УДК 517.5

А. С. Романюк, В. С. Романюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОЦІНКИ ДЕЯКИХ АПРОКСИМАЦІЙНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

We obtain the exact-order estimates for some approximating characteristics of the classes $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ and $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ of periodic functions of one and many variables in the norm of the space $B_{\infty,1}$.

Встановлено точні за порядком оцінки деяких апроксимаційних характеристик класів $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ і $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних за нормою простору $B_{\infty,1}$.

1. Вступ. У даній статті продовжуються дослідження (див. [1]) деяких апроксимаційних характеристик класів Нікольського – Бєсова $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ і Соболєва $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ періодичних функцій з однією та багатьма змінними у просторі $B_{\infty,1}$. Особливістю цього простору, як лінійного підпростору в L_∞, є те, що норма в ньому „сильніша” за L_∞-норму. Як зазначено в [1], мотивацією до дослідження певних апроксимаційних характеристик саме у просторі $B_{\infty,1}$ є та обставина, що підходів до розв’язання задачі про їхні порядкові значення у просторі L_∞ при $d \geq 3$ поки що не знайдено (див. [2], питання 4.2, 6.3). Зазначимо, що дотичним до результатів даної роботи є розв’язок задачі із [3], де встановлено точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників і ентропійних чисел одиничних куль із так званих двійкових просторів Бєсова $\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{p,\theta}$, компактно вкладених в експоненціальні простори Орліча $\exp L^\nu$, що наділені нормою Люксембурга. Така норма тісно пов’язана з L_p-нормами при $1 \leq p < \infty$.

Результативну частину даної роботи фактично викладено у пунктах 5 і 6. У п. 5 досліджуються певні апроксимаційні характеристики згаданих вище класів функцій з однією змінною. В п. 6 об’єктами дослідження є класи $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ і $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ функцій із багатьма змінними. Тут одержано точні за порядком оцінки наближення їх у просторі $B_{\infty,1}$ за допомогою східчасто-гіперболічних сум Фур’є. За нормою цього ж простору також встановлено точні за порядком оцінки величин найкращих ортогональних тригонометричних наближень цих класів.

У роботі використовуються позначення та означення, введені в [1]. Для зручності основні з них ми нагадаємо, а нові будемо вводити за необхідністю при викладі матеріалу.

2. Класи функцій. Означимо простори і класи функцій. Нехай $\mathbb{R}^d$ — d-вимірний евклідів простір з елементами $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$; $\pi_d := \prod_{j=1}^{d} [0, 2\pi) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \colon x_j \in [0, 2\pi),\ j = \overline{1,d}\right\}$. Через $L_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, позначимо простір вимірних 2π-періодичних за кожною змінною функцій f зі скінченними нормами

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|, \quad p = \infty.$$

Далі, нехай $\omega_l(f, \boldsymbol{t})_p$, $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d_+$, — повний мішаний p-модуль гладкості порядку l $(l \in \mathbb{N})$ функції $f \in L_p(\pi_d)$ (див. [1]).

Кажуть, що функція $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, *належить простору* $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$, *якщо скінченною є її напівнорма*

$$|f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} := \begin{cases} \left(\int\limits_{\pi_d} \left(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{-r_j} \omega_l(f, \boldsymbol{t})_p \right)^{\theta} \prod\limits_{j=1}^{d} \dfrac{dt_j}{t_j} \right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \leq \theta < \infty, \\ \sup\limits_{t_j > 0} \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{-r_j} \omega_l(f, \boldsymbol{t})_p, & \theta = \infty, \end{cases}$$

де $l > \max\left\{ r_i, i = \overline{1,d} \right\}$.

Норму на лінійних просторах $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ задамо формулою $\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} = \|f\|_p + |f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}}$.

Як зазначено в [1], простори $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ введено в [4] і, з одного боку, вони є узагальненнями відомих ізотропних просторів Бєсова [5] (у випадку $\theta = \infty$ — просторів Нікольського [6]), а з другого — належать шкалі просторів SB мішаної гладкості, введених Т. І. Амановим у [7]. Для просторів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ мають місце такі вкладення по параметру θ:

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p,1} \hookrightarrow B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta_1} \hookrightarrow B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta_2} \hookrightarrow B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty} \equiv H^{\boldsymbol{r}}_p,$$

де $1 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \infty$.

У доведенні належності тієї чи іншої функції простору $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, або деякому класу з цього простору здебільшого використовується так зване декомпозиційне нормування функцій простору $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ [4]. Сформулюємо результат із [4] у відповідності з прийнятими нижче означеннями і позначеннями. Для вектора $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1,d}$, покладемо

$$\rho(\boldsymbol{s}) := \left\{ \boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d \colon [2^{s_j - 1}] \leq |k_j| < 2^{s_j}, \, j = \overline{1,d} \right\}$$

і для $f \in L_1(\pi_d)$ означимо

$$\delta_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) := \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho(\boldsymbol{s})} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,$$

де $\widehat{f}(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{-d} \displaystyle\int_{\pi_d} f(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{t})} \, d\boldsymbol{t}$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Позначимо

$$L^0_p(\pi_d) := \left\{ f \in L_p(\pi_d) \colon \int\limits_0^{2\pi} f(\boldsymbol{x}) \, dx_j = 0, \; j = \overline{1,d} \right\}.$$

Нехай $p \in (1, \infty)$. В [4] доведено, що для напівнорми $|f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}}$ функції $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} \cap L^0_p(\pi_d)$ справджуються співвідношення

$$|f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d_+} 2^{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r})\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leq \theta < \infty, \tag{1}$$

$$|f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}} \asymp \sup_{\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d_+} 2^{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r})} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)\|_p, \tag{2}$$

а також показано, що на множині $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} \cap L^0_p(\pi_d)$ напівнорма $|\cdot|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}}$ насправді є нормою.

Тут і в подальшому $\asymp$ позначає відношення слабкої еквівалентності, тобто для виразів a та b, що визначені деякою сукупністю параметрів, запис $a \asymp b$ означає, що існують такі додатні величини $c_1,\ c_2$, які не залежать від одного істотного параметра, що $c_1 b \le a \le c_2 b$. Також використовуємо символи $\ll$ чи $\gg$ для порядкових нерівностей, тобто $a \ll b$ $(a \gg b)$, якщо існує така додатна стала C, що $a \le Cb$ $(b \le Ca)$.

