УДК 517.956.35

С. Харибегашвили (Мат. ин-т им. А. Размадзе Тбил. гос. ун-та; Груз. техн. ун-т, Тбилиси),
Б. Мидодашвили (Тбил. гос. ун-т; Гор. учеб. ун-т, Грузия)

О СУЩЕСТВОВАНИИ, ЕДИНСТВЕННОСТИ И ОТСУТСТВИИ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

We consider a boundary-value problem for a semilinear hyperbolic equation with iterated multidimensional wave operator in the principal part. The theorems on existence, uniqueness, and nonexistence of solutions of this problem are established.

Розглянуто одну крайову задачу для квазілінійного гіперболічного рівняння з ітерованим багатовимірним хвильовим оператором у головній частині. Доведено теореми існування, єдиності та відсутності розв'язків цієї задачі.

1. Постановка задачи. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ рассмотрим квазилинейное уравнение вида

$$L_f u := \square^2 u + f(u) = F, \tag{1.1}$$

где $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — заданная нелинейная функция, F — заданная, а u — искомая действительные функции, $\square := \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $n \geq 2$.

Для уравнения (1.1) рассмотрим краевую задачу: найти решение $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ этого уравнения в цилиндрической области $D_T = \Omega \times (0, T)$, где Ω — открытая ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$, по следующим краевым условиям:

$$u \,\Big|_{\partial D_T} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial D_T} = 0, \tag{1.2}$$

где $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n, \nu_{n+1})$ — единичный вектор внешней нормали к ∂D_T.

Отметим, что другие краевые задачи, поставленные для уравнения (1.1) со степенной нелинейностью, когда часть границы области определения решения является характеристическим многообразием, были изучены в [1 – 3].

Точка (x, t) гладкого многообразия S, заданного уравнением $\varphi(x_1, \ldots, x_n, t) = 0$, где $\nabla\varphi = (\varphi_{x_1}, \ldots, \varphi_{x_n}, \varphi_t) \neq 0$ на S, называется характеристической точкой для уравнения

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x, t) \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n} \partial t^{\alpha_{n+1}}} + f(u) = F(x, t),$$

если в этой точке

$$\sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x, t) \varphi_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \varphi_{x_n}^{\alpha_n} \varphi_t^{\alpha_{n+1}} = 0.$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n+1}$. Многообразие $S : \varphi(x_1, \ldots, x_n, t) = 0$ называется характеристическим для этого уравнения, если все его точки характеристические. Согласно этому определению, для уравнения (1.1) характеристическим является многообразие S :

$\varphi(x_1,\ldots,x_n,t) = 0$, для которого $\left(\varphi_t^2 - \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i}^2\right)^2 \Big|_S = 0$, т. е. $\left(\varphi_t^2 - \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i}^2\right) \Big|_S = 0$. В частности, коническое многообразие $S\colon t = |x|$, из которого исключена вершина $O(0,\ldots \ldots,0,0)$, является характеристическим. В работе [3, с. 101] в усеченной конической области $D_T^+\colon |x| < t < T$, ограниченной частью $S_T\colon t = |x|$, $0 \le t \le T$, характеристического конического многообразия $S\colon t = |x|$ и нехарактеристической плоской частью $S_T^0\colon t = T$, $|x| \le T$, ее границы, для уравнения (1.1) со степенной нелинейностью $f(u) = \lambda|u|^\alpha$, $\lambda = \mathrm{const} < 0$, рассмотрена характеристическая задача Коши с условиями

$$u\,\Big|_{S_T} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{S_T} = 0.$$

Отметим, что между постановками этих задач имеется принципиальное отличие. Если в задаче (1.1), (1.2) вся граница ∂D_T области D_T, которая ни в одной своей точке не является характеристической, подчинена краевым условиям (1.2), то в задаче из работы [3] вся нехарактеристическая часть S_T^0 границы области D_T^+ полностью свободна от каких-либо краевых условий.

