УДК 517.642

Э. А. Бакирова (Ин-т математики и мат. моделирования; Ин-т информ. и вычислит. технологий, Алматы, Казахстан),
Н. Б. Искакова (Ин-т информ. и вычислит. технологий; Казах. нац. пед. ун-т им. Абая, Алматы),
А. Т. Асанова (Ин-т математики и мат. моделирования; Ин-т информ. и вычислит. технологий, Алматы, Казахстан)

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ*

We propose a numerical method for the solution of linear boundary-value problem for system of integrodifferential equations. This method is based on the approximation of the integral term by a cubic spline and reduction of the original problem to a linear boundary-value problem for a system of loaded differential equations. We also propose new algorithms for finding the numerical solution and a method for the construction of approximate solution to the approximating boundary-value problem.

Запропоновано чисельний метод розв'язання лінійної крайової задачі для системи інтегро-диференціальних рівнянь. Метод ґрунтується на апроксимації інтегрального члена кубічним сплайном і зведенні початкової задачі до лінійної крайової задачі для системи навантажених диференціальних рівнянь. Крім того, запропоновано алгоритми знаходження числового розв'язку і спосіб побудови наближеного розв'язку апроксимуючої крайової задачі.

1. Введение. Постановка задачи. Рассматривается линейная двухточечная краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T K(t,s)x(s)ds + f(t), \qquad x \in R^n, \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in R^n, \tag{2}$$

где $x(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\big)$ — неизвестная функция, $(n \times n)$-матрицы $A(t)$ и $K(t,s)$ непрерывны соответственно на $[0,T]$ и $[0,T] \times [0,T]$, n-вектор-функция $f(t)$ непрерывна на $[0,T]$, B и C — постоянные $(n \times n)$-матрицы.

Решением задачи (1), (2) является непрерывная на $[0,T]$, непрерывно дифференцируемая на $(0,T)$ вектор-функция $x(t)$, удовлетворяющая системе интегро-дифференциальных уравнений (1) и краевому условию (2).

Краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений встречаются во многих разделах прикладной математики, являясь математическими моделями различных процессов механики, физики, химии, техники, биологии, медицины, экономики и др. Вопросы разрешимости краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений и построения методов нахождения их решения изучены в работах [1 – 11]. Для задач практики важное значение имеют построение алгоритмов нахождения приближенных решений и их численная реализация. В связи с этим при решении различных задач для дифференциальных, функционально-дифференциальных и

* Частично поддержана Министерством образования и науки Республики Казахстан (проекты №AP05132455, AP05132486 и AP05131220).

интегро-дифференциальных уравнений особую важность приобретают сплайны различных типов, методы сплайн-коллокаций и проекционно-итеративные методы. Различные аспекты применения методов сплайн-коллокаций в задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений исследовались в [12 – 14]. Сведение краевой задачи к интегральному уравнению и применению к ее решению проекционно-итеративных методов рассматривались в [15]. Использование метода сплайн-коллокаций в краевых задачах для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, функционально-дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений исследовалось в [16 – 19]. В работе [20] предложен численный метод решения краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом второго порядка, основанный на аппроксимации решения кубическими сплайнами.

В работе [8] для исследования вопросов разрешимости краевой задачи (1), (2) предложен метод, основанный на разбиении интервала $[0,T]$ с шагом $h>0\colon Nh=T$ и введении дополнительных параметров. Малость шага разбиения обеспечивает однозначную разрешимость промежуточной задачи метода — специальной задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости краевой задачи (1), (2). В [9] этот метод обобщается на случай произвольного разбиения интервала. Введено определение регулярного разбиения $\triangle_N$ и показано, что из регулярности разбиения следует однозначная разрешимость специальной задачи Коши, и наоборот. В терминах матрицы $Q_*(\triangle_N)$, составленной с помощью фундаментальной матрицы дифференциальной части, установлены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи. На основе этих методов построены алгоритмы нахождения приближенного и численного решения краевой задачи (1), (2), которые предложены в работе [11].

Настоящая статья посвящена разработке численно-приближенного метода решения задачи (1), (2), основанного на применении сплайнов и метода параметризации [21]. Интегральный член системы интегро-дифференциальных уравнений (1) аппроксимируется кубическим сплайном, и краевая задача (1), (2) заменяется линейной краевой задачей для системы нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений. На основе метода параметризации для аппроксимирующей краевой задачи предлагаются алгоритм нахождения ее численного решения и способ построения приближенного решения. Результаты статьи проиллюстрированы на численном решении двухточечной краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений.

