УДК 512.64

О. А. Тилищак (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО МАКСИМАЛЬНІ УНІПОТЕНТНІ ПІДГРУПИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ЛІНІЙНОЇ ГРУПИ НАД КОМУТАТИВНИМ КІЛЬЦЕМ*

We prove that all maximal unipotent subgroups of a special linear group over commutative ring with identity (such that the factor ring of its modulo primitive radical is a finite direct sum of Bezout domains) are pairwise conjugated and describe one maximal unipotent subgroup of the general linear group (and of a special linear group) over an arbitrary commutative ring with identity.

Доведено, що всі максимальні уніпотентні підгрупи спеціальної лінійної групи над комутативним кільцем з одиницею таким, що фактор-кільце за первісним радикалом є скінченною прямою сумою областей Безу, попарно спряжені, й описано одну максимальну уніпотентну підгрупу повної та спеціальної лінійної групи над довільним комутативним кільцем з одиницею.

1. Вступ. А. І. Мальцев та Е. Р. Колчин (див. [1, с. 262] (наслідок 1) або [2, 3]) показали, що у повній лінійній групі $GL(n, F)$ довільного натурального степеня n над полем F будь-яка максимальна уніпотентна підгрупа (максимальна група уніпотентних матриць) спряжена з унітрикутною підгрупою $UT(n, F)$. Під уніпотентною матрицею розуміємо квадратну матрицю A, для якої $A - E$ — нільпотентна матриця, де E — одинична матриця відповідного порядку. Із цього результату випливає, що довільна силовська p-підгрупа повної лінійної групи $GL(n, F)$ степеня n над полем F характеристики p спряжена з відповідною унітрикутною групою. Хоча проблему опису, з точністю до спряження, максимальних уніпотентних матричних груп над полями було розв'язано, окремі властивості цих груп, як, наприклад, проблема Платонова і Потапчика, досліджувались у [4, 5]. Також активно досліджуються уніпотентні підгрупи алгебраїчних груп матриць над полями [6, 7]. Узагальнення деяких результатів про уніпотентні матричні групи на некомутативний випадок (над тілами) та новий підхід до опису p-підгруп групи $GL(n, F)$ над полем F запропонував В. М. Петечук [8].

П. М. Гудивок, Є. Я. Погоріляк і В. П. Рудько досліджували силовські p-підгрупи повної лінійної групи над комутативними кільцями. Вони, зокрема, показали [9, с. 81, 82] (твердження 1, 2) (див. також [10]), що унітрикутна група $UT(n, K)$ є силовською p-підгрупою повної лінійної групи $GL(n, K)$ над областю цілісності K характеристики p, а силовські p-підгрупи повної лінійної групи над областю головних ідеалів L характеристики p спряжені з $UT(n, L)$. В [11, с. 117] (теорема 2) показано, що всі максимальні уніпотентні підгрупи повної лінійної групи над кільцем K попарно спряжені, якщо $K/\operatorname{rad} K$ є скінченною прямою сумою областей Безу. Тут і далі $\operatorname{rad} K$ — первісний радикал кільця K. В цій роботі досліджуються максимальні уніпотентні підгрупи повної та спеціальної лінійної групи над комутативним кільцем.

2. Одна максимальна уніпотентна підгрупа групи $GL(n, K)$ ($\operatorname{rad} K = 0$). Нехай K — комутативне кільце (яке завжди вважається кільцем з одиницею), $M(n, K)$ — кільце квадратних матриць порядку n над K. Елемент $t + \operatorname{rad} K$ фактор-кільця $K/\operatorname{rad} K$ позначимо через $\bar{t}$ і для (довільної) матриці $T = (t_{ij})$ над K покладемо $\overline{T} = (\overline{t_{ij}})$, $\widetilde{T}(n, K)$ — множина верхніх трикутних матриць порядку n ($n > 1$) над кільцем K з нулями на головній діагоналі. Для

* Дослідження підтримано Лондонським математичним товариством (International Short Visits — Scheme 5).

довільних квадратних матриць A і B одного порядку над кільцем K через $A \circ B$ будемо позначати матрицю $A + B + AB$, $\det M$ — детермінант квадратної матриці M над кільцем K.

