УДК 517.51

А. И. Ноаров (Ин-т вычислит. математики РАН, Москва, Россия)

О КОРРЕКТНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОТОКА РАЗРЫВНОГО СОЛЕНОИДАЛЬНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

We prove inequalities connecting a flow through the $(n-1)$-dimensional surface S of a smooth solenoidal vector field with its $L^p(U)$-norm (U is an n-dimensional domain that contains S). On the basis of these inequalities, we propose a correct definition of the flow through the surface S of a discontinuous solenoidal vector field $f \in L^p(U)$ (or, more precisely, of the class of vector fields that are equal almost everywhere with respect to the Lebesque measure).

Доведено нерівності, що пов'язують течію через $(n-1)$-вимірну поверхню S гладкого соленоїдального векторного поля з його $L^p(U)$-нормою (U — n-вимірна область, що містить S). На основі цих нерівностей запропоновано коректне означення течії через поверхню S розривного соленоїдального векторного поля $f \in L^p(U)$ (а точніше, класу векторних полів, рівних майже скрізь за мірою Лебега).

Введение. В области $U \subseteq \mathbf{R}^n$ рассмотрим измеримое локально интегрируемое в степени $p \geq 1$ векторное поле, имеющее нулевую дивергенцию в смысле теории распределений. На гладкой $(n-1)$-мерной поверхности $S \subset U$ для этого векторного поля мы хотим корректно определить „устойчивое предельное значение", которое (как элемент пространства $L^q(S)$, $q \geq 1$) не менялось бы при изменении векторного поля на множестве нулевой n-мерной меры Лебега. Известно, что для разрывных функций указанный объект, называемый следом, корректно определен при наличии первых обобщенных производных, интегрируемых в достаточно высокой степени. Однако, как показывают примеры векторных полей на плоскости $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) = (-x_2, x_1)\varphi(|\boldsymbol{x}|)$, $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) = (\varphi(x_2), 0)$ с произвольной ограниченной измеримой функцией $\varphi(y)$, в рассматриваемом случае таких обобщенных производных может и не быть. Поэтому нахождение следа разрывного соленоидального векторного поля сопряжено с большими трудностями (см. также теорему 2), а для произвольного $\mathbf{f} \in L^p(U)$ такая задача и вовсе не имеет смысла. Тем не менее в ряде случаев оказывается возможным корректно определить поток разрывного соленоидального векторного поля через достаточно регулярные множества на S. Именно такой подход к описанию предельного значения $\mathbf{f}$ на S предлагается в данной работе.

Реализацию намеченной программы будем проводить при $n = 2$ и $n = 3$. Сначала в работе выводится класс неравенств, связывающих поток гладкого соленоидального векторного поля через поверхность $S \subset U$ с его $L^p(U)$-нормой

$$\|\mathbf{f}\|_{L^p(U)} = \left(\int\limits_U |\mathbf{f}(\boldsymbol{y})|^p dy_1 \ldots dy_n \right)^{1/p}.$$

Затем предлагается определить поток произвольного соленоидального векторного поля из $L^p(U)$ как предел потоков гладких соленоидальных векторных полей, стремящихся к исходному в $L^p(U)$-норме. Наличие конечного предела обосновывают указанные выше неравенства. Далее на основе полученных результатов исследуется регулярность обобщенных решений стационарного уравнения Фоккера – Планка с разрывными коэффициентами.

Векторные поля на плоскости.

Теорема 1. *Пусть* $p > 2$, $a > 0$, *а* Γ — *отрезок* $0 \leq x_1 \leq a$ *прямой* $x_2 = 0$, *погруженной в плоскость* $\mathbf{R}^2$. *Пусть* U — *ограниченное открытое множество в* $\mathbf{R}^2$, *содержащее* Γ. *Тогда для любого непрерывно дифференцируемого векторного поля* $\mathbf{f}: U \to \mathbf{R}^2$ *с нулевой дивергенцией выполняется неравенство*

$$\left| \int\limits_0^a f_2(x_1, 0)\, dx_1 \right| \leq C \|\mathbf{f}\|_{L^p(U)}, \tag{1}$$

где $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) = \big(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)\big)$, *а константа* $C = C(p, \Gamma, U)$ *не зависит от* $\mathbf{f}$.