Так звані порядкові (або точні за порядком) співвідношення (1), (2) при певній їх модифікації мають місце і у випадках $p = 1$ та $p = \infty$. Отже, нехай $V_l(u)$, $l \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{R}$, позначає ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_l(u) = 1 + 2\sum_{k=1}^{l} \cos ku + 2\sum_{k=l+1}^{2l} \frac{2l-k}{l} \cos ku.$$

Далі, для $f, g \in L_1(\pi_d)$ означимо операцію згортки $*$ формулою

$$(f * g)(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}.$$

Якщо $f \in L_p(\pi_d)$, а

$$A_s(\boldsymbol{x}) := 2^d \prod_{j=1}^{d} (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)),$$

$$\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d), \quad s_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = \overline{1,d}, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$$

(при $s_j = 0$ вважаємо, що $V_{2^{s_j-1}}(x_j) = 0$), то покладемо

$$\mathbb{A}_{\boldsymbol{s}} f(\boldsymbol{x}) = (f * A_{\boldsymbol{s}})(\boldsymbol{x}).$$

Для кожного $\boldsymbol{s}$ за допомогою оператора $\mathbb{A}_{\boldsymbol{s}}$ визначаються деякі кратні середні $A_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) := := \mathbb{A}_{\boldsymbol{s}} f(\boldsymbol{x})$ функції $f \in L_p(\pi_d)$, які внаслідок відомих властивостей оператора згортки можна подати у вигляді тригонометричного полінома з певними коефіцієнтами, залежними від f. Зазначимо, що розмірність таких поліномів для всіх $f \in L_p(\pi_d)$ дорівнює $2^{|\boldsymbol{s}|_1}$. Тут $|\boldsymbol{s}|_1 := := s_1 + \ldots + s_d$ для $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d_+$.

Таким чином, для $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} \cap L^0_p(\pi_d)$ справджуються співвідношення (див. зауваження 2.1 в [4], а також [7])

$$|f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^m_+} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^\theta_p \right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{3}$$

$$|f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}} \asymp \sup_{\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^m_+} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p\,. \tag{4}$$

Зауважимо, що співвідношення (3), (4) справджуються і при $1 < p < \infty$.

Нагадаємо означення функціональних просторів $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ і класів $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$, які використовуються при подальшому викладі. Нехай для $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d)$ і $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$

$$F_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}) := 2^d \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^d} \prod_{j=1}^{d} k_j^{-r_j} \cos\left(k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2}\right), \qquad r_j > 0, \quad \alpha_j \in \mathbb{R},$$

— багатовимірні аналоги ядер Бернуллі.

Позначимо через $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ лінійний простір функцій f, які можна записати у вигляді

$$f(\boldsymbol{x}) = (\varphi * F_{\boldsymbol{r}}(\cdot,\boldsymbol{\alpha}))(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} \varphi(\boldsymbol{y}) F_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha})\, d\boldsymbol{y}, \tag{5}$$

де $\varphi \in L_p(\pi_d)$. Для $f \in W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ покладемо $\|f\|_{W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}} := \|\varphi\|_p$. Якщо в (5) функція $\varphi \in L_p(\pi_d)$ така, що $\|\varphi\|_p \le 1$, то відповідний клас у просторі $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ позначимо через $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$. Детальну інформацію щодо самих просторів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, $H^{\boldsymbol{r}}_p$ і $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$, а також щодо історії їх досліджень з точки зору апроксимації можна почерпнути з монографій [8 – 11] і робіт [2, 4].

Далі вважаємо, що координати вектора $\boldsymbol{r} = (r_1,\ldots,r_d)$, як параметра в означених просторах і класах, впорядковані так, що $0 < r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \ldots \le r_d$, а також $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1,\ldots,\gamma_d)$ — вектор з координатами $\gamma_j = \dfrac{r_j}{r_1}$, $j = \overline{1,d}$, і $\boldsymbol{\gamma}' = (\gamma'_1,\ldots,\gamma'_d)$, де $\gamma'_j = \gamma_j$ при $j = \overline{1,\nu}$ і $1 < \gamma'_j < \gamma_j$ при $j = \overline{\nu+1,d}$. Також зазначимо, що через $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ позначається одинична куля у просторі $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, а точніше,

$$\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} := \left\{ f \in L^0_p(\pi_d) \colon \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} \le 1 \right\}.$$

Тепер дамо означення норми $\|\cdot\|_{B_{p,1}}$ у підпросторах $B_{p,1}$, $p \in \{1,\infty\}$, функцій $f \in L_p(\pi_d)$. Така норма схожа на декомпозиційну норму функцій із просторів Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$. Для тригонометричних поліномів t за кратною тригонометричною системою $\{e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ норма $\|t\|_{B_{p,1}}$, $p \in \{1,\infty\}$, визначається формулою

$$\|t\|_{B_{p,1}} := \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} \|A_{\boldsymbol{s}}(t,\cdot)\|_p$$

(сума містить скінченне число доданків).

Аналогічно означується норма $\|f\|_{B_{p,1}}$, $p \in \{1,\infty\}$, для будь-якої функції $f \in L_p(\pi_d)$ такої, що ряд $\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} \|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p$ збігається.

Отже, простори $B_{p,1}$, $p \in \{1,\infty\}$, фактично можна „вписати" в шкалу просторів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, якщо з огляду на співвідношення (3), (4) вважати, що $\boldsymbol{r} = (0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^d_+$. Зазначимо, що для $f \in B_{p,1}$, $p \in \{1,\infty\}$, очевидно, $\|f\|_p \ll \|f\|_{B_{p,1}}$ і $\|f\|_{B_{1,1}} \ll \|f\|_{B_{\infty,1}}$.

3. Апроксимаційні величини. Означимо апроксимаційні характеристики, зазначивши спершу, що деякі з них на класах $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ і $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ у просторах $B_{1,1}$ досліджувались у роботах [12, 13].

Якщо вектор $\boldsymbol{s} = (s_1,\ldots,s_d)$, $s_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1,d}$, то, як і раніше, покладемо

$$\rho(\boldsymbol{s}) = \left\{ \boldsymbol{k} = (k_1,\ldots,k_d) \in \mathbb{Z}^d \colon [2^{s_j-1}] \le |k_j| < 2^{s_j},\ j = \overline{1,d} \right\}$$

і для $n \in \mathbb{N}$ та $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1,\ldots,\gamma_d)$, $\gamma_j \in \mathbb{R}_+$, $j = \overline{1,d}$ $(\gamma_1 = 1)$, визначимо множину

$$Q_n^{\gamma} := \bigcup_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\le n} \rho(\boldsymbol{s}),$$

яка називається східчастим гіперболічним хрестом у $\mathbb{Z}^d$.

