\limits_{k=1}^{n} y_k |u|} e^{-iux}\, du = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\sum\limits_{k=1}^{n} y_k u} \cos ux\, du, \tag{1}$$

$$W_{\overline{y}}(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}y_ku^2}e^{-iux}\,du=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}y_ku^2}\cos ux\,du, \tag{2}$$

$$\left(W_{\overline{y}^k}*P_{\overline{y}^{n-k}}\right)(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\sum\limits_{j=1}^{k}y_ju^2+\sum\limits_{j=k+1}^{n}y_j|u|\right)}e^{-iux}\,du, \tag{3}$$

$$\Psi_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}y_k|u|^{m_k/\ell_k}}e^{-iux}\,du=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}y_ku^{m_k/\ell_k}}\cos ux\,du \tag{4}$$

— відповідно дельтоподібні ядра Абеля – Пуассона, Ґаусса – Вейєрштрасса, їхні згортки та узагальнення,

$$\widetilde{P}_{\overline{y}}(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}y_j|k|}e^{-ikx}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}y_jk}\cos kx\right),$$

$$\widetilde{W}_{\overline{y}}(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}y_jk^2}e^{-ikx}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}y_jk^2}\cos kx\right),$$

$$\left(\widetilde{W}_{\overline{y}^k}*\widetilde{P}_{\overline{y}^{n-k}}\right)(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-\left(\sum\limits_{j=1}^{k}y_jm^2+\sum\limits_{j=k+1}^{n}y_j|m|\right)}e^{-imx},$$

$$\widetilde{\Psi}_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}y_j|k|^{m_j/\ell_j}}e^{-ikx}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}y_jk^{m_j/\ell_j}}\cos kx\right)$$

— їхні 2π-періодичні аналоги, апроксимативні властивості яких в одновимірному випадку вивчалися в роботах [4 – 9]. Згідно з теоремою диференціювання по параметру під знаком інтеграла, ядра (1) – (4) є нескінченно диференційовними функціями на множині Π_n^+ і на цій множині задовольняють відповідно рівняння

$$\frac{\partial^2 P_{\overline{y}}(x)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P_{\overline{y}}(x)}{\partial y_i^2}=0,\quad \frac{\partial^2 \widetilde{P}_{\overline{y}}(x)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \widetilde{P}_{\overline{y}}(x)}{\partial y_i^2}=0,\quad i=\overline{1,n},$$

$$\frac{\partial^2 W_{\overline{y}}(x)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 W_{\overline{y}}(x)}{\partial y_i^2},\quad \frac{\partial^2 \widetilde{W}_{\overline{y}}(x)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \widetilde{W}_{\overline{y}}(x)}{\partial y_i^2},\quad i=\overline{1,n};$$

$$\frac{\partial^2\left(W_{\overline{y}^k}*P_{\overline{y}^{n-k}}\right)(x)}{\partial x^2}=\frac{\partial\left(W_{\overline{y}^k}*P_{\overline{y}^{n-k}}\right)(x)}{\partial y_i},\quad i=\overline{1,k},$$

$$\frac{\partial^2\left(W_{\overline{y}^k}*P_{\overline{y}^{n-k}}\right)(x)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left(W_{\overline{y}^k}*P_{\overline{y}^{n-k}}\right)(x)}{\partial y_i^2}=0,\quad i=\overline{k+1,n};$$

$$\frac{\partial^2\left(\widetilde{W}_{\overline{y}^k}*\widetilde{P}_{\overline{y}^{n-k}}\right)(x)}{\partial x^2}=\frac{\partial\left(\widetilde{W}_{\overline{y}^k}*\widetilde{P}_{\overline{y}^{n-k}}\right)(x)}{\partial y_i},\quad i=\overline{1,k},$$

$$\frac{\partial^2\left(\widetilde{W}_{\overline{y}^k}*\widetilde{P}_{\overline{y}^{n-k}}\right)(x)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left(\widetilde{W}_{\overline{y}^k}*\widetilde{P}_{\overline{y}^{n-k}}\right)(x)}{\partial y_i^2}=0,\quad i=\overline{k+1,n}.$$

Позначимо через X один із просторів функцій $C,\ L_\infty,\ L_p$ і $\widehat{L}_p$, визначених на множині всіх дійсних чисел $\mathbb{R}$ відповідно з нормами

$$\|f\|_C=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|,\qquad \|f\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|,$$

$$\|f\|_p=\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^p dx\right)^{1/p},\qquad \|f\|_{\widehat{p}}=\sup_{a\in\mathbb{R}}\left(\int\limits_{a}^{a+2\pi}|f(x)|^p dx\right)^{1/p},$$

$\widetilde{X}$ — один із просторів 2π-періодичних функцій $\widetilde{C},\ \widetilde{L}_\infty$ і $\widetilde{L}_p$ відповідно з нормами

$$\|f\|_{\widetilde{C}}=\sup_{x\in[-\pi,\pi]}|f(x)|,\qquad \|f\|_{\widetilde{\infty}}=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in[-\pi,\pi]}|f(x)|,\qquad \|f\|_{\widetilde{p}}=\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p dx\right)^{1/p},$$

де $p\geq 1,\ XM_n,\ \widetilde{X}M_n,\ X\overline{M}_n$ і $\widetilde{X}\overline{M}_n$ — простори функцій $n+1$ змінної відповідно з нормами

$$\|f\|_{XM_n}=\sup_{\overline{y}>\overline{0}}\{\|f(x,\overline{y})\|_X\},\qquad \|f\|_{\widetilde{X}M_n}=\sup_{\overline{y}>\overline{0}}\left\{\|f(x,\overline{y})\|_{\widetilde{X}}\right\},$$

$$\|f\|_{X\overline{M}_n}=\sup_{\overline{y}\geq\overline{0}}\{\|f(x,\overline{y})\|_X\},\qquad \|f\|_{\widetilde{X}\overline{M}_n}=\sup_{\overline{y}\geq\overline{0}}\left\{\|f(x,\overline{y})\|_{\widetilde{X}}\right\},$$

$$\{X*K_{\overline{y}}\}=\left\{u(x,\overline{y})=(f*K_{\overline{y}})(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x-t)K_{\overline{y}}(t)\,dt\colon (f\in X)\wedge(\overline{y}>\overline{0})\right\},$$

$$\left\{\widetilde{X}*\widetilde{K}_{\overline{y}}\right\}=\left\{\widetilde{u}(x,\overline{y})=(\widetilde{f}*\widetilde{K}_{\overline{y}})(x)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\widetilde{f}(x-t)\widetilde{K}_{\overline{y}}(t)\,dt\colon (\widetilde{f}\in\widetilde{X})\wedge(\overline{y}>\overline{0})\right\},$$

$$\overline{\{X*K_{\overline{y}}\}}=\left\{u(x,\overline{y})=\begin{cases}(f*K_{\overline{y}})(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)K_{\overline{y}}(t)\,dt\colon (f\in X)\wedge(\overline{y}>\overline{0}),\\ f(x),\overline{y}=\overline{0}\end{cases}\right\},$$

$$\left\{\overline{\widetilde{X}*\widetilde{K}_{\overline{y}}}\right\}=\left\{\widetilde{u}(x,\overline{y})=\begin{cases}(\widetilde{f}*\widetilde{K}_{\overline{y}})(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{f}(x-t)\widetilde{K}_{\overline{y}}(t)\,dt\colon (\widetilde{f}\in\widetilde{X})\wedge(\overline{y}>\overline{0}),\\ \widetilde{f}(x),\overline{y}=\overline{0}\end{cases}\right\}$$

— підпростори згорток із дельтоподібними ядрами просторів $XM_n,\ \widetilde{X}M_n,\ X\overline{M}_n$ і $\widetilde{X}\overline{M}_n$, які є частинними випадками просторів із роботи [1], де $K_{\overline{y}}(t)$ і $\widetilde{K}_{\overline{y}}(t)$ — відповідно неперіодичне і 2π-періодичне відносно змінної t дельтоподібні ядра, що при будь-якому $a>0$ і $0<\delta<\pi$ задовольняють умови

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_{\overline{y}}(t)\,dt = 1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \widetilde{K}_{\overline{y}}(t)\,dt,$$

$$\lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-a,a]} |K_{\overline{y}}(t)|\,dt = \lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} \int\limits_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta} \left|\widetilde{K}_{\overline{y}}(t)\right| dt = 0.$$

Якщо $n=1$, то в записах XM_n, $\widetilde{X}M_n$, $X\overline{M}_n$ і $\widetilde{X}\overline{M}_n$ індекс n не пишемо.