Доказательство. Определим на $\mathbf{R}^2$ семейство ломаных Γ_β, поставив в соответствие каждому параметру β точку $(a/2, (a \operatorname{tg} \beta)/2)$ и пару отрезков, соединяющих эту точку с точками $(0; 0)$ и $(a; 0)$. Открытое множество U содержит Γ_β при $0 \leq \beta \leq \beta_0$ для некоторого $\beta_0 > 0$. По теореме Остроградского – Гаусса поток соленоидального векторного поля $\mathbf{f}$ через Γ равен потоку через ломаную Γ_β:

$$\int\limits_0^a f_2(x_1, 0)\, dx_1 = \int\limits_0^{a/2} (-f_1(x, x \operatorname{tg} \beta) \sin \beta + f_2(x, x \operatorname{tg} \beta) \cos \beta)\, dx / \cos \beta +$$

$$+ \int\limits_0^{a/2} (f_1(x + a/2, (a/2 - x) \operatorname{tg} \beta) \sin \beta +$$

$$+ f_2(x + a/2, (a/2 - x) \operatorname{tg} \beta) \cos \beta)\, dx / \cos \beta.$$

Интегрируя равенство по β в пределах от 0 до β_0 и оценивая скалярное произведение $\mathbf{f}$ и единичной нормали к Γ_β, имеем

$$\beta_0 \left| \int\limits_0^a f_2(x_1, 0)\, dx_1 \right| \leq \int\limits_0^{a/2} \int\limits_0^{\beta_0} \big| \mathbf{f}(x, x \operatorname{tg} \beta) / \cos \beta \big| d\beta\, dx +$$

$$+ \int\limits_0^{a/2} \int\limits_0^{\beta_0} \big| \mathbf{f}(x + a/2, (a/2 - x) \operatorname{tg} \beta) / \cos \beta \big| d\beta\, dx. \tag{2}$$

Оценим первое слагаемое в (2). Переходя к полярным координатам, заключаем, что интеграл

$$\int\limits_0^{a/2} \int\limits_0^{\beta_0} \big| \mathbf{f}(x, x \operatorname{tg} \beta) / \cos \beta \big| d\beta\, dx =$$

$$= \int\limits_0^{\beta_0} \int\limits_0^{a/(2 \cos \beta)} \big| \mathbf{f}(r \cos \beta, r \sin \beta) \big| dr\, d\beta =$$

$$= \int_0^{\beta_0} \int_0^{a/(2\cos\beta)} r\big|\mathbf{f}(r\cos\beta, r\sin\beta)/r\big|dr\, d\beta$$

равен интегралу от функции $\big|\mathbf{f}(\boldsymbol{x})\big|/|\boldsymbol{x}|$ по треугольнику с вершинами $(0;0)$, $(a/2;0)$ и $\big(a/2, (a\operatorname{tg}\beta_0)/2\big)$. В силу неравенства Гельдера он не превышает произведения $\|\mathbf{f}\|_{L^p(U)}$ и $L^q(U)$-нормы функции $1/|\boldsymbol{x}|$ при $1/p + 1/q = 1$. Последняя норма конечна, так как $1 < q < 2$, поскольку $p > 2$. Второе слагаемое в (2) оценивается аналогично — при отражении относительно прямой $x_1 = a/2$ оно принимает ту же форму, что и первое слагаемое.

Теорема 1 доказана.

Покажем, что условие $p > 2$ теоремы 1 нельзя ослабить. Положим $f_0(\boldsymbol{x}) = (x_2, -x_1)/(|\boldsymbol{x}|^2 \ln|\boldsymbol{x}|)$ при $0 < |\boldsymbol{x}| < 2/3$. Постоим последовательность $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ функций класса $C^\infty(R)$ со следующими свойствами: $0 \le \varphi_k(x) \le 1$, $\varphi_k(x) = 0$ при $|x| \le 1/(2k)$ и $\varphi_k(x) = 1$ при $|x| \ge 1/k$. Положим $\mathbf{f}_k(\boldsymbol{x}) = f_0(\boldsymbol{x})\varphi_k(|\boldsymbol{x}|)$, $U = \{\boldsymbol{x}\colon |\boldsymbol{x}| < 2/3\}$. Условие $\operatorname{div}\mathbf{f}_k(\boldsymbol{x}) = 0$ в U легко проверяется. Поток векторного поля $\mathbf{f}_k(\boldsymbol{x})$ через отрезок $[0, 1/2]$ прямой $x_2 = 0$ стремится к бесконечности при $k \to \infty$, так как