Положим

$$\overset{0}{C}{}^k(\overline{D}_T, \partial D_T) := \left\{ u \in C^k(\overline{D}_T)\colon u\,\Big|_{\partial D_T} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial D_T} = 0 \right\}, \quad k \ge 2.$$

Пусть $u \in \overset{0}{C}{}^4(\overline{D}_T, \partial D_T)$ — классическое решение задачи (1.1), (1.2). Умножая обе части уравнения (1.1) на произвольную функцию $\varphi \in \overset{0}{C}{}^2(\overline{D}_T, \partial D_T)$ и интегрируя полученное уравнение по частям в области D_T, получаем

$$\int\limits_{D_T} \Box u \Box \varphi \, dx\, dt + \int\limits_{D_T} f(u)\varphi\, dx\, dt = \int\limits_{D_T} F\varphi\, dx\, dt. \tag{1.3}$$

При выводе (1.3) было использовано равенство

$$\int\limits_{D_T} \Box u \Box\varphi\, dx\, dt = \int\limits_{\partial D_T} \frac{\partial \varphi}{\partial N}\Box u ds - \int\limits_{\partial D_T} \varphi \frac{\partial}{\partial N}\Box u ds + \int\limits_{D_T} \varphi \Box^2 u\, dx\, dt,$$

где $\dfrac{\partial}{\partial N} = \nu_{n+1}\dfrac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \nu_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ — производная по конормали, а также равенства $\dfrac{\partial\varphi}{\partial N}\Big|_\Gamma = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}\Big|_\Gamma$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial N}\Big|_{\partial D_T\setminus\Gamma} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}\Big|_{\partial D_T\setminus\Gamma}$, $\Gamma := \partial\Omega \times (0,T)$, $\varphi\,\Big|_{\partial D_T} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}\Big|_{\partial D_T} = 0$.

Введем гильбертово пространство $\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$ как пополнение по норме

$$\|u\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)} = \int\limits_{D_T} \left[u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + (\Box u)^2 \right] dx\, dt \tag{1.4}$$

классического пространства $\overset{0}{C}{}^2(\overline{D}_T, \partial D_T)$. Из (1.4) следует, что если u принадлежит $\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$, то u принадлежит $\overset{0}{W}{}^1_2(D_T)$, а $\Box u$ принадлежит $L_2(D_T)$. Здесь $W_2^1(D_T)$ — известное пространство Соболева [4, с. 56], состоящее из элементов $L_2(D_T)$, имеющих обобщенные производные первого порядка из $L_2(D_T)$, а $\overset{0}{W}{}_2^1(D_T) = \{u \in W_2^1(D_T) : u\,\big|_{\partial D_T} = 0\}$, где равенство $u\,\big|_{\partial D_T} = 0$ понимается в смысле теории следа [4, с. 70].

Равенство (1.3) положим в основу определения обобщенного решения u задачи (1.1), (1.2).

Ниже на функцию $f = f(u)$ наложим следующие требования:

$$f \in C(\mathbb{R}), \qquad \big|f(u)\big| \le M_1 + M_2|u|^\alpha, \quad u \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

где

$$0 \le \alpha = \text{const} < \frac{n+1}{n-1}. \tag{1.6}$$

***Замечание* 1.1.** Оператор вложения $I\colon W_2^1(D_T) \to L_q(D_T)$ является линейным непрерывным и компактным оператором при $1 < q < \dfrac{2(n+1)}{n-1}$, если $n > 1$ [4, с. 81]. Вместе с этим оператор Немыцкого $N\colon L_q(D_T) \to L_2(D_T)$, действующий по формуле $Nu = -f(u)$, согласно (1.5) является непрерывным и ограниченным при $q \ge 2\alpha$ [5, с. 66, 67]. Таким образом, так как согласно (1.6) имеем $2\alpha < \dfrac{2(n+1)}{n-1}$, то существует такое число q, что $1 < q < \dfrac{2(n+1)}{n-1}$ и $q \ge 2\alpha$. Следовательно, в этом случае оператор

$$N_0 = NI\colon \overset{0}{W}{}_2^1(D_T) \to L_2(D_T) \tag{1.7}$$

будет непрерывным и компактным. Кроме того, из того, что u принадлежит $\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$, следует, что $f(u)$ принадлежит $L_2(D_T)$, и если $u_m \to u$ в пространстве $\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$, то $f(u_m) \to f(u)$ в пространстве $L_2(D_T)$.