Лема 1. *Нехай A — деяка матриця порядку n $(n > 1)$ над кільцем K. Якщо $\det(A \circ B) = 0$ для будь-якої матриці B із $\widetilde{T}(n, K)$, то $\det(A + B) = 0$ для будь-якої матриці B із $\widetilde{T}(n, K)$.*

Доведення. Нехай B — довільна матриця із $\widetilde{T}(n, K)$, E — одинична матриця порядку n над кільцем K. Тоді $E - B \in UT(n, K)$. Отже, матриця $E - B$ оборотна і $(E - B)^{-1} \in UT(n, K)$. Звідси одержуємо $B' = (E - B)^{-1} - E \in \widetilde{T}(n, K)$. Оскільки $\det(A \circ B') = 0$, то

$$\det(A + B) = \det\big(A + E - (E - B)\big) =$$
$$= \det\big(\big(A(E - B)^{-1} + (E - B)^{-1} - E\big)(E - B)\big) =$$
$$= \det\big(\big(A(E + B') + B'\big)(E - B)\big) = \det((A + B' + AB')(E - B)) =$$
$$= \det((A \circ B')(E - B)) = 0.$$

Лема 2. *Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — деяка матриця порядку n $(n > 1)$ над кільцем K. Якщо $\det(A \circ B) = 0$ для будь-якої матриці B із $\widetilde{T}(n, K)$, то $a_{n1} = 0$.*

Доведення. За лемою 1 $\det(A + B) = 0$ для будь-якої матриці B із $\widetilde{T}(n, K)$. Нехай $B = \|b_{ij}\|$ — довільна матриця із $\widetilde{T}(n, K)$, $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$ відповідно одержані з матриць A і B заміною q-го стовпця на нульовий $(1 \le q \le n)$. Тоді $\widetilde{B} \in \widetilde{T}(n, K)$ і $\det(A + \widetilde{B}) = 0$. З адитивної властивості детермінанта відносно елементів q-го стовпця одержимо $\det(A + B) = \det(A + \widetilde{B}) + \det(\widetilde{A} + B)$. Звідси $\det(\widetilde{A} + B) = \det(A + B) - \det(A + \widetilde{B}) = 0$.

Нехай матрицю A^* одержано з матриці A заміною останніх $n - 1$ стовпців на нульові. Очевидно, $\det(A^* + B) = 0$ для будь-якої матриці B із $\widetilde{\mathrm{T}}(n, K)$. Розглянемо

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \widetilde{T}(n, K).$$

Тоді

$$\det(A^* + B_1) = \det \begin{pmatrix} a_{1\,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2\,1} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1\,1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_{n\,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{n+1} a_{n\,1}$$

і $a_{n1} = 0$.

Лема 3. *Нехай P — деяка підгрупа групи $GL(n, K)$ $(n > 1)$, E — одинична матриця порядку n над кільцем K. Якщо в усіх матриць з групи P елемент у деякій фіксованій позиції (i, j) $(i \neq j)$ дорівнює нулю, то нулю дорівнює й елемент матриці A^r у позиції (i, j) для будь-якого натурального числа r і кожної матриці A порядку n над кільцем K такої, що $E + A \in P$.*

Доведення проведемо індукцією за числом r. При $r = 1$ лема, очевидно, справджується. Нехай $r > 1$ і лема справджується для всіх натуральних чисел m, менших за r. Нехай далі A — матриця порядку n над кільцем K, $E + A \in P$. Оскільки $(E + A)^r \in P$, то елемент матриці $E+\sum_{m=1}^{r-1} C_r^m A^m + A^r = (E+A)^r$ у позиції (i,j) дорівнює нулю (тут C_r^m — число сполучень з r елементів по m). За припущенням індукції елемент матриці A^m у позиції (i,j) дорівнює нулю $(m = 1,\ldots,r-1)$, тому нулю дорівнює й елемент матриці A^r у цій же позиції.

Теорема 1. *Нехай* $\operatorname{rad} K = 0$, n — *натуральне число. Група* $UT(n,K)$ *є максимальною унiпотентною пiдгрупою групи* $GL(n,K)$.