$$\int_0^{1/2} -\varphi_k(x)/(x\ln x)\, dx = \int_{1/(2k)}^{1/2} -\varphi_k(x)/(x\ln x)\, dx > \int_{1/k}^{1/2} -dx/(x\ln x),$$

а интеграл $\int_0^{1/2} -dx/(x\ln x)$ от положительной функции расходится.

С другой стороны, последовательность $\|\mathbf{f}_k\|_{L^2(U)}$ ограничена в силу неравенства

$$\int_{|x|<2/3} |\mathbf{f}_k(\boldsymbol{x})|^2\, dx_1\; dx_2 < \int_{|x|<2/3} |\mathbf{f}_0(\boldsymbol{x})|^2\, dx_1\, dx_2 = 2\pi \int_0^{2/3} dr/(r(\ln r)^2)$$

и сходимости последнего интеграла. Таким образом, в условии теоремы нельзя брать $p \le 2$.

Покажем, что отрезок в условии теоремы нельзя заменить произвольным ограниченным измеримым множеством.

Теорема 2. *Пусть* $3 > p > 2$, $q \ge 1$, *а* Γ — *отрезок* $0 \le x_1 \le 1$ *прямой* $x_2 = 0$, *погруженной в плоскость* $\mathbf{R}^2$. *Пусть* U — *открытое множество в* $\mathbf{R}^2$, *содержащее* Γ. *Рассмотрим наделенное нормой* $L^p(U)$ *пространство непрерывно дифференцируемых векторных полей на* U *с нулевой дивергенцией и конечной нормой* $L^p(U)$. *Тогда линейный функционал* $\mathbf{f} \mapsto \int_{\Gamma_1} f_2(x_1, 0)\, dx_1$ *на указанном нормированном пространстве разрывен для некоторого ограниченного измеримого подмножества* Γ_1 *отрезка* Γ. *Тогда же при каждом* $q \ge 1$ *разрывно отображение этого нормированного пространства в* $L^q(\Gamma)$, *сужающее вторую компоненту* f_2 *векторного* $\mathbf{f}$ *поля на* Γ.

Замечание. Утверждения, предшествующие теореме 2, также могут быть сформулированы в терминах непрерывности и разрывности функционала потока.

Доказательство теоремы 2. Построим функцию $\varphi \in C_0^\infty(R)$ со следующими свойствами: $0 \le \varphi(x) \le 1$, $\varphi(x) = 0$ при $x \ge 1$ и $\varphi(x) = 1$ при $x \le 1/2$. Положим $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) = (-x_2, x_1)\varphi(|\boldsymbol{x}|)$. Введем последовательность векторных полей

$$\mathbf{f}_n(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{f}\big(2k(k+1)\boldsymbol{x} - (2k+1)(1;0)\big). \tag{3}$$

Условие $\operatorname{div} \mathbf{f}_n(\boldsymbol{x}) = 0$ легко проверяется.

На прямой $x_2 = 0$ рассмотрим объединение отрезков

$$\Gamma_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2k+1}{2k(k+1)}, \frac{1}{k}\right]. \tag{4}$$

Вычислим поток векторного поля $\mathbf{f}_n$ через Γ_1. Для этого заметим, что k-е слагаемое из определения $\mathbf{f}_n(\boldsymbol{x})$ имеет в качестве носителя шар радиуса $\dfrac{1}{2k(k+1)}$ с центром в точке $\left(\dfrac{2k+1}{2k(k+1)}, 0\right)$, а k-й отрезок в (4) является крайним правым радиусом указанного шара. Поэтому поток $\mathbf{f}_n$ через Γ_1 равен

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\frac{2k+1}{2k(k+1)}}^{1/k} k\big(2k(k+1)x - (2k+1)\big)\varphi\big(2k(k+1)x - (2k+1)\big)\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 y\varphi(y)\, dy \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+2}.$$

Итак, указанный поток стремится к бесконечности при $n \to \infty$.