Определение 1.1. *Пусть функция f удовлетворяет условиям* (1.5), (1.6) *и F принадлежит $L_2(D_T)$. Назовем функцию $u \in \overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$ слабым обобщенным решением задачи* (1.1), (1.2), *если для любой функции $\varphi \in \overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$ выполнено интегральное равенство* (1.3), *т. е.*

$$\int\limits_{D_T} \Box u \Box \varphi\, dx\, dt + \int\limits_{D_T} f(u)\varphi\, dx\, dt = \int\limits_{D_T} F\varphi\, dx\, dt \quad \forall \varphi \in \overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T). \tag{1.8}$$

Согласно замечанию 1.1, в уравнении (1.8) интеграл $\int_{D_T} f(u)\varphi\, dx\, dt$ определен корректно, так как из того, что u принадлежит $\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$, следует, что $f(u)$ принадлежит $L_2(D_T)$ и тем самым $f(u)\varphi$ принадлежит $L_1(D_T)$.

Несложно проверить, что если решение u задачи (1.1), (1.2) принадлежит в смысле определения 1.1 классу $\overset{0}{C}{}^4(D_T, \partial D_T)$, то оно также яляется классическим решением этой задачи.

2. Разрешимость задачи (1.1), (1.2).

Лемма 2.1. *Имеет место неравенство*

$$\|u\|_{\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)} \le c\|\Box u\|_{L_2(D_T)} \quad \forall u \in \overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T), \tag{2.1}$$

где норма пространства $\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$ задается равенством (1.4), *а положительная постоянная c не зависит от u.*

Доказательство. Поскольку пространство $\overset{0}{C}{}^2(\overline{D}_T, \partial D_T)$ является плотным подпространством пространства $\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$, достаточно доказать неравенство (2.1) для всех $u \in \overset{0}{C}{}^2(\overline{D}_T, \partial D_T)$.

Положим $\Omega_\tau := \overline{D}_T \cap \{t = \tau\}$, $0 \le \tau \le T$, $D_\tau := D_T \cap \{t < \tau\}$, $\Gamma_\tau := \Gamma \cap \{t < \tau\}$, $0 < \tau \le T$, и $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n, \nu_{n+1})$ — единичный вектор внешней нормали к ∂D_τ. Для $u \in \overset{0}{C}{}^2(\overline{D}_T, \partial D_T)$, согласно равенствам $u\,|_{\Gamma_\tau} = 0$, $u\,|_{\Omega_0} = \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\Omega_0} = 0$ и $\Omega_\tau = \partial D_\tau \cap \{t = \tau\}$,

$$\nu_i\Big|_{\Omega_\tau \cup \Omega_0} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad \nu_{n+1}\Big|_{\Gamma_\tau} = 0, \qquad \nu_{n+1}\Big|_{\Omega_\tau} = 1, \qquad \nu_{n+1}\Big|_{\Omega_0} = -1,$$

в результате интегрирования по частям получаем

$$\int\limits_{D_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t}\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D_\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \nu_{n+1}\,ds = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx, \tag{2.2}$$

$$\int\limits_{D_\tau} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\frac{\partial u}{\partial t}\,dx\,dt = \int\limits_{\partial D_\tau} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t}\nu_i\,ds - \frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_\tau} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t}\nu_i\,ds - \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D_\tau} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \nu_{n+1}\,ds = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.3}$$

так как $\left(\sum_{i=0}^n \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\nu_i\right)\Big|_{\Gamma_\tau} = \dfrac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_\tau} = 0$, поэтому

$$\int\limits_{\Gamma_\tau} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t}\nu_i\,ds = \int\limits_{\Gamma_\tau} \frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial u}{\partial t}\,ds = 0.$$