Доведення. Легко бачити, що $UT(n,K)$ — унiпотентна пiдгрупа групи $GL(n,K)$. Очевидно, при $n = 1$ $UT(n,K) = \{1\}$ — єдина унiпотентна пiдгрупа групи $GL(n,K)$. Нехай $n > 1$ і P — деяка унiпотентна пiдгрупа групи $GL(n,K)$, що містить групу $UT(n,K)$. Покажемо спочатку, що в усiх матриць iз групи P елемент у позицiї $(n,1)$ дорiвнює нулю. Дiйсно, нехай A' — довiльна матриця з групи P, E — одинична матриця порядку n над кiльцем K, $A = A' - E$, B — довiльна матриця з $\widetilde{T}(n,K)$. Тодi $E + A \in P$, $E + B \in UT(n,K)$. Звiдси матриця $E + (A \circ B) = E + A + B + AB = (E + A)(E + B) \in P$ є унiпотентною матрицею групи $GL(n,K)$. Тодi матриця $A \circ B$ нiльпотентна i $\det(A \circ B) \in \operatorname{rad} K$. Тому $\det(A \circ B) = 0$. За лемою 2 елемент матрицi A, а отже, i $A' = E + A$ у позицiї $(n,1)$ дорiвнює нулю.

Нехай k — натуральне число, $1 < k < n$ i в усiх матриць групи P елемент у позицiї $(i,1)$ дорiвнює нулю $(i = k+1,\ldots,n)$. Покажемо, що в усiх матриць з групи P елемент у позицiї $(k,1)$ також дорiвнює нулю. Дiйсно, нехай знову A' — довiльна матриця з групи P, $A = A' - E$, B — довiльна матриця з $\widetilde{T}(n,K)$. Тодi $E + A \in P$, $E + B \in UT(n,K)$. Звiдси, як i ранiше, одержуємо $E + A \circ B \in P$, матриця $A \circ B$ нiльпотентна. За лемою 3 елемент матрицi $(E \circ A)^r$ у позицiї $(i,1)$ дорiвнює нулю $(i = k+1,\ldots,n;\ r$ — натуральне число$)$.

Позначимо через $M(C)$ матрицю, утворену з квадратної матрицi C порядку n над кiльцем K вiдкиданням останнiх $n-k$ рядкiв i останнiх $n-k$ стовпцiв. Покажемо, що у матриць $M\big((A \circ B)^m\big)$ i $\big(M(A \circ B)\big)^m$ однаковi першi стовпцi при будь-якому натуральному числу m. Застосуємо iндукцiю за числом m. При $m = 1$ твердження є очевидним. Нехай $m > 1$ i у матриць $M\big((A \circ B)^{m-1}\big)$ i $\big(M(A \circ B)\big)^{m-1}$ перший стовпець

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix},$$

де $x_j \in K$, $j = 1,\ldots,k$. Тодi перший стовпець матрицi $\big(M(A \circ B)\big)^m = M(A \circ B) \times \big(M(A \circ$ $\circ B)\big)^{m-1}$ дорiвнює $M(A \circ B)X$. З iншого боку, у матрицi $(A \circ B)^{m-1}$ елемент у позицiї $(j,1)$ дорiвнює x_j, $j = 1,\ldots,k$, бо X є першим стовпцем матрицi $M\big((A \circ B)^{m-1}\big)$, а у позицiї $(i,1)$ дорiвнює нулю $(i = k+1,\ldots,n)$. Тому стовпець

$$X' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

буде першим стовпцем матриці $(A \circ B)^{m-1}$. Звідси одержуємо, що перший стовпець матриці $(A \circ B)^m = (A \circ B)(A \circ B)^{m-1}$ дорівнює

$$(A \circ B)X' = \begin{pmatrix} M(A \circ B)X \\ D \end{pmatrix},$$

де D — деяка $((n-k) \times 1)$-матриця над кільцем K. Тому $M(A \circ B)X$ є першим стовпцем матриці $M\big((A \circ B)^m\big)$. Отже, у матриць $M\big((A \circ B)^m\big)$ і $\big(M(A \circ B)\big)^m$ однакові перші стовпці для будь-якого натурального числа m.