Для функції $f \in L_1(\pi_d)$ через $S_{Q_n^{\gamma}}(f)$ позначимо її часткову, так звану східчасто-гіперболічну, суму Фур'є

$$S_{Q_n^{\gamma}}(f)(\boldsymbol{x}) := \sum_{\boldsymbol{k}\in Q_n^{\gamma}} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\le n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d,$$

де $\widehat{f}(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{-d}\displaystyle\int_{\pi_d} f(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{t})} d\boldsymbol{t}$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Нехай $\mathscr{X}$ — нормований простір із нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$, $\mathscr{X}\subset L_1(\pi_d)$. Для класу $F\subset\mathscr{X}$ покладемо

$$\mathscr{E}_n^{\gamma}(F)_{\mathscr{X}} = \mathscr{E}_{Q_n^{\gamma}}(F)_{\mathscr{X}} := \sup_{f\in\mathscr{X}} \left\| f - S_{Q_n^{\gamma}}(f)\right\|_{\mathscr{X}}.$$

При $d=1$ замість $\mathscr{E}_n^{\gamma}(F)_{\mathscr{X}}$ використовуємо позначення $\mathscr{E}_n(F)_{\mathscr{X}}$. Зауважимо, що у такому випадку

$$S_{Q_n^{\gamma}}(f)(x) = S_n(f)(x) := \sum_{k=-2^n+1}^{2^n-1} \widehat{f}(k) e^{ikx}, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Поряд із величинами $\mathscr{E}_n^{\gamma}(F)_{\mathscr{X}}$ і $\mathscr{E}_n(F)_{\mathscr{X}}$ будемо досліджувати близьку до них апроксимаційну характеристику $e_M^{\perp}(F)_{\mathscr{X}}$ — величину найкращого ортогонального тригонометричного наближення класу F у просторі $\mathscr{X}$. Отже, нехай Ω_M — довільний набір із M d-вимірних векторів $\boldsymbol{k}^j = \left(k_1^j,\ldots,k_d^j\right)$, $j=\overline{1,M}$, з цілочисловими координатами. Для $f\in L_1(\pi_d)$ покладемо

$$S_{\Omega_M}(f,\boldsymbol{x}) := \sum_{j=1}^{M} \widehat{f}(\boldsymbol{k}^j) e^{i(\boldsymbol{k}^j,\boldsymbol{x})}, \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d.$$

Розглянемо величину $e_M^{\perp}(f)_{\mathscr{X}} = \inf_{\Omega_M} \left\| f(\cdot) - S_{\Omega_M}(f,\cdot)\right\|_{\mathscr{X}}$ і для функціонального класу $F\subset$ $\subset\mathscr{X}$ означимо

$$e_M^{\perp}(F)_{\mathscr{X}} := \sup_{f\in F} e_M^{\perp}(f)_{\mathscr{X}}.$$

Величину $e_M^{\perp}(F)_{\mathscr{X}}$ називають *найкращим ортогональним тригонометричним наближенням* класу F у просторі $\mathscr{X}$.

Частина досліджень у роботі стосується оцінок інших характеристик, а саме колмогоровських поперечників і ентропійних чисел класів $\mathbb{B}^r_{p,\theta}$ і $\mathbb{W}^r_{p,\alpha}$ періодичних функцій з однією змінною у просторі $L_\infty(\pi_d)$. Нагадаємо означення цих апроксимаційних величин.

Нехай $\mathscr{X}$ — банахів простір із нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$ і $\mathscr{A}$ — компактна множина у просторі $\mathscr{X}$. Для $y\in\mathscr{X}$ і $r>0$ позначимо $B_{\mathscr{X}}(y,r) := \left\{x\in\mathscr{X} : \|x-y\|_{\mathscr{X}} \le r\right\}$, тобто $B_{\mathscr{X}}(y,r)$ — куля в $\mathscr{X}$ із центром у точці y і радіусом r. Для $k\in\mathbb{N}$ величина (див., наприклад, [14])

$$\epsilon_k(\mathscr{A},\mathscr{X}) := \inf\left\{\varepsilon : \exists y^1,\ldots,y^{2^k}\in\mathscr{X} \;\middle|\; \mathscr{A}\subseteq \bigcup_{j=1}^{2^k} B_{\mathscr{X}}(y^j,\varepsilon)\right\}$$

називається *ентропійним числом* множини $\mathscr{A}$ у просторі $\mathscr{X}$.

Нехай $\mathscr{Y}$ — нормований простір із нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{Y}}$, $\mathcal{L}_M(\mathscr{Y})$ — сукупність підпросторів у $\mathscr{Y}$, розмірності яких не перевищують M, і W — центрально-симетрична множина в $\mathscr{Y}$. Величина

$$d_M(W,\mathscr{Y}) := \inf_{L_M\in\mathcal{L}_M(\mathscr{Y})} \sup_{w\in W} \inf_{u\in L_M} \|w-u\|_{\mathscr{Y}}$$

називається *колмогоровським M-поперечником* множини W у просторі $\mathscr{Y}$.

4. Допоміжні твердження. Сформулюємо кілька відомих тверджень, які використовуються при доведенні результатів.

Перше з цих тверджень є наслідком однієї нерівності Б. Карла (див., наприклад, [15]).