Из (2.2), (2.3) следует, что

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right] dx = 2\int\limits_{D_\tau} \Box u \frac{\partial u}{\partial t}\,dx\,dt, \quad \tau \le T. \tag{2.4}$$

Полагая

$$w(\tau) := \int\limits_{\Omega_\tau} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right] dx$$

и используя неравенство

$$2\,\Box u \frac{\partial u}{\partial t} \le \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + |\Box u|^2,$$

из (2.4) получаем

$$w(\tau) \le \int\limits_0^\tau w(s)ds + \|\Box u\|^2_{L_2(D_\tau)}, \quad 0 < \tau \le T. \tag{2.5}$$

Из (2.5), принимая во внимание, что $\left\|\Box u\right\|^2_{L_2(D_\tau)}$ как функция от τ является неубывающей, согласно лемме Гронуолла находим

$$w(\tau) \le \|\Box u\|^2_{L_2(D_\tau)} \exp\tau, \quad 0 < \tau \le T. \tag{2.6}$$

В свою очередь, из (2.6) следует, что

$$\int\limits_{D_T} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right] dx\,dt = \int\limits_0^T w(\tau)\,d\tau \le \left\|\Box u\right\|^2_{L_2(D_T)} T\exp T. \tag{2.7}$$

Согласно равенствам $u(x,0)=0$ и $u(x,t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial t}\,d\tau$, $(x,t)\in\overline{D}_T$, которые справедливы для любой функции $u \in \overset{0}{C}{}^2(\overline{D}_T, \partial D_T)$, а также следуя стандартным рассуждениям [4, с. 62, 63], несложно получить неравенство

$$\int\limits_{D_T} u^2(x,t)\,dx\,dt \le T^2 \int\limits_{D_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\,dt. \tag{2.8}$$

Согласно (2.7), (2.8) имеем

$$\|u\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)} = \int\limits_{D_T} \left[u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\Box u\right)^2\right] dx\,dt \le$$

$$\le \left(1 + T\exp T + T^3\exp T\right)\left\|\Box u\right\|^2_{L_2(D_T)},$$

откуда получаем неравенство (2.1) с постоянной $c^2 = 1 + (T+T^3)\exp T$.

Лемма 2.1 доказана.

Рассмотрим условие

$$\lim_{|u|\to\infty} \inf \frac{f(u)}{u} \ge 0. \tag{2.9}$$

Лемма 2.2. *Пусть F принадлежит $L_2(D_T)$ и выполнены условия* (1.5), (1.6), (2.9). *Тогда для слабого обобщенного решения $u \in \overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$ задачи* (1.1), (1.2) *справедлива априорная оценка*

$$\|u\|_{\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)} \le c_1\|F\|_{L_2(D_T)} + c_2 \tag{2.10}$$

с положительными постоянными c_1 и c_2, не зависящими от u и F.

Доказательство. Поскольку $f \in C(\mathbb{R})$, то из (2.9) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $M_\varepsilon \ge 0$, что

$$uf(u) \ge -M_\varepsilon - \varepsilon u^2 \quad \forall u \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Полагая $\varphi = u \in \overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$ в равенстве (1.8) и принимая во внимание (1.4), (2.11), для любого $\varepsilon > 0$ получаем

$$\left\|\square u\right\|^2_{L_2(D_T)} = \int\limits_{D_T} \left(\square u\right)^2 dx\,dt = -\int\limits_{D_T} uf(u)\,dx\,dt + \int\limits_{D_T} Fu\,dx\,dt \le$$

$$\le M_\varepsilon \operatorname{mes} D_T + \varepsilon \int\limits_{D_T} u^2\,dx\,dt + \int\limits_{D_T} \left(\frac{1}{4\varepsilon}F^2 + \varepsilon u^2\right) dx\,dt \le$$

$$\le \frac{1}{4\varepsilon} \int\limits_{D_T} F^2\,dx\,dt + M_\varepsilon \operatorname{mes} D_T + 2\varepsilon \|u\|^2_{L_2(D_T)} \le$$

$$\le \frac{1}{4\varepsilon} \int\limits_{D_T} F^2\,dx\,dt + M_\varepsilon \operatorname{mes} D_T + 2\varepsilon \|u\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)}.$$