Оскільки матриця $A \circ B$ нільпотентна, то для досить великого m перший стовпець матриці $M\big((A \circ B)^m\big)$, як і $\big(M(A \circ B)\big)^m$, дорівнює нулю. Звідси $\big(\det M(A \circ B)\big)^m = \det\big(M(A \circ B)^m\big) = 0$. Оскільки $\operatorname{rad} K = 0$, то $\det M(A \circ B) = 0$. Легко бачити, що $M(A + B + AB) = M(A) + M(B) + M(AB)$. Оскільки $B \in \widetilde{T}(n, K)$, то $M(AB) = M(A)M(B)$. Отже, $\det\big(M(A) \circ M(B)\big) = \det\big(M(A) + M(B) + M(A)M(B)\big) = \det M(A + B + AB) = \det M(A \circ B) = 0$.

Нехай B' — довільна матриця з $\widetilde{T}(k, K)$. Очевидно, знайдеться така матриця $B_1 \in \widetilde{T}(n, K)$, що $B' = M(B_1)$. Тоді $\det\big(M(A) \circ B'\big) = \det\big(M(A) \circ M(B_1)\big) = 0$. За лемою 2 елемент матриці $M(A)$ у позиції $(k, 1)$ дорівнює нулю, тому нулю дорівнює й елемент матриць A і $A' = E + A$ у позиції $(k, 1)$. Отже, ми показали, що у будь-якої матриці з групи P елемент у позиції $(k, 1)$ дорівнює нулю для всіх натуральних чисел k, $1 < k \le n$. Елемент у позиції $(1, 1)$ будь-якої матриці з групи P буде, в такому випадку, уніпотентним елементом кільця K (для якого $\operatorname{rad} K = 0$) і тому дорівнює 1. Отже, будь-яка матриця з групи P має вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}, \quad a'_{ij} \in K, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 2, \dots, n.$$

Нескладною індукцією за числом n можна показати, що всі матриці з P містяться в $UT(n, K)$. Тому $UT(n, K)$ є максимальною уніпотентною підгрупою групи $GL(n, K)$.

3. Одна максимальна уніпотентна підгрупа групи $\boldsymbol{GL(n, K)}$.

Лема 4. *Відображення $\varphi \colon X \to \overline{X}$ задає епіморфізм із $M(n, K)$ в $M(n, K/\operatorname{rad} K)$. Для довільної матриці $X \in M(n, K)$ матриця $\overline{X}$ є оборотною (уніпотентною) тоді і тільки тоді, коли X — оборотна (уніпотентна) матриця.*

Доведення. Дійсно, сюр'єктивність та гомоморфна властивість φ очевидні. Легко бачити (див., наприклад, [12, с. 118], вправа 10.25 (2)), що ядро $M(n, \operatorname{rad} K)$ гомоморфізму φ — двосторонній ідеал кільця $M(n, K)$, що складається з нільпотентних матриць. Тоді для довільної матриці $X \in M(n, K)$ матриця $\overline{X}$ є оборотною (уніпотентною) тоді і тільки тоді, коли X — оборотна (уніпотентна) матриця.

Теорема 2. *Нехай K — комутативне кільце.*

$$P = \big\{X \in M(n, K) \;\big|\; \overline{X} \in UT(n, K/\operatorname{rad} K)\big\}$$

є максимальною уніпотентною підгрупою групи $GL(n, K)$.

Доведення. За теоремою 1 $UT(n, K/\operatorname{rad} K)$ є максимальною унiпотентною пiдгрупою групи $GL(n, K/\operatorname{rad} K)$. За лемою 4 $P \subset GL(n, K)$. Крiм того, $\varphi\colon X \to \overline{X}$ можна розглядати як епiморфiзм груп $GL(n, K) \to GL(n, K/\operatorname{rad} K)$, який зберiгає властивiсть унiпотентностi матриць. Тому $P = \varphi^{-1}(UT(n, K/\operatorname{rad} K))$ є максимальною унiпотентною пiдгрупою групи $GL(n, K)$.

4. Одна максимальна унiпотентна пiдгрупа групи $\boldsymbol{SL(n, K)}$. Позначимо через $\operatorname{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ дiагональну матрицю порядку n з дiагональними елементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Теорема 3. *Нехай K — комутативне кiльце i*

$$P = \big\{X \in M(n, K) \bigm| \overline{X} \in UT(n, K/\operatorname{rad} K)\big\}.$$

Тодi $P \cap SL(n, K)$ є максимальною унiпотентною пiдгрупою групи $SL(n, K)$.