Отрезок $[0,T]$ разобьем на части с шагом $h_0>0\colon mh_0=T\ (m\in\mathbb{N})\colon [0,T]=\bigcup\limits_{r=1}^{m}[t_{r-1},t_r]$, где $t_0=0,\ t_r=rh_0,\ r=\overline{1,m}$.

Пусть $x_r(t)$ — сужение функции $x(t)$ на r-й интервал $[t_{r-1},t_r]$, т. е. $x(t)=x_r(t),\ t\in\in[t_{r-1},t_r],\ r=\overline{1,m}$.

Задача (1), (2) сводится к эквивалентной многоточечной краевой задаче

$$\frac{dx_r}{dt}=A(t)x_r+\sum_{r=1}^{m}\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r}K(t,s)x_r(s)ds+f(t),\qquad t\in[t_{r-1},t_r],\quad r=\overline{1,m},\tag{3}$$

$$Bx_1(0)+Cx_m(T)=d,\quad d\in R^n,\tag{4}$$

$$x_s(t_s) = x_{s+1}(t_s), \qquad s = \overline{1, m-1}, \tag{5}$$

где (5) — условия склеивания решения во внутренних точках разбиения интервала $(0, T)$.

2. Сплайн-аппроксимация интегрального члена системы интегро-дифференциальных уравнений. Возьмем $h > 0\colon Nh = h_0,\ N \in \mathbb{N}$, и на отрезке $[t_{r-1}, t_r],\ r = \overline{1, m}$, заменим функцию $K(t, s)x_r(s)$ кубической сплайн-функцией [22] по переменной s.

Для этого на отрезке $[t_{r-1}, t_r],\ r = \overline{1, m}$, введем сетку

$$t_{r-1} = t_{r,0} < t_{r,1} < t_{r,2} < \ldots < t_{r,N-1} < t_{r,N} = t_r, \quad r = \overline{1, m},$$

где $t_{1,0} = 0,\ t_{r,0} = t_{r-1,N},\ r = \overline{2, m},\ t_{m,N} = T,\ h = t_{r,i} - t_{r,i-1}$, и обозначим

$$\widehat{K}_{r,i}(t) = K(t, t_{r,i})x_r(t_{r,i}), \qquad r = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, N}.$$

На каждом из полученных отрезков $[t_{r,i-1}, t_{r,i}],\ r = \overline{1, m},\ i = 1, \ldots, N$, будем искать функции $S_r(t, s) = S_{r,i}(t, s)$ в виде многочлена третьей степени

$$S_{r,i}(t, s) = \widehat{a}_{r,i} + \widehat{b}_{r,i}(s - t_{r,i}) + \frac{\widehat{c}_{r,i}}{2}(s - t_{r,i})^2 + \frac{\widehat{d}_{r,i}}{6}(s - t_{r,i})^3, \tag{6}$$

$$t_{r,i-1} \le s \le t_{r,i}, \qquad r = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, N},$$

где $\widehat{a}_{r,i},\ \widehat{b}_{r,i},\ \widehat{c}_{r,i},\ \widehat{d}_{r,i}$ — коэффициенты, определяемые по формулам

$$\widehat{c}_{r,i-1} + 4\widehat{c}_{r,i} + \widehat{c}_{r,i+1} = \frac{6}{h^2}\Big(\widehat{K}_{r,i-1}(t) - 2\widehat{K}_{r,i}(t) + \widehat{K}_{r,i+1}(t)\Big), \qquad r = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$\widehat{a}_{r,i} = \widehat{K}_{r,i}(t), \qquad r = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\widehat{d}_{r,i} = \frac{\widehat{c}_{r,i} - \widehat{c}_{r,i-1}}{h}, \qquad r = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, N}, \tag{7}$$

$$\widehat{b}_{r,i} = \frac{h}{2}\widehat{c}_{r,i} - \frac{h^2}{6}\widehat{d}_{r,i} + \frac{\widehat{K}_{r,i}(t) - \widehat{K}_{r,i-1}(t)}{h}, \qquad r = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, N},$$

причем $\widehat{c}_{r,0} = \widehat{c}_{r,N} = 0,\ \widehat{K}_{1,0}(t) = K(t, 0)x_1(0),\ \widehat{K}_{r,0}(t) = K(t, t_{r-1,N})x_r(t_{r-1,N}),\ r = \overline{2, m}.$