Отсюда согласно (2.1) имеем

$$\|u\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)} \le c^2 \left\|\square u\right\|^2_{L_2(D_T)} \le \frac{c^2}{4\varepsilon} \int\limits_{D_T} F^2\,dx\,dt + c^2 M_\varepsilon \operatorname{mes} D_T + 2c^2\varepsilon \|u\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)},$$

откуда для $\varepsilon = \dfrac{1}{4c^2}$ получаем

$$\|u\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)} \le 2c^4 \|F\|^2_{L_2(D_T)} + 2c^2 M_\varepsilon \operatorname{mes} D_T. \tag{2.12}$$

Из неравенства (2.12) следует (2.10) при $c_1 = 2c^4$ и $c_2 = 2c^2 M_\varepsilon \operatorname{mes} D_T$, где $\varepsilon = \dfrac{1}{4}c^2$.

Лемма 2.2 доказана.

***Замечание* 2.1.** Ниже рассмотрим соответствующую (1.1), (1.2) линейную задачу, т. е. случай, когда $f = 0$. В этом случае для $F \in L_2(D_T)$ введем аналогичное определение слабого обобщенного решения $u \in \overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)$ этой задачи, т. е. когда имеет место интегральное равенство

$$(u, \phi)_\square := \int\limits_{D_T} \square u \square \varphi\,dx\,dt = \int\limits_{D_T} F\varphi\,dx\,dt \quad \forall \varphi \in \overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T). \tag{2.13}$$

***Замечание* 2.2.** В силу (1.4) и (2.1), принимая во внимание, что

$$\left|\left(\square u, \square\varphi\right)_{L_2(D_T)}\right| = \left|\int\limits_{D_T} \square u \square \varphi\,dx\,dt\right| \le \left\|\square u\right\|_{L_2(D_T)} \|\square\varphi\|_{L_2(D_T)} \le$$

$$\le \|u\|_{\overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)} \left\|\varphi\right\|_{\overset{0}{W}{}^1_{2,\square}(D_T)},$$

можем рассмотреть билинейную форму

$$\left(u, \varphi\right)_\square := \int\limits_{D_T} \square u \square \varphi\,dx\,dt$$

из (2.13) как скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$. Поэтому, поскольку для $F \in L_2(D_T)$

$$\left| \int\limits_{D_T} F\varphi \, dx \, dt \right| \leq \|F\|_{L_2(D_T)} \|\varphi\|_{L_2(D_T)} \leq \|F\|_{L_2(D_T)} \|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)},$$

согласно теореме Рисса существует единственная функция u в пространстве $\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$, которая удовлетворяет равенству (2.13) для любой $\varphi \in \overset{0}{W}{}_{2,\Box}(D_T)$, и для ее нормы справедлива оценка

$$\|u\|_{\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)} \leq \|F\|_{L_2(D_T)}. \tag{2.14}$$

Таким образом, вводя обозначения $u = L_0^{-1}F$, убеждаемся, что вышеупомянутой линейной задаче соответствует линейный ограниченный оператор

$$L_0^{-1} : L_2(D_T) \to \overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$$

и согласно (2.14) для его нормы справедлива оценка

$$\left\|L_0^{-1}\right\|_{L_2(D_T) \to \overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)} \leq 1. \tag{2.15}$$

Принимая во внимание определение 1.1 и замечание 2.2, мы можем записать равенство (1.8), эквивалентное задаче (1.1), (1.2), в виде

$$u = L_0^{-1}\left[-f(u) + F\right] \tag{2.16}$$

в гильбертовом пространстве $\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$.

***Замечание* 2.3.** Поскольку согласно (1.4) пространство $\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$ непрерывно вложено в пространство $\overset{0}{W}{}^1_2(D_T)$, учитывая (1.7), видим, что при выполнении условий (1.5), (1.6) оператор

$$N_1 = NII_1 : \overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T) \to L_2(D_T),$$

где $I_1 : \overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T) \to \overset{0}{W}{}^1_2(D_T)$ — оператор вложения, также является непрерывным и компактным.