Доведення. За теоремою 2 P — максимальна унiпотентна пiдгрупа групи $GL(n, K)$. Зрозумiло, що $P_1 = P \cap SL(n, K)$ є унiпотентною пiдгрупою групи $SL(n, K)$. За лемою 4 $\varphi\colon X \to \overline{X}$ можна розглядати як епiморфiзм груп $GL(n, K) \to GL(n, K/\operatorname{rad} K)$. Крiм того,

$$\varphi(P_1) \subset \varphi(P) = UT(n, K/\operatorname{rad} K).$$

Нехай $\overline{X} \in UT(n, K/\operatorname{rad} K)$, де $X \in M(n, K)$. За лемою 4 $X \in GL(n, K)$. Розглянемо матрицю $X_1 = X \cdot \operatorname{diag}\big[\det X^{-1}, 1, \ldots, 1\big] \in SL(n, K)$. Оскiльки $\overline{X} \in UT(n, K/\operatorname{rad} K)$, то $\det \overline{X} = \overline{1}$ i

$$\varphi(P_1) \ni \overline{X_1} = \overline{X \cdot \operatorname{diag}\big[\det X^{-1}, 1, \ldots, 1\big]} = \overline{X} \cdot \operatorname{diag}\big[\det \overline{X}^{-1}, \overline{1}, \ldots, \overline{1}\,\big] = \overline{X}.$$

Отже, $\varphi(P_1) \supset UT(n, K/\operatorname{rad} K)$ i $\varphi(P_1) = UT(n, K/\operatorname{rad} K)$. Якщо P_2 — унiпотентна пiдгрупа групи $SL(n, K)$, $P_1 \subset P_2$, то за лемою 4 $\varphi(P_2)$ — унiпотентна пiдгрупа групи $GL(n, K)$. Оскiльки вона мiстить $\varphi(P_1) = UT(n, K/\operatorname{rad} K)$, яка є максимальною унiпотентною пiдгрупою групи $GL(n, K/\operatorname{rad} K)$, то $\varphi(P_2) = UT(n, K/\operatorname{rad} K)$. Отже,

$$P_1 = P \cap SL(n, K) = \varphi^{-1}(UT(n/\operatorname{rad} K)) \cap SL(n, K) \supset \varphi^{-1}(\varphi(P_2)) \cap SL(n, K) \supset P_2.$$

Таким чином, P_1 — максимальна унiпотентна пiдгрупа групи $SL(n, K)$.

5. Про максимальнi унiпотентнi пiдгрупи груп $\boldsymbol{GL(n, K)}$ та $\boldsymbol{SL(n, K)}$.

Теорема 4 [11]. *Нехай K — комутативне кiльце. Якщо $K/\operatorname{rad} K$ є скiнченною прямою сумою областей Безу, то будь-яка максимальна унiпотентна пiдгрупа групи $GL(n, K)$ спряжена до групи $P = \big\{X \in M(n, K) \bigm| \overline{X} \in UT(n, K/\operatorname{rad} K)\big\}$.*

Твердження 1. *Нехай K — комутативне кiльце. Якщо максимальнi унiпотентнi пiдгрупи групи $GL(n, K)$ попарно спряженi, то будь-яка максимальна унiпотентна пiдгрупа групи $SL(n, K)$ спряжена до групи $P \cap SL(n, K)$, де $P = \big\{X \in M(n, K) \bigm| \overline{X} \in UT(n, K/\operatorname{rad} K)\big\}$.*