Докажем ограниченность последовательности $\{\mathbf{f}_n(\boldsymbol{x})\}_{n=1}^{\infty}$ в подходящей L^p-норме. Оценивая L^p-норму $\mathbf{f}_n$, отметим, что носители отдельных слагаемых в (3) являются шарами, касающимися один другого. Поэтому

$$\int\limits_{\mathbf{R}^2} |\mathbf{f}_n(\boldsymbol{x})|^p\, dx_1\, dx_2 = \sum_{k=1}^{n} k^p \int\limits_{\mathbf{R}^2} |\mathbf{f}(2k(k+1)\boldsymbol{x})|^p\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^2} |\mathbf{f}(\boldsymbol{x})|^p\, dx_1\, dx_2 \sum_{k=1}^{n} k^{p-2}/(2k+2)^2.$$

В силу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2}/(2k+2)^2$ при каждом $p < 3$ последовательность $\big\{\mathbf{f}_n(\boldsymbol{x})\big\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена в $L^p(\mathbf{R}^2)$ и поэтому в $L^p(U)$ при любом открытом U. С другой стороны, последовательность потоков $\mathbf{f}_n$ через Γ_1 стремится к бесконечности, что доказывает разрывность функционала $f \mapsto \displaystyle\int_{\Gamma_1} f_2(x_1, 0)\, dx_1$ для множества Γ_1, заданного формулой (4).

Отображение разрывно, поскольку в противном случае был бы непрерывен описанный выше функционал.

Теорема 2 доказана.

Теорему 2 можно интерпретировать как отсутствие следа на Γ у нормальной к Γ компоненты разрывного соленоидального векторного поля. Тем более, как показывает пример векторного поля $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) = (\varphi(x_2), 0)$ с произвольной ограниченной измеримой функцией $\varphi(y)$ и $\Gamma \subset \{\boldsymbol{x} :$

$x_2 = 0\}$, отсутствует след и разрывно соответствующее отображение у тангенциальной компоненты. С другой стороны, интеграл по Γ от нормальной компоненты следа, т. е. поток через Γ, можно корректно определить на основании теоремы 1.

Некоторые многомерные обобщения.

Теорема 3. *Пусть $p > 2$, а Γ — выпуклый многоугольник, лежащий на плоскости $x_3 = 0$, погруженной в $\mathbf{R}^3$. Пусть U — ограниченное открытое множество в $\mathbf{R}^3$, содержащее Γ. Тогда для любого непрерывно дифференцируемого векторного поля $\mathbf{f}\colon U \to \mathbf{R}^3$ с нулевой дивергенцией выполняется неравенство*

$$\left| \int\limits_{\Gamma} f_3(x_1, x_2, 0)\, dx_1\, dx_2 \right| \le C\|\mathbf{f}\|_{L^p(U)}, \tag{5}$$

где $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) = \big(f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3), f_3(x_1, x_2, x_3)\big)$, а константа $C = C(p, \Gamma, U)$ не зависит от $\mathbf{f}$.

Доказательство. Считаем, что начало координат находится внутри Γ. Определим в $\mathbf{R}^3$ семейство поверхностей Γ_b, поставив в соответствие каждому параметру b точку $(0, 0, b)$, набор отрезков, соединяющих эту точку с вершинами Γ, и боковую поверхность Γ_b, натянутую на эти отрезки. Открытое множество U содержит Γ_b при $0 \le b \le b_0$ для некоторого $b_0 > 0$. По теореме Остроградского – Гаусса поток соленоидального векторного поля $\mathbf{f}$ через Γ равен потоку через любую поверхность Γ_b:

$$\int\limits_{\Gamma} f_3(x_1, x_2, 0)\, dx_1\, dx_2 = \int\limits_{\Gamma_b} (\mathbf{f}, \boldsymbol{n})\, dS = b_0^{-1} \int\limits_0^{b_0} \int\limits_{\Gamma_b} (\mathbf{f}, \boldsymbol{n})\, dS\, db,$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичная нормаль к Γ_b в соответствующей точке. Тогда

$$\left| \int\limits_{\Gamma} f_3(x_1, x_2, 0)\, dx_1\, dx_2 \right| \le b_0^{-1} \int\limits_0^{b_0} \int\limits_{\Gamma_b} |\mathbf{f}|\, dS\, db. \tag{6}$$