Запишем уравнение (2.16) в виде

$$u = Au := L_0^{-1}\big(N_1 u + F\big). \tag{2.17}$$

Тогда с учетом (2.15) и замечания 2.3 заключаем, что оператор $A : \overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T) \to \overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$ из (2.17) является непрерывным и компактным. Вместе с этим, согласно априорной оценке (2.10), где постоянные $c_1 = 2c^4 = 2\big[1 + (T + T^3)\exp T\big]^2$ и $c_2 = 2c^2 M_\varepsilon \operatorname{mes} D_T$, $\varepsilon = \dfrac{1}{4}c^2$, для любого параметра $\tau \in [0,1]$ и решения $u \in \overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$ уравнения $u = \tau A u$ с вышеупомянутым параметром справедлива априорная оценка (2.10) с теми же положительными постоянными c_1 и c_2, не зависящими от u, F и τ. Следовательно, согласно теореме Лере – Шаудера [6, с. 375], уравнение (2.17), а следовательно и задача (1.1), (1.2), имеет по крайней мере одно слабое обобщенное решение u в пространстве $\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* (1.5), (1.6) *и* (2.9). *Тогда для любой функции* $F \in L_2(D_T)$ *задача* (1.1), (1.2) *имеет по крайней мере одно слабое обобщенное решение* $u \in \overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$.

3. Единственность решения задачи (1.1), (1.2).

Теорема 3.1. *Пусть* f *— монотонная функция, удовлетворяющая условиям* (1.5), (1.6). *Тогда для любой функции* $F \in L_2(D_T)$ *задача* (1.1), (1.2) *не может иметь более одного слабого обобщенного решения в пространстве* $\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$.

Доказательство. Пусть F принадлежит $L_2(D_T)$ и, более того, u_1 и u_2 — два слабых обобщенных решения задачи (1.1), (1.2) в пространстве $\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$, т. е. согласно (1.8) имеют место равенства

$$\int\limits_{D_T} \Box u_i \Box \varphi \, dx\, dt = -\int\limits_{D_T} f(u_i)\varphi \, dx\, dt + \int\limits_{D_T} F\varphi \, dx\, dt \quad \forall \varphi \in \overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T), \quad i = 1,2. \tag{3.1}$$

Из (3.1) для разности $v = u_2 - u_1$ имеем

$$\int\limits_{D_T} \Box v \Box \varphi \, dx\, dt = -\int\limits_{D_T} \big(f(u_2) - f(u_1)\big)\varphi \, dx\, dt \quad \forall \varphi \in \overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T). \tag{3.2}$$

Полагая $\varphi = v \in \overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$ в равенстве (3.2), получаем

$$\int\limits_{D_T} \big(\Box v\big)^2 dx\, dt = -\int\limits_{D_T} \big(f(u_2) - f(u_1)\big)(u_2 - u_1)\, dx\, dt. \tag{3.3}$$

Поскольку f — монотонная функция, то

$$\big(f(s_2) - f(s_1)\big)(s_2 - s_1) \geq 0 \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Из (3.3), (3.4) следует, что

$$\int\limits_{D_T} \big(\Box v\big)^2 dx\, dt \leq 0,$$

откуда согласно (2.1) находим $v = 0$, т. е. $u_2 = u_1$, что и завершает доказательство этой теоремы.

Из теорем 2.1 и 3.1 следует такая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть* f *— монотонная функция, удовлетворяющая условиям* (1.5), (1.6), (2.9). *Тогда для любой функции* $F \in L_2(D_T)$ *задача* (1.1), (1.2) *имеет единственное слабое обобщенное решение в пространстве* $\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$.

4. Отсутствие решений задачи (1.1), (1.2). Пусть для простоты $\Omega\colon |x|<1$.