Доведення. Оскiльки максимальнi унiпотентнi пiдгрупи групи $GL(n, K)$ попарно спряженi, то за теоремою 2 будь-яка максимальна унiпотентна пiдгрупа групи $GL(n, K)$ спряжена до $P = \big\{X \in M(n, K) \bigm| \overline{X} \in UT(n, K/\operatorname{rad} K)\big\}$. Нехай Q_1 — деяка максимальна унiпотентна пiдгрупа групи $SL(n, K)$. Вона також є унiпотентною пiдгрупою групи $GL(n, K)$ i, отже, спряженою до деякої пiдгрупи Q_2 групи P. Тобто для деякої $C \in GL(n, K)$ $C^{-1}Q_1C \subset P = \big\{X \in M(n, K) \bigm| \overline{X} \in UT(n, K/\operatorname{rad} K)\big\}$. Тодi

$$\big(C \operatorname{diag}\big[\det C^{-1}, 1, \ldots, 1\big]\big)^{-1} Q_1 C \operatorname{diag}\big[\det C^{-1}, 1, \ldots, 1\big] \subset$$

$$\subset \operatorname{diag}\big[\det C, 1, \ldots, 1\big] C^{-1} Q_1 C \operatorname{diag}\big[\det C^{-1}, 1, \ldots, 1\big] \subset$$
$$\subset \operatorname{diag}\big[\det C, 1, \ldots, 1\big] P \operatorname{diag}\big[\det C^{-1}, 1, \ldots, 1\big].$$

Однак якщо $X \in P$, то $\overline{X} \in UT(n, K/\operatorname{rad} K)$ і

$$\overline{\operatorname{diag}[\det C, 1, \ldots, 1] \cdot X \cdot \operatorname{diag}\big[\det C^{-1}, 1, \ldots, 1\big]} =$$
$$= \operatorname{diag}\big[\det \overline{C}, \overline{1}, \ldots, \overline{1}\,\big] \cdot \overline{X} \cdot \operatorname{diag}\big[\det \overline{C}^{-1}, \overline{1}, \ldots, \overline{1}\,\big] \in$$
$$\in \operatorname{diag}\big[\det \overline{C}, \overline{1}, \ldots, \overline{1}\,\big] \cdot UT(n, K/\operatorname{rad} K) \cdot \operatorname{diag}\big[\det \overline{C}^{-1}, \overline{1}, \ldots, \overline{1}\,\big] = UT(n, K/\operatorname{rad} K),$$

тобто

$$Q_3 = \big(C \operatorname{diag}\big[\det C^{-1}, 1, \ldots, 1\big]\big)^{-1} Q_1 C \operatorname{diag}\big[\det C^{-1}, 1, \ldots, 1\big] \subset P.$$

Оскільки

$$\det\big(C \operatorname{diag}\big[\det C^{-1}, 1, \ldots, 1\big]\big) = 1,$$

то Q_3 — підгрупа групи $P \cap SL(n, K)$, яка спряжена в $SL(n, K)$ з Q_1. Далі, оскільки Q_1, а отже й Q_3, — максимальна уніпотентна підгрупа групи $SL(n, K)$, $P \cap SL(n, K)$ — уніпотентна підгрупа групи $SL(n, K)$, то $Q_3 = P \cap SL(n, K)$, а Q_1 спряжена в $SL(n, K)$ з $P \cap SL(n, K)$.

З доведеного твердження та теореми 4 безпосередньо випливає така теорема.

Теорема 5. *Нехай K — комутативне кільце. Якщо $K/\operatorname{rad} K$ є скінченною прямою сумою областей Безу, то будь-яка максимальна уніпотентна підгрупа групи $SL(n, K)$ спряжена до групи $P_1 = P \cap SL(n, K)$, де $P = \big\{X \in M(n, K) \;\big|\; \overline{X} \in UT(n, K/\operatorname{rad} K)\big\}$.*

Прикладом комутативного кільця K такого, що $K/\operatorname{rad} K$ — скінченна пряма сума областей Безу, є кільце многочленів $\mathbb{Z}_{p^s}[x]$ та формальних степеневих рядів $\mathbb{Z}_{p^s}\big[[x]\big]$ від невідомої x з коефіцієнтами з кільця $\mathbb{Z}_{p^s}$ класів лишків за модулем p^s, де p — довільне просте число (а також скінченні прямі суми екземплярів таких кілець). Зрозуміло, що $\operatorname{rad} \mathbb{Z}_{p^s}[x] = \operatorname{rad} \mathbb{Z}_{p^s}\big[[x]\big] = \operatorname{rad} \mathbb{Z}_{p^s} = p\mathbb{Z}_{p^s}$, а фактор-кільця за первісними радикалами кілець $\mathbb{Z}_{p^s}[x]$, $\mathbb{Z}_{p^s}\big[[x]\big]$ ізоморфні відповідно $\mathbb{Z}_p[x]$, $\mathbb{Z}_p\big[[x]\big]$ і є областями головних ідеалів (тобто кільцями Безу).