Лема А [16, 17]**.** *Нехай $\mathscr{K}$ — компакт у сепарабельному банаховому просторі $\mathscr{X}$. Припустимо, що для пари чисел (a,b), де $a>0$, $b\in\mathbb{R}$ або $a=0$, $b<0$, мають місце оцінки*

$$d_m(\mathscr{K},\mathscr{X}) \ll m^{-a}(\log m)^b,$$

$$\epsilon_m(\mathscr{K},\mathscr{X}) \gg m^{-a}(\log m)^b.$$

Тоді справджуються співвідношення

$$\epsilon_m(\mathscr{K},\mathscr{X}) \asymp d_m(\mathscr{K},\mathscr{X}) \asymp m^{-a}(\log m)^b.$$

Лема Б [9, с. 11]**.** *Має місце оцінка*

$$\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq l} 2^{-\alpha(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})} \asymp 2^{-\alpha l} l^{\nu-1}, \quad \alpha>0.$$

Теорема А [18]**.** *Нехай $1\leq p<\infty,\ 1\leq\theta\leq\infty$ і $r_1>\dfrac{1}{p}$. Тоді при $d\geq 1$*

$$e_M^{\perp}\big(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}\big)_\infty \asymp (M^{-1}\log^{\nu-1}M)^{r_1-\frac{1}{p}}\left(\log^{\nu-1}M\right)^{1-\frac{1}{\theta}}.$$

Теорема Б [18]**.** *Нехай $1<p<\infty,\ r_1>\dfrac{1}{p}$. Тоді при $d\geq 1$*

$$e_M^{\perp}(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\alpha})_\infty \asymp (M^{-1}\log^{\nu-1}M)^{r_1-\frac{1}{p}}\left(\log^{\nu-1}M\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Теорема В [19]**.** *Нехай $1<p<\infty,\ 1\leq\theta<\infty$ і $r_1>\dfrac{1}{p}$. Тоді при $d\geq 1$*

$$\mathscr{E}_n^{\boldsymbol{\gamma}}\big(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}\big)_\infty \asymp 2^{-n(r_1-\frac{1}{p})}\, n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Теорема Г [12]**.** *Нехай $1<p<\infty,\ r_1>\dfrac{1}{p}$. Тоді при $d\geq 1$*

$$\mathscr{E}_n^{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_{p})_\infty \asymp 2^{-n(r_1-\frac{1}{p})} n^{\nu-1}.$$

Теорема Д [20]**.** *Нехай $d=1,\ 2\leq p\leq\infty,\ 1\leq\theta\leq\infty$ і $r_1>\dfrac{1}{2}$. Тоді*

$$\epsilon_M(\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta},\, L_\infty) \asymp M^{-r_1}.$$

5. Апроксимаційні характеристики класів періодичних функцій однієї змінної. У цьому пункті встановлено точні за порядком оцінки величин найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta}$ і $\mathbb{W}^{r_1}_{p,\alpha}$ періодичних функцій з однією змінною у просторі $B_{\infty,1}$. Окрім того, знайдені порядкові значення ентропійних чисел і колмогоровських поперечників цих функціональних класів у просторі $B_{\infty,1}$. Зазначимо, що результати досліджень доповнюють наведені в роботі [1].

Справджується таке твердження.

Теорема 1. *Нехай* $d = 1,\ 1 < p < \infty,\ 1 \leq \theta \leq \infty$ *і* $r_1 > \dfrac{1}{p}$. *Тоді*

$$e^{\perp}_M(\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}} \asymp M^{-r_1+\frac{1}{p}}.$$

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху, зазначивши, що внаслідок вкладення $B^{r_1}_{p,\theta} \hookrightarrow H^{r_1}_p$, $1 \leq \theta < \infty$, її достатньо отримати при $\theta = \infty$, тобто для класів $\mathbb{B}^{r_1}_{p,\infty} \equiv \mathbb{H}^{r_1}_p$.

Отже, нехай $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 4$, і $f \in \mathbb{H}^{r_1}_p$, $1 < p < \infty$. Розглянемо наближення функції f за допомогою поліномів $t_n(f)$ вигляду (6):

$$t_n(f)(x) = S_n(f)(x) := \sum_{s=1}^{n} \delta_s(f)(x) = \sum_{k=-2^n+1}^{2^n-1} \widehat{f}(k) e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

де число n пов'язане з M співвідношенням $2^{n+1} \leq M \leq 2^{n+2}$. Тоді згідно з означенням норми у просторі $B_{\infty,1}$, беручи до уваги одну властивість згортки, отримуємо

$$e^{\perp}_M(f)_{B_{\infty,1}} \leq \| f - t_n(f) \|_{B_{\infty,1}} = \left\| \sum_{s=n+1}^{\infty} \delta_s(f) \right\|_{B_{\infty,1}} =$$

$$= \sum_{s>n} \left\| A_s * \sum_{s'=s-1}^{s+1} \delta_{s'}(f) \right\|_{\infty} \leq \sum_{s=n+1}^{\infty} \|A_s\|_{p'} \left\| \sum_{s'=s-1}^{s+1} \delta_{s'}(f) \right\|_p =: J_1. \tag{7}$$

Для продовження оцінки величини J_1 зазначимо таке. Згідно зі співвідношенням $\|V_{2^s}\|_p \asymp 2^{s(1-\frac{1}{p})}$, $1 \leq p \leq \infty$ (див., наприклад, [10], гл. 1, § 1), маємо

$$\|A_s\|_{p'} = \|V_{2^s} - V_{2^{s-1}}\|_{p'} \leq \|V_{2^s}\|_{p'} + \|V_{2^{s-1}}\|_{p'} \asymp 2^{\frac{s}{p}}. \tag{8}$$

Крім того, взявши до уваги, що (див., наприклад, [10], гл. 1, § 3)

$$\left\|\delta_{s'}(f)\right\|_p \ll 2^{-s' r_1}, \quad s' \in \mathbb{N}, \quad 1 < p < \infty,$$

можемо записати

$$\left\| \sum_{s'=s-1}^{s+1} \delta_{s'}(f) \right\|_p \leq \sum_{s'=s-1}^{s+1} \|\delta_{s'}(f)\|_p \ll \sum_{s'=s-1}^{s+1} 2^{-s' r_1} \ll 2^{-s r_1}. \tag{9}$$

Отже, з (7) із урахуванням (8), (9) випливає

$$J_1 \ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{-s'(r_1-\frac{1}{p})} \asymp 2^{-n(r_1-\frac{1}{p})}.$$

Враховуючи співвідношення між числами M і n, приходимо до оцінки

$$e^{\perp}_{M}(f)_{B_{\infty,1}} \ll M^{-r_1+\frac{1}{p}}.$$

Щодо оцінки знизу в (8) зазначимо, що вона є наслідком теореми А (за умови $\nu = 1$), бо

$$e^{\perp}_{M}\big(\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta}\big)_{B_{\infty,1}} \gg e^{\perp}_{M}\big(\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta}\big)_{\infty}.$$