Двойной интеграл в правой части представляет собой объемный интеграл с некоторым весом от функции $|\mathbf{f}(\boldsymbol{x})|$ по пирамиде с основанием Γ и боковой поверхностью Γ_{b_0}.

Разрежем пирамиду вертикальными полуплоскостями, выпущенными из прямой $x_1 = x_2 = 0$, и представим правую часть (6) как сумму интегралов по более мелким пирамидам. Оценим один из них. Он имеет вид $\int_0^{b_0} \int_{T_b} |\mathbf{f}|\, dS\, db$, причем треугольник T_b образован одной из сторон А многоугольника Γ и точкой $(0, 0, b)$. Выполним замену переменных в интеграле, для чего введем цилиндрические координаты r, y, β. Расстояние от текущей точки до прямой, содержащей А, обозначим через r, а расстояние от этой прямой до начала (декартовых, а не цилиндрических) координат — через h. Координату точки вдоль этой прямой обозначим через y, совместив начало цилиндрических координат с одним из концов А. Двугранный угол между плоскостью $x_3 = 0$ и плоскостью, проходящей через А и текущую точку, обозначим через β. Тогда $b = h \operatorname{tg} \beta$ и поэтому

$$\int\limits_0^{b_0} \int\limits_{T_b} |\mathbf{f}|\, dS\, db = h \int\limits_0^{\beta_0} (\cos\beta)^{-2} \int\limits_{T_b} |\mathbf{f}|\, dS\, d\beta,$$

где $\beta_0 \in (0, \pi/2)$ — двугранный угол между b_0 и плоскостью $x_3 = 0$. Переходя к цилиндрическим координатам, заключаем, что правая часть неравенства

$$\int\limits_0^{b_0} \int\limits_{T_b} |\mathbf{f}|\, dS\, db \le h(\cos\beta_0)^{-2} \int\limits_0^{\beta_0} \int\limits_{T_b} |\mathbf{f}|\, dS\, d\beta =$$

$$= h(\cos\beta_0)^{-2} \int\limits_0^{\beta_0} \int\limits_{T_b} |\mathbf{f}(r, y, \beta)| dr\, dy\, d\beta$$

содержит объемный интеграл от функции $|\mathbf{f}(\boldsymbol{x})|/r(\boldsymbol{x})$ по пирамиде с вершинами $(0, 0, 0)$, $(0, 0, b_0)$ и двумя соседними вершинами Γ. В силу неравенства Гельдера этот интеграл не превышает произведения $\|\mathbf{f}\|_{L^p(U)}$ и $L^q(U)$-нормы функции $1/r(\boldsymbol{x})$ при $1/p + 1/q = 1$. Последняя норма конечна, так как $1 < q < 2$, поскольку $p > 2$. Для расстояния $r(\boldsymbol{x})$ от точки $\boldsymbol{x}$ до прямой, проходящей через две соседние вершины многоугольника Γ, сходимость интеграла от $(r(\boldsymbol{x}))^{-q}$ по трехмерному ограниченному U доказывается так же, как и сходимость интеграла от $|\boldsymbol{x}|^{-q}$ по двумерному ограниченному U. Таким образом, мы оценили сверху правую часть (6), в которой Γ_b заменен на T_b, соответствующий одной из сторон многоугольника Γ. Для других сторон многоугольника Γ (а их количество конечно) такие неравенства (быть может, с другими константами) получают аналогично. Суммирование неравенств приводит к оценке правой части (6), которая в сочетании с (6) влечет (5).