6. Про силовські p-підгрупи груп $GL(n, K)$ та $SL(n, K)$ над кільцем K характеристики p^s. У випадку, коли характеристика кільця K дорівнює p^s, де p — просте число, поняття уніпотентних підгруп лінійних груп над кільцем K поєднується з поняттям p-підгруп цих же груп.

***Наслідок* 1.** *Нехай K — комутативне кільце характеристики p^s, де p — просте число.*

$$P = \big\{X \in M(n, K) \;\big|\; \overline{X} \in UT(n, K/\operatorname{rad} K)\big\}$$

є силовською p-підгрупою групи $GL(n, K)$.

***Наслідок* 2.** *Нехай K — комутативне кільце характеристики p^s, де p — просте число. Якщо $K/\operatorname{rad} K$ є скінченною прямою сумою областей Безу, то будь-яка силовська p-підгрупа групи $GL(n, K)$ спряжена до групи $P = \big\{X \in M(n, K) \;\big|\; \overline{X} \in UT(n, K/\operatorname{rad} K)\big\}$.*

***Наслідок* 3.** *Нехай K — комутативне кільце характеристики p^s, де p — просте число, і*

$$P = \big\{X \in M(n, K) \;\big|\; \overline{X} \in UT(n, K/\operatorname{rad} K)\big\}.$$

Тоді $P \cap SL(n, K)$ є силовською p-підгрупою групи $SL(n, K)$.

***Наслідок* 4.** *Нехай* K *— комутативне кільце характеристики* p^s, *де* p *— просте число. Якщо* $K/\operatorname{rad}K$ *є скінченною прямою сумою областей Безу, то будь-яка силовська* p*-підгрупа групи* $SL(n,K)$ *спряжена до групи* $P\cap SL(n,K)$, *де* $P=\big\{X\in M(n,K)\;\big|\;\overline{X}\in\in UT(n,K/\operatorname{rad}K)\big\}$.

Література

1. *Супруненко Д. А.* Группы матриц. – М.: Наука, 1972. – 352 с.
2. *Мальцев А. И.* О некоторых классах бесконечных разрешимых групп // Мат. сб. – 1951. – **28**. – С. 567 – 588.
3. *Kolchin E. R.* On certain concepts in the theory of algebraic matrix groups // Ann. Math. – 1948. – **49**. – P. 774 – 789.
4. *Platonov V. P., Potapchik A.* New combinatorial properties of linear groups // J. Algebra. – 2001. – **235**, № 1. – P. 399 – 415.
5. *Тавгень О. И., Синьсун Я.* Унипотентность образа представления $F_2(x,y)$ в $GL(6,C)$ при условии отображения примитивных элементов в унипотентные матрицы // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. – 2010. – № 2. – С. 114 – 119.
6. *McNinch G.* Abelian unipotent subgroups of reductive groups // J. Pure and Appl. Algebra. – 2002. – **167**, № 2-3. – P. 269 – 300.
7. *Simion I. I.* Witt overgroups for unipotent elements in exceptional algebraic groups of bad characteristic // Mathematica. – 2015. – **57 (80)**, № 1-2. – P. 104 – 116.
8. *Петечук В. М.* О триангулируемости некоторых унипотентных матричных групп над телами // Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. наук. – 1987. – № 6. – С. 44 – 46.
9. *Гудивок П. М., Погориляк Е. Я.* О модулярных представлениях конечных групп над областями целостности // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1990. – **183**. – С. 78 – 86.
10. *Гудивок П. М., Рудько В. П.* О силовских подгруппах полной линейной группы над областями целостности // Доп. НАН України. – 1995. – № 8. – С. 5 – 7.
11. *Tylyshchak A. A.* On maximal unipotent subgroups of the general linear group over commutative rings // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2010. – № 3. – С. 115 – 117.
12. *Lam T. Y.* Exercises in classical ring theory // Problem Books in Mathematics. – New York: Springer-Verlag, 1995. – 288 p.

Одержано 09.09.18,
після доопрацювання — 11.03.19