Теорему 1 доведено.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $d = 1,\ 1 < p < \infty$ *і* $r_1 > \dfrac{1}{p}$. *Тоді при* $1 \le \theta \le \infty$ *справджується співвідношення*

$$\mathscr{E}_n\big(\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta}\big)_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-n(r_1-\frac{1}{p})}. \tag{10}$$

Оцінку зверху встановлено при доведенні теореми 1. Відповідна оцінка знизу в (10) також є наслідком цієї теореми, оскільки при $2^{n+1} \le M \le 2^{n+2}$

$$\mathscr{E}_n\big(B^{r_1}_{p,\theta}\big)_{B_{\infty,1}} \gg e^{\perp}_{M}\big(B^{r_1}_{p,\theta}\big)_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-n(r_1-\frac{1}{p})}.$$

***Зауваження* 1.** Проаналізувавши доведення теореми 1 і наслідку 1, можна дійти висновку щодо справедливості при $1 < p < \infty,\ 1 \le \theta \le \infty$ і $r_1 > \dfrac{1}{p}$ таких співвідношень:

$$e^{\perp}_{M}\big(\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta}\big)_{B_{\infty,1}} \asymp e^{\perp}_{M}\big(\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta}\big)_{\infty},$$
$$\mathscr{E}_n\big(\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta}\big)_{B_{\infty,1}} \asymp \mathscr{E}_n\big(\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta}\big)_{\infty}.$$

Аналогічні теоремі 1 і наслідку 1 твердження мають місце також для класів $\mathbb{W}^{r_1}_{p,\alpha}$.

Теорема 2. *Нехай* $d = 1,\ 1 < p < \infty,\ \alpha \in \mathbb{R}$ *і* $r_1 > \dfrac{1}{p}$. *Тоді*

$$e^{\perp}_{M}\big(\mathbb{W}^{r_1}_{p,\alpha}\big)_{B_{\infty,1}} \asymp M^{-r_1+\frac{1}{p}}. \tag{11}$$

Доведення. Оцінка зверху випливає з теореми 1, оскільки $W^{r_1}_{p,\alpha} \hookrightarrow H^{r_1}_{p}$. Відповідна оцінка знизу в (11) є наслідком теореми Б (за умови $\nu = 1$) і співвідношень

$$e^{\perp}_{M}\big(\mathbb{W}^{r_1}_{p,\alpha}\big)_{B_{\infty,1}} \gg e^{\perp}_{M}\big(\mathbb{W}^{r_1}_{p,\alpha}\big)_{\infty} \asymp M^{-r_1+\frac{1}{p}}, \quad 1 < p < \infty.$$

Теорему 2 доведено.

***Наслідок* 2.** *Нехай* $d = 1,\ 1 < p < \infty,\ \alpha \in \mathbb{R}$ *і* $r_1 > \dfrac{1}{p}$. *Тоді*

$$\mathscr{E}_n\big(\mathbb{W}^{r_1}_{p,\alpha}\big)_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-n(r_1-\frac{1}{p})}.$$

***Зауваження* 2.** При $1 < p < \infty,\ \alpha \in \mathbb{R}$ і $r_1 > \dfrac{1}{p}$ справджуються співвідношення

$$e^{\perp}_{M}\big(\mathbb{W}^{r_1}_{p,\alpha}\big)_{B_{\infty,1}} \asymp e^{\perp}_{M}\big(\mathbb{W}^{r_1}_{p,\alpha}\big)_{\infty},$$
$$\mathscr{E}_n\big(\mathbb{W}^{r_1}_{p,\alpha}\big)_{B_{\infty,1}} \asymp \mathscr{E}_n\big(\mathbb{W}^{r_1}_{p,\alpha}\big)_{\infty}.$$

Отже, з огляду на зауваження 1, 2 можна стверджувати, що апроксимаційні характеристики $e^{\perp}_M(F)_{\mathscr{X}}$ і $\mathscr{E}_n(F)_{\mathscr{X}}$ у просторах $\mathscr{X} = B_{\infty,1}$ і $\mathscr{X} = L_\infty$ однакові за порядком при $M \asymp 2^n$ як на класах $\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta}$, так і на класах $\mathbb{W}^{r_1}_{p,\alpha}$ (при певних значеннях параметрів $p,\ \theta,\ \alpha$ і r_1).

У наступних твердженнях встановлено точні за порядком оцінки ще двох характеристик – ентропійних чисел і колмогоровських поперечників класів $\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta}$ і $\mathbb{W}^{r_1}_{p,\alpha}$ у просторі $B_{\infty,1}$. Ці оцінки також доповнюють результати роботи [1].

Теорема 3. *Нехай $d = 1,\ \alpha \in \mathbb{R}$ і $r_1 > 0$. Тоді*

$$\epsilon_M\big(\mathbb{W}^{r_1}_{\infty,\alpha},\, B_{\infty,1}\big) \asymp d_M\big(\mathbb{W}^{r_1}_{\infty,\alpha},\, B_{\infty,1}\big) \asymp M^{-r_1}. \tag{12}$$

Доведення. Базовим твердженням, яке використовується при встановленні співвідношень (12), є лема A. Оцінка зверху для поперечника $d_M\big(\mathbb{W}^{r_1}_{\infty,\alpha},\, B_{\infty,1}\big)$ випливає з теореми 5 [1], а саме при $d = 1$

$$d_M\big(\mathbb{W}^{r_1}_{\infty,\alpha},\, B_{\infty,1}\big) \asymp M^{-r_1}. \tag{13}$$

Отже, із (13), враховуючи вкладення $W^{r_1}_{\infty,\alpha} \hookrightarrow H^{r_1}_{\infty}$, маємо

$$d_M\big(\mathbb{W}^{r_1}_{\infty,\alpha},\, B_{\infty,1}\big) \ll d_M\big(\mathbb{H}^{r_1}_{\infty},\, B_{\infty,1}\big) \asymp M^{-r_1}. \tag{14}$$

З іншого боку, оцінка знизу для ентропійних чисел $\epsilon_M\big(\mathbb{W}^{r_1}_{\infty,\alpha},\, B_{\infty,1}\big)$ є наслідком співвідношення $\epsilon_M\big(\mathbb{W}^{r_1}_{\infty,\alpha},\, L_\infty\big) \asymp M^{-r_1}$ із [21] (гл. 1, § 4), оскільки

$$\epsilon_M\big(\mathbb{W}^{r_1}_{\infty,\alpha},\, B_{\infty,1}\big) \geq \epsilon_M\big(\mathbb{W}^{r_1}_{\infty,\alpha},\, L_\infty\big) \asymp M^{-r_1}. \tag{15}$$

Таким чином, беручи до уваги співвідношення (14), (15) та застосовуючи лему A, отримуємо (12).