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть $p > 2$, Γ — кусочно-гладкая поверхность в $\mathbf{R}^3$, а U — открытое выпуклое ограниченное множество в $\mathbf{R}^3$, содержащее Γ. Допустим, что граница поверхности Γ является объединением конечного набора отрезков. Тогда для любого непрерывно дифференцируемого векторного поля $\mathbf{f} : U \to \mathbf{R}^3$ с нулевой дивергенцией выполняется неравенство*

$$\left| \int\limits_\Gamma (\mathbf{f}, \boldsymbol{n})\, dS \right| \le C \|\mathbf{f}\|_{L^p(U)} \tag{7}$$

с константой $C = C(p, \Gamma, U)$, не зависящей от $\mathbf{f}$.

Доказательство. Построим кусочно-линейную поверхность в U с той же границей B, что и поверхность Γ. Для этого возьмем какую-либо точку $\mathbf{z} \in U$. Искомую поверхность в U нам „нарисует" отрезок с концами $\mathbf{z}$ и $\boldsymbol{x}$, когда точка $\boldsymbol{x}$ „пробежит" множество B. По теореме Остроградского – Гаусса поток векторного поля $\mathbf{f}$ через построенную поверхность равен его потоку через Γ. Он равен сумме потоков через треугольные грани построенной поверхности. Поток через каждый треугольник оценивается с помощью теоремы 3, при этом выполняется ортогональная замена независимых переменных и используется инвариантность дивергенции и потока. Затем неравенства для отдельных треугольников (возможно, с разными константами) суммируются.

Теорема 4 доказана.

Не исключено, что теорема 4 останется справедливой, если (не обязательно плоскую) кусочно-линейную границу в ее условии заменить на более произвольную, но полностью отказаться от условия регулярности Γ нельзя. Пример ограниченного измеримого множества Γ, для которого теорема 4 не имеет места, как и в двумерном случае, строится на основе (4). Для этого Γ_1 погружается в $\mathbf{R}^3$ и декартово „умножается" на какой-либо отрезок прямой $x_1 = x_2 = 0$, перпендикулярный Γ_1 и $\mathbf{f}_n$, заданному формулой (3). В качестве U берется произвольное ограниченное открытое множество в $\mathbf{R}^3$, содержащее „произведение". Векторные поля $\mathbf{f}_n$, изначально заданные формулой (3) на плоскости $x_3 = 0$, параллельными переносами вдоль прямой $x_1 = x_2 = 0$ определяются на всем $\mathbf{R}^3$. Дальнейшие рассуждения по аналогии с двумерным случаем завершают построение контрпримера и приводят к трехмерному аналогу теоремы 2.

Оценка потока непрерывного векторного поля.

Теорема 5. *Теоремы* 1, 3 *и* 4 *останутся справедливыми, если в их условии непрерывно дифференцируемые векторные поля с нулевой дивергенцией заменить на непрерывные векторные поля с обобщенной нулевой дивергенцией, понимаемой в смысле интегрального тождества*

$$\int\limits_U \big(\nabla\varphi(\boldsymbol{x}), \mathbf{f}(\boldsymbol{x})\big)\, d\boldsymbol{x} = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(U). \tag{8}$$

Доказательство. Множество Γ в теоремах 1, 3, 4, замкнуто, поэтому существует содержащее его открытое множество U_1, замыкание которого содержится в U. Если (в теореме 4) U_1 выпукло, U_1 берем выпуклым. Построим последовательность $\{\mathbf{f}_k(\boldsymbol{x})\}_{k=1}^\infty$ векторных полей класса $C^\infty(U_1)$, равномерно сходящуюся на U_1 к $\mathbf{f}(\boldsymbol{x})$. Для этого применим операцию усреднения. Пусть неотрицательная функция $\varphi_1(\boldsymbol{x})$ класса $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ в качестве носителя имеет шар единичного радиуса с центром в нуле и $\int_{R^n} \varphi_1(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = 1$. Положим

$$\varphi_k(\boldsymbol{x}) = k^n \varphi_1(k\mathbf{x}), \qquad \mathbf{f}_k(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{R^n} \mathbf{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\varphi_k(\boldsymbol{y})\, dy_1 \ldots dy_n.$$