З'ясуємо, для яких систем диференціальних рівнянь підпростори їхніх розв'язків збігаються з просторами згорток із дельтоподібними ядрами.

Позначимо через $N_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}$ простір розв'язків системи

$$\begin{gathered} \frac{\partial^{m_i} u\,(x,y_1,\ldots,y_n)}{\partial x^{m_i}} + (-1)^{\ell_i+1+(m_i/2)} \frac{\partial^{\ell_i} u\,(x,y_1,\ldots,y_n)}{\partial y_i^{\ell_i}} = 0, \quad i=\overline{1,k}, \\ \frac{\partial^{2m_i} u\,(x,y_1,\ldots,y_n)}{\partial x^{2m_i}} + \frac{\partial^{2\ell_i} u\,(x,y_1,\ldots,y_n)}{\partial y_i^{2\ell_i}} = 0, \quad i=\overline{k+1,n}, \end{gathered} \tag{5}$$

де Π_n^+ — область визначення системи (5). Виявляється, що простори згорток із дельтоподібними ядрами є підпросторами розв'язків системи (5). Через K_i будемо позначати сталі, взагалі кажучи, різні. Справедливим є таке твердження.

Теорема 1. *Нехай m_i і ℓ_i — взаємно прості натуральні числа і при $i=1,2,\ldots,k$ числа m_i парні, а при $i=k+1,k+2,\ldots,n$ — непарні. Тоді при $p\ge 1$ справджуються співвідношення*

$$\left\{\widehat{L}_p * \Psi_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}\right\} \subseteq \left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap \widehat{L}_p M_n \cap M^+(\Pi_n^+) \cap N_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}\right\}, \tag{6}$$

$$\left\{\overline{\widehat{L}_p * \Psi_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}}\right\} \subseteq \left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap \widehat{L}_p \overline{M}_n \cap M^+(\Pi_n^+) \cap \Gamma(\overline{\Pi}_n^+) \cap N_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}\right\}. \tag{7}$$

Доведення. У статті [3] було встановлено, що

$$\left\{\widehat{L}_p * \Psi_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}\right\} \subseteq \widehat{L}_p M_n, \qquad \left\{\overline{\widehat{L}_p * \Psi_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}}\right\} \subseteq \widehat{L}_p \overline{M}_n.$$

Для спрощення записів будемо розглядати функції $u(x,y_1,y_2)$ трьох змінних. Тоді, згідно з лемою 3 і наслідком 2 із [1],

$$\begin{gathered} \Psi_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}(x) = \Psi_{y_1,y_2}^{\overline{m}/\overline{\ell}}(x) = \left(\Psi_{y_1}^{m_1/\ell_1} * \Psi_{y_2}^{m_2/\ell_2}\right)(x) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(y_1|u|^{m_1/\ell_1} + y_2|u|^{m_2/\ell_2}\right)} e^{-iux}\,du, \end{gathered} \tag{8}$$

і систему (5) можна записати у вигляді

$$\begin{gathered} \frac{\partial^{m_1} u\,(x,y_1,y_2)}{\partial x^{m_1}} + (-1)^{\ell_1+1+(m_1/2)} \frac{\partial^{\ell_1} u\,(x,y_1,y_2)}{\partial y_1^{\ell_1}} = 0, \\ \frac{\partial^{2m_2} u\,(x,y_1,y_2)}{\partial x^{2m_2}} + \frac{\partial^{2\ell_2} u\,(x,y_1,y_2)}{\partial y_2^{2\ell_2}} = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

У статті [3] встановлено, що для кожної функції $f \in \widehat{L}_p$ функції $(f * \Psi_{y_1}^{m_1/\ell_1})(x)$ і $(f * \Psi_{y_2}^{m_2/\ell_2})(x)$ належать простору $M^+\big(\Pi_1^+\big)$. Тому, згідно з означенням, при кожному $y_1 \geq y_1^0 > 0$ виконується нерівність

$$\left|\Big(f * \Psi_{y_1}^{m_1/\ell_1}\Big)(x)\right| < K_1(y_1^0), \tag{10}$$

а при $y_2 \geq y_2^0 > 0$ — нерівність

$$\left|\Big(f * \Psi_{y_2}^{m_2/\ell_2}\Big)(x)\right| < K_2(y_2^0), \tag{11}$$

де $K_1(y_1^0)$ і $K_2(y_2^0)$ — сталі, що залежать від y_1^0 і y_2^0. Якщо $y_1 \geq y_1^0$, то з нерівності (10), враховуючи, що ядро $\Psi_{y_2}^{m_2/\ell_2}$ належить простору LM і норма цього простору інваріантна відносно зсуву, отримуємо

$$\begin{aligned}\left|\Big(f * \Psi_{y_1,y_2}^{\overline{m}/\overline{\ell}}\Big)(x)\right| &\leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\Big(f * \Psi_{y_1}^{m_1/\ell_1}\Big)(t)\right| \left|\Psi_{y_2}^{m_2/\ell_2}(x-t)\right| dt \leq \\ &\leq K_1(y_1^0)\left\|\Psi_{y_2}^{m_2/\ell_2}\right\|_{LM}.\end{aligned} \tag{12}$$

Аналогічно, якщо $y_2 \geq y_2^0$, то з нерівності (11) маємо

$$\begin{aligned}\left|\Big(f * \Psi_{y_1,y_2}^{\overline{m}/\overline{\ell}}\Big)(x)\right| &\leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\Big(f * \Psi_{y_2}^{m_2/\ell_2}\Big)(t)\right| \left|\Psi_{y_1}^{m_1/\ell_1}(x-t)\right| dt \leq \\ &\leq K_2(y_2^0)\left\|\Psi_{y_1}^{m_1/\ell_1}\right\|_{LM}.\end{aligned} \tag{13}$$

Із нерівностей (12), (13) і означення простору $M^+(\Pi_2^+)$ випливає, що при $p \geq 1$ справджуються співвідношення

$$\left\{\widehat{L}_p * \Psi_{y_1,y_2}^{\overline{m}/\overline{\ell}}\right\} \subseteq M^+\big(\Pi_2^+\big), \qquad \overline{\left\{\widehat{L}_p * \Psi_{y_1,y_2}^{\overline{m}/\overline{\ell}}\right\}} \subseteq M^+\big(\Pi_2^+\big).$$

Доведемо, що кожна функція $u(x,y_1,y_2) = (f * \Psi_{y_1,y_2}^{\overline{m}/\overline{\ell}})(x)$ належить простору $C^\infty\left(\Pi_2^+\right)$, тобто має неперервні частинні похідні всіх порядків на множині Π_2^+. Нехай $A(x,y_1,y_2)$ — довільна точка множини Π_2^+,

$$M_2\left(x_0, a, \overline{y}^0, b\right) = [x_0 - a, x_0 + b] \times \left[y_1^0, y_1^0 + b\right] \times \left[y_2^0, y_2^0 + b\right]$$

— підмножина Π_2^+, що містить точку $A(x,y_1,y_2)$, $g(x,\overline{y},t) = g(x,y_1,y_2,t) = f(t)\Psi_{y_1,y_2}^{\overline{m}/\overline{\ell}}(x-t)$.

Доведемо, що в усіх точках множини $M_2(x_0,a,\overline{y}^0,b)$ справджуються рівності

$$\frac{\partial^k u(x,y_1,y_2)}{\partial x^k} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^k g(x,y_1,y_2,t)}{\partial x^k}\, dt, \tag{14}$$

$$\frac{\partial^k u(x,y_1,y_2)}{\partial y_i^k} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^k g(x,y_1,y_2,t)}{\partial y_i^k}\, dt \tag{15}$$

і функції $\dfrac{\partial^k u(x,y_1,y_2)}{\partial x^k}$, $\dfrac{\partial^k u(x,y_1,y_2)}{\partial y_i^k}$ неперервні на множині $M_2(x_0,a,\overline{y}^0,b)$.