Теорему 3 доведено.

Зауваження 3. Зіставляючи (12) із відомими оцінками величин $\epsilon_M\big(\mathbb{W}^{r_1}_{\infty,\alpha},\, L_\infty\big)$ і $d_M(\mathbb{W}^{r_1}_{\infty,\alpha},\, L_\infty)$ (див., наприклад, [21], гл. 10, § 10.1, і [10], гл. 1, § 4 відповідно), переконуємося, що значення відповідних апроксимаційних характеристик на класах $\mathbb{W}^{r_1}_{\infty,\alpha}$ у просторах L_∞ і $B_{\infty,1}$ однакові за порядком.

Теорема 4. *Нехай $d = 1,\ 1 \leq \theta \leq 2$ і $2 \leq p \leq \infty$. Тоді при $r_1 > \dfrac{1}{2}$ справджуються співвідношення*

$$\epsilon_M(\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta},\, B_{\infty,1}) \asymp d_M(\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta},\, B_{\infty,1}) \asymp M^{-r_1}. \tag{16}$$

Доведення. Як і у доведенні попередньої теореми, використаємо лему A. Стосовно оцінки зверху колмогоровського поперечника $d_M(\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta},\, B_{\infty,1})$ зазначимо, що вона випливає з теореми 3 [1], в якій, зокрема, при $d = 1,\ 2 \leq p < \infty$ і $r_1 > \dfrac{1}{2}$ одержано співвідношення

$$\epsilon_M\big(\mathbb{B}^{r_1}_{p,2},\, B_{\infty,1}\big) \asymp d_M\big(\mathbb{B}^{r_1}_{p,2},\, B_{\infty,1}\big) \asymp M^{-r_1}. \tag{17}$$

З іншого боку, для оцінювання ентропійних чисел $\epsilon_M(\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta},\, B_{\infty,1})$ візьмемо до уваги теорему B. Тоді

$$\epsilon_M\big(\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta},\, B_{\infty,1}\big) \geq \epsilon_M\big(\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta},\, L_\infty\big) \asymp M^{-r_1}. \tag{18}$$

Тепер на підставі леми A з урахуванням співвідношень (17), (18) отримаємо (16).

Теорему 4 доведено.

***Зауваження* 4.** Зіставляючи (16) зі співвідношеннями

$$\epsilon_M\big(\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta},\, L_\infty\big) \asymp d_M\big(\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta},\, L_\infty\big) \asymp M^{-r_1}$$

із [20], приходимо до висновку, що значення відповідних характеристик на класах $\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta}$ у просторах L_∞ і $\mathbb{B}_{\infty,1}$ однакові за порядком.

Теорема 5. *Нехай* $d = 1$, $1 \le p < 2$ *і* $1 \le \theta \le p$. *Тоді при* $r_1 > \dfrac{1}{p}$ *справджується співвідношення*

$$\epsilon_M\big(\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta},\, L_\infty\big) \asymp M^{-r_1}. \tag{19}$$

Доведення. Оцінка знизу випливає з теореми 3 [19], яка у випадку $d = 1$ містить оцінку

$$\epsilon_M\big(\mathbb{B}^{r_1}_{\infty,\theta}, L_1\big) \gg M^{-r_1}, \quad 1 \le \theta < \infty, \quad r_1 > 0.$$

Оцінка зверху в (19) є наслідком співвідношення (див., наприклад, [21], гл. 10, § 10.1)

$$\epsilon_M\big(\mathbb{W}^{r_1}_{p,\alpha},\, L_\infty\big) \asymp M^{-r_1}, \quad 1 \le p \le 2, \quad r_1 > \frac{1}{p}, \tag{20}$$

бо, беручи до уваги, що $B^{r_1}_{p,p} \hookrightarrow W^{r_1}_{p,\alpha}$, $1 \le p \le 2$, маємо

$$\epsilon_M\big(\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta},\, L_\infty\big) \ll \epsilon_M(\mathbb{B}^{r_1}_{p,p},\, L_\infty) \ll \epsilon_M\big(\mathbb{W}^{r_1}_{p,\alpha},\, L_\infty\big) \asymp M^{-r_1}.$$

Теорему 5 доведено.

***Зауваження* 5.** Зіставляючи (19) з оцінкою колмогоровського поперечника $d_M(\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta},\, L_\infty)$ [11] (гл. 4, § 4.4), а саме

$$d_M(\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta},\, L_\infty) \asymp M^{-r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, \quad 1 \le p < 2, \quad 1 \le \theta \le p, \quad r_1 > \frac{1}{2},$$

бачимо, що за умов теореми 5 щодо параметрів p, θ і r_1 оцінки величин $\epsilon_M(\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta},\, L_\infty)$ і $d_M(\mathbb{B}^{r_1}_{p,\theta},\, L_\infty)$ відрізняються в сенсі порядкових значень.

6. Наближення класів періодичних функцій багатьох змінних. Спочатку встановимо точні за порядком оцінки відхилень східчасто-гіперболічних сум Фур'є від функцій із класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ і $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\alpha}$ у просторі $B_{\infty,1}$. Потім, як наслідок, запишемо точні за порядком оцінки величин найкращих ортогональних тригонометричних наближень згаданих функціональних класів (також у метриці простору $B_{\infty,1}$).