При всех достаточно больших k $\mathbf{f}_k(\boldsymbol{x})$ определено в U_1 и равномерно сходится к $\mathbf{f}(\boldsymbol{x})$ на U_1. Замечая, что $\mathbf{f}_k(\boldsymbol{x})$ имеет нулевую дивергенцию, и применяя к $\mathbf{f}_k(\boldsymbol{x})$, Γ и U_1 теоремы 1, 3 или 4, заключаем, что неравенства (1), (5), (7) выполняются для $\mathbf{f}_k(\boldsymbol{x})$ с константой $C(p, \Gamma, U_1)$ и правой частью, в которой норма берется по U_1. Эти неравенства для $\mathbf{f}(\boldsymbol{x})$ получаем предельным переходом. Наконец, норму $\mathbf{f}(\boldsymbol{x})$ по U_1 оцениваем сверху нормой по U.

Теорема 5 доказана.

Определение потока разрывного векторного поля. Исходя из оценки (7), можно предложить следующее определение потока через поверхность $\Gamma \subset U$ заданного в открытом множестве U векторного поля $f \in L^p(U)$ с обобщенной нулевой дивергенцией, понимаемой в смысле интегрального тождества (8). Пусть $p > 2$, а Γ — отрезок при $n = 2$ или плоский многоугольник при $n = 3$. Окружим Γ открытым множеством U_1, замыкание которого содержится в U. Построим последовательность $\{\mathbf{f}_k\}_{k=1}^\infty$ непрерывных векторных полей, сходящуюся в $L^p(U_1)$ к $\mathbf{f}$. Для этого применим операцию усреднения. Для каждого k положим

$$\delta = \frac{1}{k}, \qquad Q_\delta(\boldsymbol{x}) = \left\{\mathbf{y} : |y_i - x_i| \le \frac{\delta}{2},\ i = 1, 2, \ldots, n\right\},$$

$$\mathbf{f}_k(\boldsymbol{x}) = \delta^{-n} \int\limits_{Q_\delta(x)} u(\mathbf{y})\, dy_1 \ldots dy_n.$$

При всех достаточно больших k $\mathbf{f}_k(\boldsymbol{x})$ определено в U_1 и сходится к $\mathbf{f}$ в $L^p(U_1)$, поэтому последовательность $\{\mathbf{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна в $L^p(U_1)$. Замечая, что $\mathbf{f}_k$ непрерывно и имеет обобщенную нулевую дивергенцию в смысле интегрального тождества (8), а также применяя к разности элементов $\{\mathbf{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$ теорему 5, заключаем, что числовая последовательность потоков $\mathbf{f}_k$ через S фундаментальна. Ее предел предлагается назвать потоком $\mathbf{f}$ через Γ.

Как можно заметить, этот предел не зависит от способа построения последовательности непрерывных соленоидальных векторных полей $\{\mathbf{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$, сходящихся в $L^p(U_1)$ к $\mathbf{f}$, а также от выбора U_1, содержащего Γ. Определенный таким образом поток является линейным функционалом, непрерывным на $L^p(U)$. Для непрерывных соленоидальных векторных полей он однозначно определяется их значением на поверхности Γ и совпадает (по модулю) с левой частью (1), (5) или (7). Для произвольного соленоидального $f \in L^p(U)$ это не так, но определение потока локально в следующем смысле. Он однозначно определяется значением $\mathbf{f}$ в сколь угодно малой окрестности поверхности Γ и сохраняется при изменении $\mathbf{f}$ на любом множестве нулевой n-мерной меры Лебега.

При $n = 2$ и $\Gamma \subset \{\boldsymbol{x} : x_2 = 0\}$ описанным выше способом определяется поток соленоидального векторного поля $f \in L^p(U)$ и через любую конечную систему отрезков, лежащих в отрезке Γ. Таким образом, несмотря на теорему 2 и комментарий к ней, при желании можно определить след на Γ от нормальной относительно Γ компоненты $f \in L^p(U)$, понимая под ним не функцию, а меру, определенную для конечных (но не для счетных, см. (4)) объединений отрезков. С другой стороны, как показывает пример векторного поля $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) = (\varphi(x_2), 0)$ с произвольной ограниченной измеримой функцией $\varphi(y)$, понятие следа на $\{\boldsymbol{x} : x_2 = 0\}$ от тангенциальной компоненты, не участвующей в определении потока, даже для соленоидального $f \in L^p(U)$ не имеет смысла.