Оскільки дельтоподібне ядро $\Psi^{\overline{m}/\overline{\ell}}_{y_1,y_2}(x)$ нескінченно диференційовне на множині Π_2^+ і задовольняє умови теореми диференціювання по параметру під знаком інтеграла, то

$$\frac{\partial^k \Psi^{\overline{m}/\overline{\ell}}_{y_1,y_2}(x)}{\partial x^k}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty u^k e^{-\left(y_1 u^{m_1/\ell_1}+y_2 u^{m_2/\ell_2}\right)}\cos\left(ux+k\pi/2\right)\,du, \tag{16}$$

$$\frac{\partial^k \Psi^{\overline{m}/\overline{\ell}}_{y_1,y_2}(x)}{\partial y_i^k}=-\frac{(-1)^k}{\pi}\int\limits_0^\infty u^{km_i/\ell_i} e^{-y_1 u^{m_1/\ell_1}-y_2 u^{m_2/\ell_2}}\cos ux\,du \tag{17}$$

і майже при всіх фіксованих дійсних t функції

$$\frac{\partial^k g(x,y_1,y_2,t)}{\partial x^k}=f(t)\frac{\partial^k \Psi^{\overline{m}/\overline{\ell}}_{y_1,y_2}(x-t)}{\partial x^k}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial^k g(x,y_1,y_2,t)}{\partial y_i^k}=f(t)\frac{\partial^k \Psi^{\overline{m}/\overline{\ell}}_{y_1,y_2}(x-t)}{\partial y_i^k} \tag{19}$$

є нескінченно диференційовними на Π_2^+, а отже, і неперервними на $M_2(x_0,a,\overline{y}^0,b)$. Тоді рівності (14), (15) на підставі рівностей (18), (19) рівносильні рівностям

$$\frac{\partial^k u(x,\overline{y})}{\partial x^k}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\partial^k \Psi^{\overline{m}/\overline{\ell}}_{y_1,y_2}(x-t)}{\partial x^k}\,dt, \tag{20}$$

$$\frac{\partial^k u(x,\overline{y})}{\partial y_i^k}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\partial^k \Psi^{\overline{m}/\overline{\ell}}_{y_1,y_2}(x-t)}{\partial y_i^k}\,dt. \tag{21}$$

Для доведення рівностей (14), (15) достатньо встановити, що майже при всіх дійсних t в усіх точках множини $M_2(x_0,a,\overline{y}^0,b)$ виконуються нерівності

$$\left|\frac{\partial^k g(x,y_1,y_2,t)}{\partial x^k}\right|\le h_1(t),\qquad \left|\frac{\partial^k g(x,y_1,y_2,t)}{\partial y_i^k}\right|\le h_2(t),$$

де h_1 і h_2 належать L. Із рівності (16), інтегруючи частинами, отримуємо

$$\frac{\partial^k \Psi^{\overline{m}/\overline{\ell}}_{y_1,y_2}(x)}{\partial x^k}=-\frac{1}{\pi x^2}\int\limits_0^\infty \left(u^k e^{-(y_1 u^{m_1/\ell_1}+y_2 u^{m_2/\ell_2})}\right)''_{u^2}\cos(ux+k\pi/2)\,du=$$

$$=-\frac{1}{\pi x^2}\int\limits_0^\infty\Big((y_1m_1)^2u^{2(m_1/\ell_1-1)+k}/\ell_1^2-y_1m_1(2k+m_1/\ell_1-1)u^{m_1/\ell_1+k-2}/\ell_1+$$

$$+(y_2m_2)^2u^{2(m_2/\ell_2-1)+k}/\ell_2^2-y_2m_2(2k+m_2/\ell_2-1)u^{m_2/\ell_2+k-2}/\ell_2+$$

$$+\,2y_1y_2m_1m_2u^{m_1/\ell_1+m_2/\ell_2+k-2}/\ell_1\ell_2+k(k-1)u^{k-2}\Big)\times$$

$$\times e^{-(y_1 u^{m_1/\ell_1} + y_2 u^{m_2/\ell_2})} \cos(ux + k\pi/2)\, du. \tag{22}$$

Якщо $\beta > -1$ і $y_1 > 0$ то, виконуючи заміну змінних, маємо

$$\int_0^\infty u^\beta e^{-(y_1 u^{m_1/\ell_1} + y_2 u^{m_2/\ell_2})}\, du \le \int_0^\infty u^\beta e^{-y_1 u^{m_1/\ell_1}}\, du =$$

$$= \frac{\ell_1 y_1^{-(\beta+1)\ell_1/m_1}}{m_1} \int_0^\infty t^{(\beta+1)\ell_1/m_1 - 1} e^{-t}\, dt = K_1 y_1^{-(\beta+1)\ell_1/m_1}. \tag{23}$$

Аналогічно, якщо $y_2 > 0$ і $\beta > -1$, то

$$\int_0^\infty u^\beta e^{-(y_1 u^{m_1/\ell_1} + y_2 u^{m_2/\ell_2})}\, du \le K_2 y_2^{-(\beta+1)\ell_2/m_2}. \tag{24}$$

Використовуючи нерівності (23), (24), одержуємо

$$\left| \int_0^\infty u^{k-2} e^{-(y_1 u^{m_1/\ell_1} + y_2 u^{m_2/\ell_2})} \cos(ux + k\pi/2)\, du \right| \le K_3(y_1, y_2), \tag{25}$$

$$\left| y_1 y_2 \int_0^\infty u^{m_1/\ell_1 + m_2/\ell_2 + k - 2} e^{-(y_1 u^{m_1/\ell_1} + y_2 u^{m_2/\ell_2})} \cos(ux + k\pi/2)\, du \right| \le K_4(y_1, y_2), \tag{26}$$

$$\left| y_2 \int_0^\infty u^{m_2/\ell_2 + k - 2} e^{-(y_1 u^{m_1/\ell_1} + y_2 u^{m_2/\ell_2})} \cos(ux + k\pi/2)\, du \right| \le K_5(y_1, y_2), \tag{27}$$

$$\left| y_2^2 \int_0^\infty u^{2(m_2/\ell_2 - 1) + k} e^{-(y_1 u^{m_1/\ell_1} + y_2 u^{m_2/\ell_2})} \cos(ux + k\pi/2)\, du \right| \le K_6(y_1, y_2), \tag{28}$$

$$\left| y_1 \int_0^\infty u^{m_1/\ell_1 + k - 2} e^{-(y_1 u^{m_1/\ell_1} + y_2 u^{m_2/\ell_2})} \cos(ux + k\pi/2)\, du \right| \le K_7(y_1, y_2), \tag{29}$$

$$\left| y_1^2 \int_0^\infty u^{2(m_1/\ell_1 - 1) + k} e^{-(y_1 u^{m_1/\ell_1} + y_2 u^{m_2/\ell_2})} \cos(ux + k\pi/2)\, du \right| \le K_8(y_1, y_2). \tag{30}$$

Із співвідношень (22), (25)–(30) випливає, що

$$\left| \frac{\partial^k \Psi_{y_1,y_2}^{\overline{m}/\overline{\ell}}(x)}{\partial x^k} \right| < \frac{1}{x^2} K_9(y_1, y_2). \tag{31}$$

Якщо $km_i/\ell_i \ge 1$, то з рівності (17), міркуючи, як і при доведенні нерівності (31), маємо

$$\left| \frac{\partial^k \Psi_{y_1,y_2}^{\overline{m}/\overline{\ell}}(x)}{\partial y_i^k} \right| < \frac{1}{x^2} K_{10}(y_1, y_2). \tag{32}$$