Интегрируя функции $S_{r,i}(t, s)$ на отрезке $[t_{r,i-1}, t_{r,i}],\ r = \overline{1, m},\ i = 1, \ldots, N$, и учитывая формулы (7), получаем

$$\int\limits_{t_{r,i-1}}^{t_{r,i}} S_{r,i}(t, s)ds = \sum_{j=1}^{N+1} M_j^{(r)} K(t, t_{r,j-1})x_r(t_{r,j-1}), \qquad r = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, N},$$

где

$$M_j^{(r)} = \begin{cases} \dfrac{h}{2}\left(1 - \sum\limits_{i=1}^{N-1} p_{i,j}\right) & \text{при} \quad j = 1, \quad j = N+1, \quad r = \overline{1, m}, \\ \dfrac{h}{2}\left(2 - \sum\limits_{i=1}^{N-1} p_{i,j}\right) & \text{при} \quad j = \overline{2, N}, \quad r = \overline{1, m}, \end{cases} \tag{8}$$

а $p_{i,j},\ i = \overline{1, N-1},\ j = \overline{1, N+1},$ — элементы матрицы, которая определяется как произведение квадратной матрицы $(N-1)$-го порядка и прямоугольной матрицы размерности $(N-1)\times(N+1)$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда задача (1), (2) аппроксимируется двухточечной краевой задачей для системы нагруженных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_{r,i}}{dt} = A(t)x_{r,i} + M_1^{(1)}K(t, t_{1,0})x_{1,1}(t_{1,0}) +$$

$$+ \sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{N-1} M_{j+1}^{(r)}K(t, t_{r,j})x_{r,j+1}(t_{r,j}) +$$

$$+ \sum_{r=1}^{m-1}(M_{N+1}^{(r)} + M_1^{(r+1)})K(t, t_{r,N})x_{r+1,1}(t_{r,N}) +$$

$$+ M_{N+1}^{(m)}K(t, t_{m,N})x_{m,N}(t_{m,N}) + f(t), \quad t \in [t_{r,i-1}, t_{r,i}], \qquad r = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,N}, \tag{9}$$

$$Bx_{1,1}(0) + Cx_{m,N}(T) = d, \quad d \in R^n, \tag{10}$$

$$x_{r,i}(t_{r,i}) = x_{r,i+1}(t_{r,i}), \qquad r = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1, N-1}, \tag{11}$$

$$x_{r,N}(t_{r,N}) = x_{r+1,1}(t_{r,N}), \quad r = \overline{1, m-1}, \tag{12}$$

$$x_{m,N}(T) = \lim_{t\to T-0} x_{m,N}(t), \tag{13}$$

где (11), (12) — условия склеивания решения во внутренних точках разбиения интервала $(0,T)$, (13) — условие непрерывности в правом конце отрезка $[0,T]$.

В задаче (9) – (13) функции $x_{r,i}(t),\ r = \overline{1,m},\ i = \overline{1,N}$, являются сужениями функций $x_r(t)$ на интервалах $[t_{r,i-1}, t_{r,i}]$.

Решением задачи (9) – (13) является система функций $\big(x_{1,1}^*(t), x_{1,2}^*(t), \ldots, x_{m,N}^*(t)\big)$, удовлетворяющая системе нагруженных дифференциальных уравнений (9), краевому условию (10), условиям непрерывности (11) – (13).

В работе [6] интегральный член системы (1) был аппроксимирован суммой

$$\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{(i-1)h}^{ih} K(t,s)ds x\big[(i-1)h\big]$$

и задача была сведена к линейной краевой задаче для системы нагруженных дифференциальных уравнений. Установлена взаимосвязь между корректной разрешимостью исходной задачи (1), (2) и аппроксимирующей ее краевой задачи. Получены оценки разности их решений. Аналогично можно установить взаимосвязь между корректной разрешимостью рассматриваемой задачи (1), (2) и построенной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений (9) – (13). В работе [23] для аппроксимации интегрального слагаемого системы (1) была использована формула Симпсона. Установлена оценка разности точного и приближенного решений линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения (1), (2) и аппроксимирующей задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений.

Численные методы решения краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений рассматривались в работах [24, 25].