Метод усреднения и стационарное уравнение Фоккера – Планка. Обширный класс разрывных соленоидальных векторных полей возникает при исследовании стационарных уравнений Фоккера – Планка

$$\Delta u - \operatorname{div}(u\mathbf{f}) = 0 \tag{9}$$

с разрывными (например, локально ограниченными) векторными полями $\mathbf{f}$ (см. [1]). Векторное поле $\nabla u - u\mathbf{f}$, согласно [2], содержится в $L^p_{\mathrm{loc}}(R^n)$ при условии $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(R^n)$, $p > n$. Векторное поле $\nabla u - u\mathbf{f}$ имеет смысл плотности потока вероятностей. Оно имеет обобщенную нулевую дивергенцию в смысле (8), поэтому на основе полученных ранее результатов при $n = 2$ и $n = 3$ можно корректно определить его поток через достаточно регулярные множества. В частности, для уравнения (9) с разрывным $\mathbf{f}$ в области с протяженной границей появляется возможность корректно сформулировать ранее введенное в [3] граничное условие вида „плотность потока вероятности через границу равна нулю”. Тем не менее, как показывает следующий пример, попытка определить поток отдельно для ∇u и $u\mathbf{f}$ в общем случае безрезультатна.

В плоской области $x_1 < 2$ введем функцию $u(x_1, x_2) = 2$ при $x_1 \leq 0$, $u(x_1, x_2) = 2 + x_1 \sin(\ln x_1)$ при $x_1 > 0$ и ограниченное измеримое векторное поле $\mathbf{j}$ с нулевой обобщенной дивергенцией в смысле (8). Положим $\mathbf{f} = (\nabla u + \mathbf{j})/u$. Тогда в смысле теории распределений будем иметь равенства (9) и $\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1 = 0$ при $x_1 \leq 0$, $\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1 = \sin(\ln x_1) + \cos(\ln x_1)$ при $x_1 > 0$. Поток векторного поля $\mathbf{j} = u\mathbf{f} - \nabla u$ через любой отрезок прямой $x_1 = 0$ корректно определен с помощью ранее описанной процедуры усреднения. С другой стороны, эта процедура, примененная отдельно к векторным полям $u\mathbf{f}$ и ∇u, не дает желаемого результата. Начнем с ∇u. Для каждого k поток векторного поля

$$\mathbf{f}_k(\boldsymbol{x}) = k^2 \int\limits_{Q_{1/k}(x)} \nabla u(\mathbf{y})\, dy_1\, dy_2$$

через единичный отрезок прямой $x_1 = 0$, равный

$$k^2 k^{-1}\big(u((2k)^{-1}, 0) - u(0,0)\big) = 0{,}5 \sin(-\ln(2k)),$$

не имеет ни конечного, ни бесконечного предела при $k \to \infty$. Такой же результат даст описанная ранее процедура для векторного поля $u\mathbf{f}$, поскольку для $\mathbf{j} = u\mathbf{f} - \nabla u$ соответствующая последовательность потоков имеет конечный предел. В простейшем случае $\mathbf{j} \equiv 0$ и этот предел равен нулю; примеры разрывных $\mathbf{j}$ приведены во введении.

Литература

1. *Ноаров А. И.* Стационарные диффузионные процессы с разрывными коэффициентами сноса // Алгебра и анализ. – 2012. – **24**, № 5. – С. 141 – 164.
2. *Bogachev V. I., Krylov N. V., Röeckner M.* On regularity of transition probabilities and invariant measures of singular diffusions under minimal conditions // Communs Partial Different. Equat. – 2001. – **26**, № 11-12. – P. 2037 – 2080.
3. *Ноаров А. И.* Стационарное уравнение Фоккера – Планка на некомпактных многообразиях и в неограниченных областях // Теор. и мат. физика. – 2016. – **189**, № 3. – С. 453 – 463.

Получено 18.04.18