Нехай $km_i/\ell_i < 1$ й $\alpha = 1 - km_i/\ell_i > 0$. Із рівності (17), інтегруючи частинами, отримуємо

$$\frac{\partial^k \Psi^{\overline{m}/\overline{\ell}}_{y_1,y_2}(x)}{\partial y_i^k} = -\frac{(-1)^k}{\pi x} \int\limits_0^\infty \left(u^{km_i/\ell_i} e^{-y_1 u^{m_1/\ell_1} - y_2 u^{m_2/\ell_2}} \right)'_u \sin ux \, du =$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{\pi x} \int\limits_0^\infty \left(\frac{km_i}{\ell_i} u^{km_i/\ell_i - 1} - \frac{y_1 m_1}{\ell_1} u^{km_i/\ell_i + m_1/\ell_1 - 1} + \frac{y_2 m_2}{\ell_2} u^{km_i/\ell_i + m_2/\ell_2 - 1} \right) \times$$

$$\times e^{-y_1 u^{m_1/\ell_1} - y_2 u^{m_2/\ell_2}} \sin ux \, du. \qquad (33)$$

Оскільки $km_i/\ell_i < 1$, то функція $\left(u^{km_i/\ell_i - 1} e^{-y_1 u^{m_1/\ell_1} - y_2 u^{m_2/\ell_2}} \right)'_u$ не є абсолютно інтегровною на $(0, \infty)$. Тому не можна інтегрувати частинами, як у співвідношенні (22). З огляду на те, що функція $\left(u^{km_i/\ell_i} e^{-y_1 u^{m_1/\ell_1} - y_2 u^{m_2/\ell_2}} \right)'_u \sin \dfrac{ux}{2}$ абсолютно неперервна відносно змінної u на проміжку $[0, \infty)$, інтегруючи частинами, одержуємо

$$\int\limits_0^\infty \left(u^{km_i/\ell_i} e^{-y_1 u^{m_1/\ell_1} - y_2 u^{m_2/\ell_2}} \right)'_u \sin ux \, du =$$

$$= \frac{4}{x} \int\limits_0^\infty \left(u^{km_i/\ell_i} e^{-y_1 u^{m_1/\ell_1} - y_2 u^{m_2/\ell_2}} \right)'_u \sin \frac{ux}{2} d\left(\sin \frac{ux}{2} \right) =$$

$$= -\frac{4}{x} \left(\int\limits_0^\infty \left(u^{km_i/\ell_i} e^{-y_1 u^{m_1/\ell_1} - y_2 u^{m_2/\ell_2}} \right)''_{u^2} \sin^2 \frac{ux}{2} \, du + \right.$$

$$\left. + \frac{x}{4} \int\limits_0^\infty \left(u^{km_i/\ell_i} e^{-y_1 u^{m_1/\ell_1} - y_2 u^{m_2/\ell_2}} \right)'_u \sin ux \, du \right). \qquad (34)$$

Із рівності (34) випливає, що

$$\int\limits_0^\infty \left(u^{km_i/\ell_i} e^{-y_1 u^{m_1/\ell_1} - y_2 u^{m_2/\ell_2}} \right)'_u \sin ux \, du =$$

$$= -\frac{2}{x} \int\limits_0^\infty \left(u^{km_i/\ell_i} e^{-y_1 u^{m_1/\ell_1} - y_2 u^{m_2/\ell_2}} \right)''_{u^2} \sin^2 \frac{ux}{2} \, du, \qquad (35)$$

а із (33), (35) — що

$$\frac{\partial^k \Psi^{\overline{m}/\overline{\ell}}_{y_1,y_2}}{\partial y_i^k}(x) = \frac{2(-1)^k}{\pi x^2} \int\limits_0^\infty \left(u^{km_i/\ell_i} e^{-y_1 u^{m_1/\ell_1} - y_2 u^{m_2/\ell_2}} \right)''_{u^2} \sin^2 \frac{ux}{2} \, du =$$

$$= \frac{2(-1)^k}{\pi x^2} \int\limits_0^\infty \left(\left(\frac{y_1 m_1}{\ell_1} \right)^2 u^{2(m_1/\ell_1 - 1) + km_i/\ell_i} - \right.$$

$$-\frac{y_1 m_1}{\ell_1}\left(\frac{m_1}{\ell_1}+\frac{2km_i}{\ell_i}-1\right)u^{km_i/\ell_i+m_1/\ell_1-2}+\left(\frac{y_2 m_2}{\ell_2}\right)^2 u^{km_i/\ell_i+2(m_2/\ell_2-1)}+$$

$$+\frac{2y_1y_2m_1m_2}{\ell_1\ell_2}u^{km_i/\ell_i+m_1/\ell_1+m_2/\ell_2-2}-\frac{y_2m_2}{\ell_2}\left(\frac{2km_i}{\ell_i}+\frac{m_2}{\ell_2}-1\right)u^{km_i/\ell_i+m_2/\ell_2-2}+$$

$$+\frac{km_i}{\ell_i}\left(\frac{km_i}{\ell_i}-1\right)u^{km_i/\ell_i-2}\Bigg)e^{-(y_1u^{m_1/\ell_1}+y_2u^{m_2/\ell_2})}\sin^2\frac{ux}{2}\,du. \tag{36}$$

Якщо $y_1>0$, то, використовуючи заміну змінних, отримуємо

$$\frac{1}{x^2}\int\limits_0^\infty u^{km_i/\ell_i+\gamma}e^{-(y_1u^{m_1/\ell_1}+y_2u^{m_2/\ell_2})}\sin^2\frac{ux}{2}\,du\le$$

$$\le\frac{1}{x^2}\int\limits_0^\infty u^{km_i/\ell_i+\gamma}e^{-y_1u^{m_1/\ell_1}}\sin^2\frac{ux}{2}\,du=$$

$$=\frac{2^{km_i/\ell_i+\gamma}}{x^{2-\alpha-\varepsilon}}\int\limits_0^\infty\frac{\sin^{\alpha+\varepsilon}tx}{(tx)^{\alpha+\varepsilon}}t^{km_i/\ell_i+\gamma+\alpha+\varepsilon}\sin^{2-\alpha-\varepsilon}(tx)e^{-y_1(2t)^{m_1/\ell_1}}\,dt<$$

$$<\frac{K_{11}}{x^{2-\alpha-\varepsilon}}\int\limits_0^\infty t^{\gamma+1+\varepsilon}e^{-y_1(2t)^{m_1/\ell_1}}\,dt, \tag{37}$$

де ε — таке довільне додатне число, що $\varepsilon<km_i/\ell_i$ і $\alpha+km_i/\ell_i=1$. Якщо $\gamma+2+\varepsilon>0$, то, використовуючи заміну змінних, маємо

$$\int\limits_0^\infty t^{\gamma+1+\varepsilon}e^{-y_1(2t)^{m_1/\ell_1}}\,dt=\frac{\ell_1y_1^{-(\gamma+2+\varepsilon)\ell_1/m_1}}{m_12^{\gamma+2+\varepsilon}}\int\limits_0^\infty\nu^{(\gamma+2+\varepsilon)\ell_1/m_1-1}e^{-\nu}d\nu=$$

$$=K_{12}y_1^{-(\gamma+2+\varepsilon)\ell_1/m_1}. \tag{38}$$

Із співвідношень (37), (38) випливає, що якщо $y_1>0$ і $\gamma+2+\varepsilon>0$, то

$$\frac{1}{x^2}\int\limits_0^\infty u^{km_i/\ell_i+\gamma}e^{-(y_1u^{m_1/\ell_1}+y_2u^{m_2/\ell_2})}\sin^2\frac{ux}{2}\,du<\frac{K_{13}y_1^{-(\gamma+2+\varepsilon)\ell_1/m_1}}{x^{1-\varepsilon+km_i/\ell_i}}. \tag{39}$$

Аналогічно, якщо $y_2>0$ і $\gamma+2+\varepsilon>0$, то

$$\frac{1}{x^2}\int\limits_0^\infty u^{km_i/\ell_i+\gamma}e^{-(y_1u^{m_1/\ell_1}+y_2u^{m_2/\ell_2})}\sin^2\frac{ux}{2}\,du<\frac{K_{14}y_2^{-(\gamma+2+\varepsilon)\ell_2/m_2}}{x^{1-\varepsilon+km_i/\ell_i}}, \tag{40}$$