Теорема 4.1. *Пусть* F^0 *принадлежит* $L_2(D_T)$, $\|F^0\|_{L_2(D_T)}\neq 0$, $F^0\geq 0$, *и* $F=\mu F^0$, $\mu=\mathrm{const}>0$. *Тогда в случае* $f(u)\leq -|u|^\alpha$, $1<\alpha<\dfrac{n+1}{n-1}$, *существует такое число* $\mu_0=\mu_0(F^0,\alpha)>0$, *что для* $\mu>\mu_0$ *задача* (1.1), (1.2) *не имеет слабого обобщенного решения в пространстве* $\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$.

Доказательство. Допустим, что условия теоремы выполнены и решение $u\in\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$ задачи (1.1), (1.2) существует для любого фиксированного $\mu>0$. Из равенства (1.8) следует, что

$$\int\limits_{D_T}\Box u\Box\varphi\,dx\,dt\geq\int\limits_{D_T}|u|^\alpha\varphi\,dx\,dt+\mu\int\limits_{D_T}F^0\varphi\,dx\,dt\quad\forall\varphi\in\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T).\tag{4.1}$$

Интегрированием по частям нетрудно проверить, что

$$\int\limits_{D_T}\Box u\Box\varphi\,dx\,dt=\int\limits_{D_T}u\Box^2\varphi\,dx\,dt\quad\forall\varphi\in\overset{0}{C}{}^4\big(\overline{D}_T,\partial D_T\big),\tag{4.2}$$

где $\overset{0}{C}{}^4(\overline{D}_T,\partial D_T):=\left\{u\in C^4\big(\overline{D}_T\big): u\big|_{\partial D_T}=\dfrac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial D_T}=0\right\}\subset\overset{0}{W}{}^1_{2,\Box}(D_T)$.

С учетом (4.2) запишем неравенство (4.1) следующим образом:

$$\int\limits_{D_T}|u|^\alpha\varphi\,dx\,dt\leq\int\limits_{D_T}u\Box^2\varphi\,dx\,dt-\mu\int\limits_{D_T}F^0\varphi\,dx\,dt\quad\forall\varphi\in\overset{0}{C}{}^4\big(\overline{D}_T,\partial D_T\big).\tag{4.3}$$

Ниже воспользуемся методом пробных функций [7, с. 10 – 12]. В роли пробной функции выберем такую $\varphi\in\overset{0}{C}{}^4(\overline{D}_T,\partial D_T)$, что $\varphi\,|_{D_T}>0$. Если в неравенстве Юнга с параметром $\varepsilon>0$

$$ab\leq\frac{\varepsilon}{\alpha}a^\alpha+\frac{1}{\alpha'\varepsilon^{\alpha'-1}}b^{\alpha'},\quad a,b\geq 0,\qquad\alpha'=\frac{\alpha}{\alpha-1},$$

то положим $a=|u|\varphi^{1/\alpha}$ и $b=\big|\Box^2\varphi\big|/\varphi^{1/\alpha}$. Тогда с учетом того, что $\alpha'/\alpha=\alpha'-1$, будем иметь

$$\big|u\Box^2\varphi\big|=|u|\varphi^{1/\alpha}\frac{\big|\Box^2\varphi\big|}{\varphi^{1/\alpha}}\leq\frac{\varepsilon}{\alpha}|u|^\alpha\varphi+\frac{1}{\alpha'\varepsilon^{\alpha'-1}}\frac{\big|\Box^2\varphi\big|^{\alpha'}}{\varphi^{\alpha'-1}}.\tag{4.4}$$

Из (4.3), (4.4) следует, что

$$\Big(1-\frac{\varepsilon}{\alpha}\Big)\int\limits_{D_T}|u|^\alpha\varphi\,dx\,dt\leq\frac{1}{\alpha'\varepsilon^{\alpha'-1}}\int\limits_{D_T}\frac{\big|\Box^2\varphi\big|^{\alpha'}}{\varphi^{\alpha'-1}}\,dx\,dt-\mu\int\limits_{D_T}F^0\varphi\,dx\,dt,$$