Теорема 6. *Нехай* $d \ge 2$, $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $r_1 > \dfrac{1}{p}$. *Тоді*

$$\mathscr{E}^{\boldsymbol{\gamma}}_n\big(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}\big)_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-n(r_1-\frac{1}{p})}\, n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{21}$$

Доведення. Спочатку встановимо у (21) оцінку зверху. Нехай $f \in \mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ і $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ — вектор, визначений у п. 2. Тоді, поклавши $\gamma(d) = \gamma_1 + \ldots + \gamma_d$, згідно з означенням норми у просторі $B_{\infty,1}$ можемо записати

$$\mathscr{E}^{\boldsymbol{\gamma}}_n(f)_{B_{\infty,1}} = \Big\| f - \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})<n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \Big\|_{B_{\infty,1}} = \Big\| \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\ge n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \Big\|_{B_{\infty,1}} =$$

$$= \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} \Bigg\| A_{\boldsymbol{s}} * \sum_{\substack{\boldsymbol{s}'\in\mathbb{N}^d \\ (\boldsymbol{s}',\boldsymbol{\gamma})>n}} \delta_{\boldsymbol{s}'}(f) \Bigg\|_\infty \le \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\ge n-\gamma(d)} \Bigg\| A_{\boldsymbol{s}} * \sum_{\substack{\boldsymbol{s}'\in\mathbb{N}^d \\ \|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty\le 1}} \delta_{\boldsymbol{s}'}(f) \Bigg\|_\infty \le$$

$$\le \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\ge n-\gamma(d)} \|A_{\boldsymbol{s}}\|_{p'} \Bigg\| \sum_{\substack{\boldsymbol{s}'\in\mathbb{N}^d \\ \|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty\le 1}} \delta_{\boldsymbol{s}'}(f) \Bigg\|_p \ll$$

$$\ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\ge n-\gamma(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\frac{1}{p}} \sum_{\substack{\boldsymbol{s}'\in\mathbb{N}^d \\ \|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty\le 1}} \|\delta_{\boldsymbol{s}'}(f)\|_p \le$$

$$\le \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\ge n-\gamma(d)} 2^{\frac{d}{p}} \sum_{\substack{\boldsymbol{s}'\in\mathbb{N}^d \\ \|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty\le 1}} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\frac{1}{p}} \|\delta_{\boldsymbol{s}'}(f)\|_p \ll$$

$$\ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\ge n-2\gamma(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\frac{1}{p}} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p := J_2. \tag{22}$$

Проводячи оцінювання величини J_2, розглянемо три випадки.

Випадок 1. Нехай $1<\theta<\infty$. Застосовуючи до виразу J_2 нерівність Гельдера з показником θ і покладаючи $\boldsymbol{p}=(p,\ldots,p)\in\mathbb{R}^d$, можемо записати

$$J_2 \le \Bigg(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\ge n-2\gamma(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p^\theta \Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \Bigg(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\ge n-2\gamma(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\,\boldsymbol{r}-\frac{1}{\boldsymbol{p}})\frac{\theta}{\theta-1}} \Bigg)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} \Bigg(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\ge n-2\gamma(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\,\boldsymbol{r}-\frac{1}{\boldsymbol{p}})\frac{\theta}{\theta-1}} \Bigg)^{1-\frac{1}{\theta}} \le$$

$$\le \Bigg(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\ge n-2\gamma(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\,\widetilde{\boldsymbol{\gamma}})(r_1-\frac{1}{p})\frac{\theta}{\theta-1}} \Bigg)^{1-\frac{1}{\theta}} := J_3, \tag{23}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}=(\widetilde{\gamma}_1,\ldots,\widetilde{\gamma}_d)$ — вектор із координатами $\widetilde{\gamma}_j=\dfrac{r_j-\frac{1}{p}}{r_1-\frac{1}{p}}$, $j=\overline{1,d}$, а $\boldsymbol{r}-\dfrac{1}{\boldsymbol{p}}$ позначає вектор із координатами $r_j-\dfrac{1}{p}$, $j=\overline{1,d}$. Легко бачити, що $\widetilde{\gamma}_j=\gamma_j=1$ при $j=\overline{1,\nu}$ і $1<\gamma_j<\widetilde{\gamma}_j$ при $j=\overline{\nu+1,\,d}$. Тому з огляду на лему Б отримуємо

$$J_3 \ll 2^{-n(r_1-\frac{1}{p})}\, n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{24}$$

Поєднуючи (22)–(24), приходимо до шуканої оцінки зверху величини $\mathscr{E}_n^{\gamma}\big(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}\big)_{B_{\infty,1}}$ у випадку $1<\theta<\infty$.

Випадок 2. Нехай $\theta=1$. Тоді

$$J_2 = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\ge n-2\gamma(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p\, 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\frac{1}{p}} \ll$$

$$\ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\ge n-2\gamma(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})}\,\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p\,2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})(r_1-\frac{1}{p})}\le$$

$$\le \sup_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\ge n-2\gamma(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})(r_1-\frac{1}{p})}\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,1}}\ll 2^{-n(r_1-\frac{1}{p})}. \tag{25}$$

Із (22) і (25) випливає потрібна оцінка зверху величини $\mathscr{E}^{\gamma}_n\big(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,1}\big)_{B_{\infty,1}}$ при $\theta=1$.

Випадок 3. Якщо $\theta=\infty$, то, враховуючи, що для $f\in\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}$ справджується співвідношення $\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p\ll 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})},\ \boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d$, маємо

$$J_2\ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\ge n-2\gamma(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\frac{1}{p}}\,2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})}\le \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\ge n-2\gamma(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})(r_1-\frac{1}{p})}\le$$

$$\le \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\ge n-2\gamma(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\widetilde{\boldsymbol{\gamma}})(r_1-\frac{1}{p})}\ll 2^{-n(r_1-\frac{1}{p})}. \tag{26}$$

Поєднуючи (26) з (22), приходимо до шуканої оцінки зверху величини $\mathscr{E}^{\boldsymbol{\gamma}}_n\big(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}\big)_{B_{\infty,1}}$.

Щодо оцінки знизу у (21) зазначимо, що вона є наслідком теорем В, Г і нерівності $\|\cdot\|_{B_{\infty,1}}\ge$ $\ge\|\cdot\|_{\infty}$.

Теорему 6 доведено.

Тепер, використавши теорему 6, сформулюємо та доведемо відповідне твердження щодо оцінки величини $e^{\perp}_M\big(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}\big)_{B_{\infty,1}}$ — найкращого ортогонального тригонометричного наближення.