і з нерівностей (39), (40) випливає, що

$$\frac{1}{x^2}\int\limits_0^\infty u^{km_i/\ell_i+\gamma}e^{-(y_1u^{m_1/\ell_1}+y_2u^{m_2/\ell_2})}\sin^2\frac{ux}{2}\,du<\frac{1}{x^{1-\varepsilon+km_i/\ell_i}}K_{15}(y_1,y_2), \tag{41}$$

де $0 < \varepsilon < km_i/\ell_i < 1$. Використовуючи нерівності (39)–(41) і враховуючи, що $\gamma + 2 + \varepsilon > 0$, знаходимо

$$\frac{1}{x^2}\int_0^\infty u^{km_i/\ell_i-2}e^{-(y_1u^{m_1/\ell_1}+y_2u^{m_2/\ell_2})}\sin^2\frac{ux}{2}\,du < \frac{1}{x^{1-\varepsilon+km_i/\ell_i}}K_{16}(y_1,y_2), \tag{42}$$

$$\frac{y_2}{x^2}\int_0^\infty u^{km_i/\ell_i+m_2/\ell_2-2}e^{-(y_1u^{m_1/\ell_1}+y_2u^{m_2/\ell_2})}\sin^2\frac{ux}{2}\,du < \frac{1}{x^{1-\varepsilon+km_i/\ell_i}}K_{17}(y_1,y_2), \tag{43}$$

$$\frac{y_1y_2}{x^2}\int_0^\infty u^{km_i/\ell_i+m_1/\ell_1+m_2/\ell_2-2}e^{-(y_1u^{m_1/\ell_1}+y_2u^{m_2/\ell_2})}\sin^2\frac{ux}{2}\,du <$$

$$< \frac{1}{x^{1-\varepsilon+km_i/\ell_i}}K_{18}(y_1,y_2), \tag{44}$$

$$\frac{y_2^2}{x^2}\int_0^\infty u^{km_i/\ell_i+2m_2/\ell_2-2}e^{-(y_1u^{m_1/\ell_1}+y_2u^{m_2/\ell_2})}\sin^2\frac{ux}{2}\,du < \frac{1}{x^{1-\varepsilon+km_i/\ell_i}}K_{19}(y_1,y_2), \tag{45}$$

$$\frac{y_1}{x^2}\int_0^\infty u^{km_i/\ell_i+m_1/\ell_1-2}e^{-(y_1u^{m_1/\ell_1}+y_2u^{m_2/\ell_2})}\sin^2\frac{ux}{2}\,du < \frac{1}{x^{1-\varepsilon+km_i/\ell_i}}K_{20}(y_1,y_2), \tag{46}$$

$$\frac{y_1^2}{x^2}\int_0^\infty u^{km_i/\ell_i+2m_1/\ell_1-2}e^{-(y_1u^{m_1/\ell_1}+y_2u^{m_2/\ell_2})}\sin^2\frac{ux}{2}\,du < \frac{1}{x^{1-\varepsilon+km_i/\ell_i}}K_{21}(y_1,y_2). \tag{47}$$

Із співвідношень (36), (42)–(47) отримуємо

$$\left|\frac{\partial^k\Psi_{y_1,y_2}^{\overline{m}/\overline{\ell}}(x)}{\partial y_i^k}\right| < \frac{1}{x^{1-\varepsilon+km_i/\ell_i}}K_{22}(y_1,y_2), \tag{48}$$

де $0 < \varepsilon < km_i/\ell_i < 1$. Якщо $y_1 > 0$, то з рівності (16), використовуючи заміну змінних, одержуємо

$$\left|\frac{\partial^k\Psi_{y_1,y_2}^{\overline{m}/\overline{\ell}}(x)}{\partial x^k}\right| \le \frac{1}{\pi}\int_0^\infty u^k e^{-y_1u^{m_1/\ell_1}}\,du =$$

$$= \frac{\ell_1 y_1^{-(k+1)\ell_1/m_1}}{m_1\pi}\int_0^\infty t^{(k+1)\ell_1/m_1-1}e^{-t}\,dt = K_{23}y_1^{-(k+1)\ell_1/m_1}. \tag{49}$$

Якщо $y_2 > 0$, то аналогічно

$$\left|\frac{\partial^k\Psi_{y_1,y_2}^{\overline{m}/\overline{\ell}}(x)}{\partial x^k}\right| \le K_{24}y_2^{-(k+1)\ell_2/m_2}. \tag{50}$$

Із нерівностей (49), (50) випливає, що

$$\left|\frac{\partial^k \Psi^{\overline{m}/\overline{\ell}}_{y_1,y_2}(x)}{\partial x^k}\right| \leq K_{25}(y_1, y_2). \tag{51}$$

Аналогічно, з рівності (17) отримуємо

$$\left|\frac{\partial^k \Psi^{\overline{m}/\overline{\ell}}_{y_1,y_2}(x)}{\partial y_i^k}\right| < K_{26}(y_1, y_2). \tag{52}$$

Нагадаємо, що $A(x, y_1, y_2)$ — довільна точка, що належить множині $M_2(x_0, a, \overline{y}^0, b)$, і $y_1^0 > 0$ або $y_2^0 > 0$. Тоді

$$0 \leq y_1^0 \leq y_1 \leq y_1^0 + b, \qquad 0 \leq y_2^0 \leq y_2 \leq y_2^0 + b. \tag{53}$$

Якщо $km_i/\ell_i \geq 1$, то з нерівностей (31), (32), (51) і (52) з урахуванням нерівності (53) одержуємо

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\partial^k \Psi^{\overline{m}/\overline{\ell}}_{y_1,y_2}(x)}{\partial x^k}\right| < K_{25}, \qquad \left|\frac{\partial^k \Psi^{\overline{m}/\overline{\ell}}_{y_1,y_2}(x)}{\partial y_i^k}\right| < K_{26}, \\ &\left|\frac{\partial^k \Psi^{\overline{m}/\overline{\ell}}_{y_1,y_2}(x)}{\partial x^k}\right| < \frac{K_{27}}{x^2}, \qquad \left|\frac{\partial^k \Psi^{\overline{m}/\overline{\ell}}_{y_1,y_2}(x)}{\partial y_i^k}\right| < \frac{K_{28}}{x^2}. \end{aligned} \tag{54}$$

Із нерівностей (54) випливає нерівність

$$\left|\frac{\partial^k \Psi^{\overline{m}/\overline{\ell}}_{y_1,y_2}(x)}{\partial x^k}\right| < \begin{cases} K_{25}, & |x| \leq \sqrt{K_{27}/K_{25}}, \\ K_{27}/x^2, & |x| > \sqrt{K_{27}/K_{25}}. \end{cases} \tag{55}$$

Оскільки $x_0 - a \leq x \leq x_0 + a$, то з нерівності (55) випливає, що для кожної точки (x, y_1, y_2) множини $M_2(x_0, a, \overline{y}^0, b)$ виконується нерівність

$$\left|\frac{\partial^k \Psi^{\overline{m}/\overline{\ell}}_{y_1,y_2}(x-t)}{\partial x^k}\right| \leq \ell(t), \tag{56}$$

де

$$\ell(t) = \begin{cases} K_{27}/(t-(x_0-a))^2, & t < -\sqrt{K_{27}/K_{25}} + x_0 - a = a_1, \\ K_{25}, & a_1 \leq t \leq \sqrt{K_{27}/K_{25}} + x_0 + a = b_1, \\ K_{27}/(t-(x_0+a))^2, & t > b_1. \end{cases} \tag{57}$$

Із співвідношень (18), (57) випливає, що в кожній точці $A(x, y_1, y_2)$ із множини $M_2(x_0, a, \overline{y}^0, b)$ виконується нерівність

$$\left|\frac{\partial^k g(x, y_1, y_2, t)}{\partial x^k}\right| \leq |f(t)|\, |\ell(t)| = h_1(t). \tag{58}$$

Оскільки $f(t)$ належить $\widehat{L}_p$, то із співвідношень (57), (58), використовуючи при цьому нерівність (13) із [2], отримуємо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} h_1(t)\,dt \le (2\pi)^{1/q}\|f\|_{\widehat{p}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \max_{t\in[k,k+1]} |\ell(t)|, \tag{59}$$