откуда при $\varepsilon<\alpha$ получаем

$$\int\limits_{D_T}|u|^\alpha\varphi\,dx\,dt\leq\frac{\alpha}{(\alpha-\varepsilon)\,\alpha'\varepsilon^{\alpha'-1}}\int\limits_{D_T}\frac{\big|\Box^2\varphi\big|^{\alpha'}}{\varphi^{\alpha'-1}}\,dx\,dt-\frac{\alpha\mu}{\alpha-\varepsilon}\int\limits_{D_T}F^0\varphi\,dx\,dt.\tag{4.5}$$

Принимая во внимание равенства $\alpha' = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$, $\alpha = \dfrac{\alpha'}{\alpha' - 1}$ и $\min_{0<\varepsilon<\alpha} \dfrac{\alpha}{(\alpha-\varepsilon)\,\alpha'\varepsilon^{\alpha'-1}} = 1$, которое достигается при $\varepsilon = 1$, из (4.5) находим

$$\int\limits_{D_T} |u|^{\alpha}\varphi\,dx\,dt \le \int\limits_{D_T} \frac{\left|\Box^2\varphi\right|^{\alpha'}}{\varphi^{\alpha'-1}}\,dx\,dt - \alpha'\mu \int\limits_{D_T} F^0\varphi\,dx\,dt. \tag{4.6}$$

Нетрудно показать существование такой пробной функции φ, что

$$\varphi \in \overset{0}{C}{}^{4}\big(\overline{D}_T, \partial D_T\big), \qquad \varphi\,\big|_{D_T} > 0, \qquad \kappa_0 = \int\limits_{D_T} \frac{\left|\Box^2\varphi\right|^{\alpha'}}{\varphi^{\alpha'-1}}\,dx\,dt < +\infty. \tag{4.7}$$

Действительно, легко видеть, что функция

$$\varphi(x,t) = \big[(1-|x|^2)t(T-t)\big]^m$$

для достаточно большого положительного m удовлетворяет условию (4.7).

Поскольку по условию теоремы F^0 принадлежит $L_2(D_T)$, $\|F^0\|_{L_2(D_T)} \ne 0$, $F^0 \ge 0$, и $\operatorname{mes} D_T < +\infty$, а также учитывая, что $\varphi\,|_{D_T} > 0$, имеем

$$0 < \kappa_1 = \int\limits_{D_T} F^0\varphi\,dx\,dt < +\infty. \tag{4.8}$$

Обозначим через $g(\mu)$ правую часть неравенства (4.6), которая линейна относительно μ. Тогда из (4.7), (4.8) получаем

$$g(\mu) < 0 \quad \text{при} \quad \mu > \mu_0 \quad \text{и} \quad g(\mu) > 0 \quad \text{при} \quad \mu < \mu_0, \tag{4.9}$$

где

$$g(\mu) = \kappa_0 - \alpha'\mu\kappa_1, \qquad \mu_0 = \frac{\kappa_0}{\alpha'\kappa_1} > 0.$$

Согласно (4.9), при $\mu > \mu_0$ правая часть неравенства (4.6) отрицательна, тогда как левая часть этого же неравенства неотрицательна. Полученное противоречие доказывает теорему.

Заметим, что в случае, когда $f(u) \le -|u|^{\alpha}, \alpha > 1$, условие (2.9) нарушено.

Литература

1. *Kharibegashvili S., Midodashvili B.* Solvability of characteristic boundary-value problems for nonlinear equations with iterated wave operator in the principal part // Electron. J. Different. Equat. – 2008. – № 72. – 12 p.
2. *Kharibegashvili S., Midodashvili B.* On one boundary value problem for a nonlinear equation with iterated wave operator in the principal part // Georg. Math. J. – 2008. – **15**, № 3. – P. 541 – 554.
3. *Kharibegashvili S.* Boundary value problems for some classes of nonlinear wave equations // Mem. Different. Equat. Math. Phys. – 2009. – **46**. – P. 1 – 114.
4. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973.
5. *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1988.
6. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1993.
7. *Митидиери Э., Похожаев С. И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. Мат. ин-та РАН. – 2001. – **234**.

Получено 03.02.19