Теорема 7. *Нехай* $d\ge 2,\ 1<p<\infty,\ 1\le\theta\le\infty$ *і* $r_1>\dfrac{1}{p}$. *Тоді*

$$e^{\perp}_M\big(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}\big)_{B_{\infty,1}}\asymp\big(M^{-1}\log^{\nu-1}M\big)^{r_1-\frac{1}{p}}\big(\log^{\nu-1}M\big)^{1-\frac{1}{\theta}}. \tag{27}$$

Доведення. Оцінка зверху випливає з теореми 6. Так, вибираючи за заданим M число $n\in\mathbb{N}$ із співвідношення $C_1 2^n n^{\nu-1}\le M\le C_2 2^n n^{\nu-1}$, де $C_1,\ C_2$ — будь-які додатні дійсні числа $(C_1\le C_2)$, і зважаючи на (21), отримуємо

$$e^{\perp}_M\big(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}\big)_{B_{\infty,1}}\ll\mathscr{E}^{\boldsymbol{\gamma}}_n\big(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}\big)_{B_{\infty,1}}\asymp\big(M^{-1}\log^{\nu-1}M\big)^{r_1-\frac{1}{p}}\big(\log^{\nu-1}M\big)^{1-\frac{1}{\theta}}.$$

Відповідна оцінка знизу в (27) є наслідком теореми А, якщо зауважити, що

$$e^{\perp}_M\big(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}\big)_{B_{\infty,1}}\gg e^{\perp}_M\big(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}\big)_{\infty}.$$

Теорему 7 доведено.

Насамкінець сформулюємо два твердження, аналогічні теоремам 6, 7, але вже щодо класів $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\alpha}$.

Теорема 8. *Нехай* $d\ge 2,\ 2\le p<\infty$ *і* $r_1>\dfrac{1}{p}$. *Тоді*

$$\mathscr{E}^{\boldsymbol{\gamma}}_n\big(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}\big)_{B_{\infty,1}}\asymp 2^{-n(r_1-\frac{1}{p})}n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{p})}. \tag{28}$$

Доведення. Оцінка зверху випливає з теореми 6 внаслідок відомого вкладення $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}} \hookrightarrow$ $\hookrightarrow B^{\boldsymbol{r}}_{p,p}$, $2 \le p < \infty$, тому що

$$\mathscr{E}^{\gamma}_{n}\big(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}\big)_{B_{\infty,1}} \ll \mathscr{E}^{\gamma}_{n}\big(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,p}\big)_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-n(r_1-\frac{1}{p})} n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{p})}.$$

Відповідна оцінка знизу в (28) є наслідком теореми Б за умови, що числа M і n пов’язані співвідношенням $C_1 2^n n^{\nu-1} \le M \le C_2 2^n n^{\nu-1}$, де C_1, C_2 — будь-які додатні дійсні числа $(C_1 \le C_2)$.

Теорему 8 доведено.

Теорема 9. *Нехай* $d \ge 2$, $2 \le p < \infty$ *і* $r_1 > \dfrac{1}{p}$. *Тоді*

$$e^{\perp}_{M}\big(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}\big)_{B_{\infty,1}} \asymp \big(M^{-1}\log^{\nu-1} M\big)^{r_1-\frac{1}{p}} \big(\log^{\nu-1} M\big)^{1-\frac{1}{p}}. \tag{29}$$

Доведення. Оцінка зверху випливає з теореми 8, тобто при $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ маємо

$$e^{\perp}_{M}\big(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}\big)_{B_{\infty,1}} \ll \mathscr{E}^{\gamma}_{n}\big(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}\big)_{B_{\infty,1}} \asymp \big(M^{-1}\log^{\nu-1} M\big)^{r_1-\frac{1}{p}} \big(\log^{\nu-1} M\big)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Оцінка знизу в (29) є наслідком теореми Б, оскільки

$$e^{\perp}_{M}\big(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}\big)_{B_{\infty,1}} \ge e^{\perp}_{M}\big(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}\big)_{\infty}.$$

Теорему 9 доведено.

Зауваження **6.** Із теорем 6 – 9 випливає, що на відміну від одновимірного випадку $(d = 1)$ значення розглянутих апроксимаційних характеристик на класах $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ і $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ відрізняються за порядком. Окрім того, у випадку $d \ge 2$ одержані в теоремах 6, 7 оцінки величин $\mathscr{E}^{\gamma}_{n}\big(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}\big)_{B_{\infty,1}}$ і $e^{\perp}_{M}\big(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}\big)_{B_{\infty,1}}$ залежать від параметра θ.

Література

1. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Апроксимаційні характеристики класів періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{\infty,1}$ // Укр. мат. журн. – 2019. – **71**, № 2. – С. 271 – 282.
2. *Dinh Ding, Temlyakov V. N., Ullrich T.* Hyperbolic cross approximation // arXiv: 1601.03978 v 3 [math.NA] 21 Apr. 2017.
3. *Романюк В. С.* Колмогоровские поперечники и энтропийные числа в пространствах Орлича с нормой Люксембурга // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, № 5. – С. 682 – 694.
4. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 143 – 161.
5. *Бесов О. В.* Исследования одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **60**. – С. 42 – 61.
6. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 244 – 278.
7. *Аманов Т. И.* Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^n)$ и $S^{(r)}_{p,\theta}B$ $(0 \le x_j \le 2\pi;\ j = 1, \ldots, n)$ // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – **77**. – С. 5 – 34.
8. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
9. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
10. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. – New York: Nova Sci. Publ., 1993.

11. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **93.** – 352 с.
12. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **189**. – С. 138 – 168.
13. *Романюк А. С.* Энтропийные числа и поперечники классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 10. – С. 1403 – 1417.
14. *Höllig K.* Diameters of classes of smooth functions // Quant. Approxim. – New York: Acad. Press, 1980. – P. 163 – 176.
15. *Carl B.* Entropy numbers, s-numbers, and eigenvalue problems // J. Funct. Anal. – 1981. – **41**. – P. 290 – 306.
16. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* Об оценке аппроксимативных характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной // Мат. заметки. – 1995. – **58**, № 6. – С. 922 – 925.
17. *Temlyakov V. N.* An inequality for trigonometric polynomials and its application for estimating the Kolmogorov widths // East J. Approxim. – 1996. – **2**, № 1. – P. 89 – 98.
18. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике // Мат. заметки. – 2007. – **82**, № 2. – С. 247 – 261.
19. *Романюк А. С.* Приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных линейными методами и наилучшие приближения // Мат. сб. – 2004. – **195**, № 2. – С. 91 – 116.
20. *Романюк А. С.* Оценки энтропийных чисел и колмогоровских поперечников классов Никольского – Бесова периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 11. – С. 1540 – 1556.
21. *Тригуб Р. М., Белинский Э. С.* Fourier analysis and approximation of functions. – Kluwer Acad. Publ., 2004. – 585 p.

Одержано 26.04.19