де $1/p + 1/q = 1$. Із рівності (57), враховуючи невід'ємність та абсолютну інтегровність функції $\ell(t)$, її строге зростання на проміжку $(-\infty, a_1]$ і строге спадання на проміжку $[b_1, +\infty)$, одержуємо

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \max_{t\in[k,k+1]} |\ell(t)| = \sum_{k=-\infty}^{[a_1]-1} \max_{t\in[k-1,k]} \ell(t) + \sum_{k=[a_1]-1}^{[b_1]+1} \max_{t\in[k,k+1]} \ell(t) +$$

$$+\sum_{k=[b_1]+1}^{\infty} \max_{t\in[k,k+1]} \ell(t) \le \int\limits_{-\infty}^{[a_1]} \ell(t)\,dt + K_{25}\left([b_1] + 2 - [a_1]\right) + \int\limits_{[b_1]}^{\infty} \ell(t)\,dt < K_{29}. \tag{60}$$

Із нерівностей (59), (60) випливає, що h_1 належить L. Аналогічно доведемо, що $\left|\dfrac{\partial^k g(x,y_1,y_2,t)}{\partial y_i^k}\right| \le h_2(t)$ і h_2 належить L. Отже, справджується рівність (14), при $km_i/\ell_i \ge 1$ — рівність (15), і функції $\dfrac{\partial^k g(x,y_1,y_2)}{\partial x^k}$, $\dfrac{\partial^k g(x,y_1,y_2)}{\partial y_i^k}$ неперервні на множині $M_2(x_0, a, \overline{y}^0, b)$.

Якщо ж $km_i/\ell_i < 1$, то з (48) на підставі нерівності (53) маємо

$$\left|\frac{\partial^k \Psi_{y_1,y_2}^{\overline{m},\overline{\ell}}(x)}{\partial y_i^k}\right| < \frac{K_{30}}{x^{1-\varepsilon+km_i/\ell_i}},$$

де $0 < \varepsilon < km_i/\ell_i$. В подальшому доведення неперервності функції $\dfrac{\partial^k \Psi_{y_1,y_2}^{\overline{m},\overline{\ell}}(x)}{\partial y_i^k}$ і рівності (21), на підставі монотонності функції $\dfrac{1}{x^{1-\varepsilon+km_i/\ell_i}}$ на інтервалі $(0,\infty)$ і абсолютної інтегровності на проміжку $[a, +\infty)$, де a — довільне додатне число, проводиться аналогічно. Аналогічно можна встановити, що в усіх точках множини Π_2^+ справджуються рівності

$$\frac{\partial^{m+k} u(x,y_1,y_2)}{\partial x^m \partial y_i^k} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^{m+k} g(x,y_1,y_2,t)}{\partial x^m \partial y_i^k}\,dt$$

і функції $\dfrac{\partial^{m+k} u(x,y_1,y_2)}{\partial x^m \partial y_i^k}$ неперервні на множині Π_2^+, де k і m — довільні натуральні числа. Отже, функція $u(x,y_1,y_2)$ належить простору $C^\infty(\Pi_2^+)$.

Із рівностей (16), (17), (20) і (21) випливає, що функція $u(x,y_1,y_2)$ є розв'язком системи (9), тобто належить простору $N_{y_1,y_2}^{\overline{m}/\overline{\ell}}$. Отже, при $p \ge 1$ мають місце співвідношення

$$\left\{\widehat{L}_p * \Psi_{y_1,y_2}^{\overline{m}/\overline{\ell}}\right\} \subseteq \left\{C^\infty\left(\Pi_2^+\right) \cap \widehat{L}_p M_2 \cap M^+\left(\Pi_2^+\right) \cap N_{y_1,y_2}^{\overline{m}/\overline{\ell}}\right\}.$$

Аналогічно можна довести, що при $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n) > \overline{0}$ і $p \ge 1$ справджуються співвідношення (6) і

$$\left\{\overline{\widehat{L}_p * \Psi_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}}\right\} \subseteq \left\{C^\infty\left(\Pi_n^+\right) \cap \widehat{L}_p\overline{M_n} \cap M^+\left(\Pi_n^+\right) \cap N_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}\right\}. \tag{61}$$

Оскільки ядра $\Psi_{y_i}^{m_i/\ell_i}(x)$ при $m_i/\ell_i \le 1$ задовольняють умови теореми 2, а при $m_i/\ell_i > 1$ — наслідку 3 з [1 с. 1487] і при доведенні цієї теореми і наслідку було встановлено, що дельтоподібні ядра задовольняють умови теореми 1 із [2], то ядра $\Psi_{y_i}^{m_i/\ell_i}(x)$ задовольняють умови теореми 3 із [2]. Тоді на підставі рівності (8) за теоремою 3 із [2] в кожній точці Лебега функції f із простору $\widehat{L}_p$, а отже майже скрізь на множині дійсних чисел, справджується рівність

$$\lim_{\overline{y}\to\overline{0}+\overline{0}} \left(f * \Psi_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}\right)(x) = f(x). \tag{62}$$

Тому з рівності (62), згідно з означеннями просторів $\Gamma(\overline{\Pi}_n^+)$ і $\left\{\overline{\widehat{L}_p\Psi_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}}\right\}$, випливає, що кожна функція $u(x,\overline{y})$ із простору $\left\{\overline{\widehat{L}_p\Psi_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}}\right\}$ належить простору $\Gamma(\overline{\Pi}_n^+)$. Отже, із співвідношень (61) випливає (7).

Теорему 1 доведено.

Зауваження. Якщо $y_2 = 0$, то $\Psi_{y_1,y_2}^{\overline{m}/\overline{\ell}}(x) = \Psi_{y_1}^{m_1/\ell_1}(x) = \Psi_y^{m/n}$ і з співвідношень (6), (7) випливає, що

$$\left\{\widehat{L}_p * \Psi_y^{m/n}\right\} \subseteq \left\{C^\infty(\Pi^+)\right\}, \quad \left\{\overline{\widehat{L}_p * \Psi_y^{m/n}}\right\} \subseteq \left\{C^\infty(\Pi^+)\right\}.$$

***Наслідок* 1.** *Нехай виконуються умови теореми* 1. *Тоді справджуються співвідношення*

$$\left\{\overline{C * \Psi_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}}\right\} \subseteq \left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap C(\overline{\Pi}_n^+) \cap N_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}\right\},$$

$$\left\{\overline{\widetilde{C} * \widetilde{\Psi}_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}}\right\} \subseteq \left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap C(\overline{\Pi}_n^+) \cap \widetilde{C}\overline{M_n} \cap N_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}\right\},$$

$$\left\{L_p * \Psi_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{l}}\right\} \subseteq \left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap L_pM_n \cap M^+(\Pi_n^+) \cap N_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}\right\},$$

$$\left\{\widetilde{L}_p * \widetilde{\Psi}_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}\right\} \subseteq \left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap \widetilde{L}_pM_n \cap M^+(\Pi_n^+) \cap N_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}\right\},$$

$$\left\{\overline{L_p * \Psi_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}}\right\} \subseteq \left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap L_p\overline{M}_n \cap M^+(\Pi_n^+) \cap \Gamma(\overline{\Pi}_n^+) \cap N_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}\right\},$$

$$\left\{\overline{\widetilde{L}_p * \widetilde{\Psi}_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}}\right\} \subseteq \left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap \widetilde{L}_p\overline{M}_n \cap M^+(\Pi_n^+) \cap \Gamma(\overline{\Pi}_n^+) \cap N_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}\right\}.$$

Доведення наслідку 1 аналогічне доведенню наслідку 1 із [3]. При цьому достатньо лише замінити простори $C\overline{M}$, $C(\overline{\Pi}^+)$, $\Gamma(\overline{\Pi}^+)$, $C^\infty(\Pi^+)$ і L_pM, $M^+(\Pi^+)$ відповідно просторами $C\overline{M}_n$, $C(\overline{\Pi}_n^+)$, $\Gamma(\overline{\Pi}_n^+)$, $C^\infty(\Pi_n^+)$ і L_pM_n, $M^+(\Pi_n^+)$, а ядро $\Psi_y^{m/n}(x)$ ядром $\Psi_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}(x)$.

Позначимо через $\Psi_{\overline{y}}^1(x) = P_{\overline{y}}(x)$, $\Psi_{\overline{y}}^2(x) = W_{\overline{y}}(x)$, $\Psi_{\overline{y}}^3(x) = \left(W_{\overline{y}^k} * P_{\overline{y}^{n-k}}\right)(x)$ відповідно ядра Абеля – Пуассона (1), Ґаусса – Вейєрштрасса (2) і (3), $\widetilde{\Psi}_{\overline{y}}^1(x)$, $\widetilde{\Psi}_{\overline{y}}^2(x)$ і $\widetilde{\Psi}_{\overline{y}}^3(x)$ — їхні 2π-періодичні аналоги [10 – 15], $N_{\overline{y}}^1$, $N_{\overline{y}}^2$ і $N_{\overline{y}}^3$ — простори розв'язків відповідно систем

$$\frac{\partial^2 u(x,\overline{y})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,\overline{y})}{\partial y_i^2} = 0, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{63}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,\overline{y})}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,\overline{y})}{\partial y_i}, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{64}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u(x,\overline{y})}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,\overline{y})}{\partial y_i}, \qquad i = \overline{1,k}, \\ &\frac{\partial^2 u(x,\overline{y})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,\overline{y})}{\partial y_i^2} = 0, \qquad i = \overline{k+1,n}, \end{aligned} \tag{65}$$

де Π_n^+ — область визначення розв'язків цих систем.

Виявляється, що простори згорток з ядрами Абеля – Пуассона (1), Ґаусса- Вейєрштрасса (2) і (3) збігаються з підпросторами розв'язків систем (63) – (65).

Теорема 2. *Якщо* $j = 1,2,3$, *то справджуються рівності*

$$\left\{\overline{C * \Psi_{\overline{y}}^j}\right\} = \left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap C(\overline{\Pi}_n^+) \cap N_{\overline{y}}^j\right\}, \tag{66}$$

$$\left\{\overline{\widetilde{C} * \widetilde{\Psi}_{\overline{y}}^j}\right\} = \left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap C(\overline{\Pi}_n^+) \cap \widetilde{C}\overline{M}_n \cap N_{\overline{y}}^j, \right\} \tag{67}$$

$$\left\{L_p * \Psi_{\overline{y}}^j\right\} = \left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap L_p M_n \cap M^+(\Pi_n^+) \cap N_{\overline{y}}^j\right\}, \tag{68}$$

$$\left\{\widetilde{L}_p * \widetilde{\Psi}_{\overline{y}}^j\right\} = \left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap \widetilde{L}_p M_n \cap M^+(\Pi_n^+) \cap N_{\overline{y}}^j\right\},$$

$$\left\{\overline{L_p * \Psi_{\overline{y}}^j}\right\} = \left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap L_p\overline{M}_n \cap M^+(\Pi_n^+) \cap \Gamma(\overline{\Pi}_n^+) \cap N_{\overline{y}}^j\right\}, \tag{69}$$

$$\left\{\overline{\widetilde{L}_p * \widetilde{\Psi}_{\overline{y}}^j}\right\} = \left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap \widetilde{L}_p\overline{M}_n \cap M^+(\Pi_n^+) \cap \Gamma(\overline{\Pi}_n^+) \cap N_{\overline{y}}^j\right\}, \tag{70}$$

де $1 < p \leq \infty$, *а при* $p = 1$ *мають місце співвідношення*

$$\begin{aligned} &\left\{L * \Psi_{\overline{y}}^j\right\} \subset \left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap LM_n \cap M^+(\Pi_n^+) \cap N_{\overline{y}}^j\right\}, \\ &\left\{\widetilde{L} * \widetilde{\Psi}_{\overline{y}}^j\right\} \subset \left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap \widetilde{L}M_n \cap M^+(\Pi_n^+) \cap N_{\overline{y}}^j\right\}, \\ &\left\{\overline{L * \Psi_{\overline{y}}^j}\right\} \subset \left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap L\overline{M}_n \cap M^+(\Pi_n^+) \cap \Gamma(\overline{\Pi}_n^+) \cap N_{\overline{y}}^j\right\}, \\ &\left\{\overline{\widetilde{L} * \widetilde{\Psi}_{\overline{y}}^j}\right\} \subset \left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap \widetilde{L}\overline{M}_n \cap M^+(\Pi_n^+) \cap \Gamma(\overline{\Pi}_n^+) \cap N_{\overline{y}}^j\right\}. \end{aligned} \tag{71}$$

Доведення. Оскільки при відповідних наборах чисел m_j і ℓ_j ядра $\Psi_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}(x)$ збігаються з ядрами $\Psi_{\overline{y}}^j(x)$, а простори розв'язків систем $N_{\overline{y}}^{\overline{m}/\overline{\ell}}$ (5) — із просторами $N_{\overline{y}}^j$ систем (63) – (65), то, згідно з наслідком 1, при $1 \leq p \leq \infty$ виконуються співвідношення

$$\left\{\overline{C * \Psi_{\overline{y}}^j}\right\} \subset \left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap C(\overline{\Pi}_n^+) \cap N_{\overline{y}}^j\right\},$$

$$\left\{\overline{\widetilde{C} * \widetilde{\Psi}_{\overline{y}}^j}\right\} \subset \left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap C(\overline{\Pi}_n^+) \cap \widetilde{C}\overline{M}_n \cap N_{\overline{y}}^j\right\},$$

$$\left\{L_p * \Psi_{\overline{y}}^j\right\} \subset \left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap L_p M_n \cap M^+(\Pi_n^+) \cap N_{\overline{y}}^j\right\},$$
$$\left\{\widetilde{L}_p * \widetilde{\Psi}_{\overline{y}}^j\right\} \subset \left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap \widetilde{L}_p M_n \cap M^+(\Pi_n^+) \cap N_{\overline{y}}^j\right\}, \tag{72}$$
$$\left\{\overline{L_p * \Psi_{\overline{y}}^j}\right\} \subset \left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap L_p \overline{M}_n \cap M^+(\Pi_n^+) \cap \Gamma(\overline{\Pi}_n^+) \cap N_{\overline{y}}^j\right\},$$
$$\left\{\overline{\widetilde{L}_p * \widetilde{\Psi}_{\overline{y}}^j}\right\} \subset \left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap \widetilde{L}_p \overline{M}_n \cap M^+(\Pi_n^+) \cap \Gamma(\overline{\Pi}_n^+) \cap N_{\overline{y}}^j\right\},$$

з яких при $p = 1$ випливають співвідношення (71).

Нехай $u(x, \overline{y})$ — довільна функція з простору $\left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap C(\overline{\Pi}_n^+) \cap N_{\overline{y}}^1\right\}$. Для спрощення записів будемо вважати, що $n = 2$. Тоді функція $u(x, \overline{y}) = u(x, y_1, y_2)$ є розв'язком системи

$$\frac{\partial^2 u(x,\overline{y})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,\overline{y})}{\partial y_i^2} = 0, \quad i = \overline{1,2}. \tag{73}$$

Із системи (73) випливає, що при $y_1 > 0$ і фіксованому $y_2^0 \geq 0$ функція $u(x, y_1, y_2^0)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x,\overline{y})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,\overline{y})}{\partial y_1^2} = 0, \tag{74}$$

а при $y_2 > 0$ і фіксованому $y_1^0 \geq 0$ — розв'язком рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x,\overline{y})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,\overline{y})}{\partial y_2^2} = 0. \tag{75}$$

Оскільки $u(x, y_1, y_2) \in C^\infty(\Pi_2^+) \cap C(\overline{\Pi}_2^+)$, то при фіксованих $y_1^0 \geq 0$ і $y_2^0 \geq 0$

$$u(x, y_1, y_2^0) \in \left\{C^\infty(\Pi_1^+) \cap C(\overline{\Pi}_1^+)\right\}, \qquad u(x, y_1^0, y_2) \in \left\{C^\infty(\Pi_1^+) \cap C(\overline{\Pi}_1^+)\right\}. \tag{76}$$

Із (73)–(76) на підставі теореми 2 із [3] випливає, що при $y_1 > 0$ і $y_2^0 \geq 0$

$$u(x, y_1, y_2^0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t, 0, y_2^0) P_{y_1}(x - t)\, dt, \tag{77}$$

а при $y_2 > 0$ і $y_1^0 \geq 0$

$$u(x, y_1^0, y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t, y_1^0, 0) P_{y_2}(x - t)\, dt. \tag{78}$$

Із рівностей (77), (78) випливає, що при $y_2 = 0$ і $y_1 > 0$

$$u(x, y_1, 0) = (f * P_{y_1})(x), \tag{79}$$

при $y_1 = 0$ і $y_2 > 0$

$$u(x, 0, y_2) = (f * P_{y_2})(x),$$

а при $y_1 > 0$ і $y_2 > 0$

$$u(x, y_1, y_2) = (f * P_{y_1} * P_{y_2})(x), \tag{80}$$

де

$$f(t) = u(t, 0, 0) \in C. \tag{81}$$

Із рівностей (79) – (81) випливає, що функція $u(x, y_1, y_2)$ належить простору $\left\{\overline{C * P_{y_1} * P_{y_2}}\right\} = \left\{\overline{C * P_{\overline{y}}}\right\} = \left\{\overline{C * \Psi^1_{\overline{y}}}\right\}$, тобто

$$\left\{C^\infty(\Pi_2^+) \cap C(\overline{\Pi}_2^+) \cap N^1_{y_1,y_2}\right\} \subseteq \left\{\overline{C * \Psi^1_{y_1,y_2}}\right\}.$$

Аналогічно можна встановити, що

$$\left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap C(\overline{\Pi}_n^+) \cap N^j_{\overline{y}}\right\} \subseteq \left\{\overline{C * \Psi^j_{\overline{y}}}\right\}. \tag{82}$$

Із співвідношень (72), (82) випливає (66). Рівності (67) – (70) доводяться аналогічно.

Теорему 2 доведено.

Із теореми 1 з [1], наслідку 1 з [1] і теореми 2 на підставі невід'ємності ядер $\Psi^j_{\overline{y}}(x)$ і $\widetilde{\Psi}^j_{\overline{y}}(x)$ випливає таке твердження.

Наслідок 2. *Нехай* $j = 1, 2, 3$. *Тоді підпростори розв'язків систем* (63) – (65)

$$\left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap C(\overline{\Pi}_n^+) \cap N^j_{\overline{y}}\right\} = \left\{\overline{C * \Psi^j_{\overline{y}}}\right\},$$

$$\left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap C(\overline{\Pi}_n^+) \cap \widetilde{C}\overline{M}_n \cap N^j_{\overline{y}}\right\} = \left\{\overline{\widetilde{C} * \widetilde{\Psi}^j_{\overline{y}}}\right\},$$

$$\left\{u(x, \overline{y}) \in C^\infty(\Pi_n^+) \cap C(\overline{\Pi}_n^+) \cap N^j_{\overline{y}} : u(x, \overline{0}) \in C_r\right\} = \left\{\overline{C_r * \Psi^j_{\overline{y}}}\right\}$$

ізометричні відповідно просторам $C, \widetilde{C}$ *і* C_r, *де* C_r — *підпростір рівномірно неперервних функцій простору* C.

Якщо $1 < p \leq \infty$, *то підпростори розв'язків систем* (63) – (65)

$$\left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap L_p\overline{M}_n \cap M^+(\Pi_n^+) \cap \Gamma(\overline{\Pi}_n^+) \cap N^j_{\overline{y}}\right\} = \left\{\overline{L_p * \Psi^j_{\overline{y}}}\right\},$$

$$\left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap \widetilde{L}_p\overline{M}_n \cap M^+(\Pi_n^+) \cap \Gamma(\overline{\Pi}_n^+) \cap N^j_{\overline{y}}\right\} = \left\{\overline{\widetilde{L}_p * \widetilde{\Psi}^j_{\overline{y}}}\right\}$$

ізометричні відповідно просторам L_p *і* $\widetilde{L}_p$.

Якщо $1 < p < \infty$, *то підпростори розв'язків систем* (63) – (65)

$$\left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap L_p M_n \cap M^+(\Pi_n^+) \cap N^j_{\overline{y}}\right\} = \left\{L_p * \Psi^j_{\overline{y}}\right\},$$

$$\left\{C^\infty(\Pi_n^+) \cap \widetilde{L}_p M_n \cap M^+(\Pi_n^+) \cap N^j_{\overline{y}}\right\} = \left\{\widetilde{L}_p * \widetilde{\Psi}^j_{\overline{y}}\right\}$$

ізометричні відповідно просторам L_p *і* $\widetilde{L}_p$.

Література

1. *Bushev D. M.* Isometry of functional spaces with diferent number of variables // Ukr. Math. J. – 1998. – **50**, № 8. – P. 1170 – 1191.
2. *Bushev D. M.,Kharkevych Yu. I.* Conditions of convergence almost everywhere for the convolution of a function with delta-shaped kernel to this function // Ukr. Math. J. – 2016. – **67**, № 11. – P. 1643 – 1661.
3. *Бушев Д. Н., Харкевич Ю. И.* Нахождение подпространств решений уравнения Лапласа и теплопроводности, изометрических пространствам действительных функций, и некоторые их применения // Мат. заметки. – 2018. – **103**, № 6. – С. 803 – 817.
4. *Штарк Э. Л.* Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip 1 от сингулярного интеграла Абеля – Пуассона // Мат. заметки. – 1973. – **13**, № 1. – С. 21 – 28.
5. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Наближення спряжених диференційовних функцій їх інтегралами Абеля – Пуассона // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 1. – С. 73 – 82.
6. *Kal'chuk I. V., Kharkevych Yu. I.* Complete asymptotics of the approximation of function from the Sobolev classes by the Poisson integrals // Acta Comment. Univ. Tartu. Math. – 2018. – **22**, № 1. – P. 23 – 36.
7. *Жигалло Т. В., Харкевич Ю. І.* Наближення (ψ, β)-диференційовних функцій, заданих на дійсній осі, операторами Абеля – Пуассона // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 8. – С. 1097 – 1111.
8. *Hrabova U. Z., Kal'chuk I. V., Stepanyuk T. A.* Approximative properties of the Weierstrass integrals on the classes $W^r_\beta H^\alpha$ // J. Math. Sci. (N.Y.) – 2018. – **231**, № 1. – P. 41 – 47.
9. *Грабова У. З., Кальчук І. В., Степанюк Т. А.* Наближення функцій із класів $W^r_\beta H^\alpha$ інтегралами Вейєрштрасса // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, № 4. – С. 510 – 519.
10. *Баскаков В. А.* О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля – Пуассона // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 2. – С. 169 – 180.
11. *Фалалеев Л. П.* Приближение сопряженных функций обобщенными операторами Абеля – Пуассона // Мат. заметки. – 2000. – **67**, № 4. – С. 595 – 602.
12. *Жигалло Т. В., Харкевич Ю. І.* Наближення функцій із класу $C^\psi_{\beta,\infty}$ інтегралами Пуассона у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 12. – С. 1612 – 1629.
13. *Харкевич Ю. И., Степанюк Т. А.* Аппроксимативные свойства интегралов Пуассона на классах $C^\psi_\beta H^\alpha$ // Мат. заметки. – 2014. — **96**, № 6. – С. 939 – 952.
14. *Кальчук І. В., Харкевич Ю. І.* Наближення (ψ, β)-диференційовних функцій інтегралами Вейєрштрасса // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 7. – С. 953 – 978.
15. *Кальчук І. В.* Наближення (ψ, β)-диференційовних функцій, заданих на дійсній осі, операторами Вейєрштрасса // Укр. мат. журн. – 2007. — **59**, № 9. – С. 1201 – 1220.

Одержано 13.12.18