3. Алгоритмы нахождения решения линейной краевой задачи для аппроксимирующей системы нагруженных дифференциальных уравнений. Введем дополнительные параметры $\lambda_{r,i} = x_{r,i}(t_{r,i-1}),\ r = \overline{1,m},\ i = \overline{1,N},\ \lambda_{m,N+1} = x_{m,N}(T)$ и на каждом интервале $[t_{r,i-1}, t_{r,i}]$ выполним замену функции $u_{r,i}(t) = x_{r,i} - \lambda_{r,i}$. Тогда краевая задача (9) – (13) сведется к эквивалентной многоточечной краевой задаче с параметрами

$$\frac{du_{r,i}}{dt} = A(t)(u_{r,i} + \lambda_{r,i}) + \sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{N+1} \widetilde{K}_{r,j}(t)\lambda_{r,j} + f(t), \quad t \in [t_{r,i-1}, t_{r,i}], \tag{14}$$

$$u_{r,i}(t_{r,i-1}) = 0, \qquad r = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,N}, \tag{15}$$

$$B\lambda_{1,1} + C\lambda_{m,N+1} = d, \quad d \in R^n, \tag{16}$$

$$\lambda_{r,i} + u_{r,i}(t_{r,i}) = \lambda_{r,i+1}, \qquad r = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,N-1}, \tag{17}$$

$$\lambda_{r,N} + u_{r,N}(t_{r,N}) = \lambda_{r+1,1}, \quad r = \overline{1,m-1}, \tag{18}$$

$$\lambda_{m,N} + \lim_{t\to T-0} u_{m,N}(t) = \lambda_{m,N+1}, \tag{19}$$

где

$$\widetilde{K}_{r,j}(t) = \begin{cases} M_j^{(r)} K(t, t_{r,j-1}) & \text{при} \quad j = \overline{1,N-1}, \quad j = N+1, \quad r = \overline{1,m}, \\ \left(M_{j+1}^{(r)} + M_j^{(r+1)}\right) K(t, t_{r,j}) & \text{при} \quad j = N, \quad r = \overline{1,m-1}. \end{cases} \tag{20}$$

Задачи (9) – (13) и (14) – (19) эквивалентны. Если $(x^*_{1,1}(t), x^*_{1,2}(t), \ldots, x^*_{m,N}(t))$ — решение задачи (9) – (13), то пара $(\lambda^*, u^*[t])$ с элементами

$$\lambda^* = (\lambda^*_{1,1}, \lambda^*_{1,2}, \ldots, \lambda^*_{m,N+1}), \qquad \lambda^*_{r,i} = x^*_{r,i}(t_{r,i-1}), \quad r = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,N},$$

$$\lambda^*_{m,N+1} = x^*_{m,N}(T), \qquad u^*[t] = (u^*_{1,1}(t), u^*_{1,2}(t), \ldots, u^*_{m,N}(t)),$$

$$u^*_{r,i}(t) = x^*_{r,i}(t) - x^*_{r,i}(t_{r,i-1}), \qquad t \in [t_{r,i-1}, t_{r,i}], \quad r = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,N},$$

будет решением задачи (14) – (19), и наоборот, если пара $\left(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}[t]\right)$, где $\widetilde{\lambda} = \left(\widetilde{\lambda}_{1,1}, \widetilde{\lambda}_{1,2}, \ldots \ldots, \widetilde{\lambda}_{m,N+1}\right)$, $\widetilde{u}[t] = \left(\widetilde{u}_{1,1}(t), \widetilde{u}_{1,2}(t), \ldots, \widetilde{u}_{m,N}(t)\right)$ — решение задачи (14) – (19), то $(\widetilde{x}_{1,1}(t), \widetilde{x}_{1,2}(t), \ldots, \widetilde{x}_{m,N}(t))$, определяемое равенствами

$$\widetilde{x}_{r,i}(t) = \widetilde{\lambda}_{r,i} + \widetilde{u}_{r,i}(t), \qquad t \in [t_{r,i-1}, t_{r,i}], \quad r = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,N}, \qquad \widetilde{x}_{m,N}(T) = \widetilde{\lambda}_{m,N+1},$$

удовлетворяет задаче (9) – (13).

В работе [26] вопросы разрешимости и способы нахождения решений двух- и многоточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами исследовались численно-аналитическим методом.

Использование фундаментальной матрицы $X(t)$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \in [0,T],$$

позволяет получить единственное решение задачи Коши (14), (15) для фиксированных значений параметров

$$u_{r,i}(t) = X(t) \int\limits_{t_{r,i-1}}^{t} X^{-1}(\tau) \left[A(\tau)\lambda_{r,i} + \sum_{r=1}^{m} \sum_{j=1}^{N+1} \widetilde{K}_{r,j}(\tau)\lambda_{r,j} + f(\tau) \right] d\tau,$$

где $t \in [t_{r,i-1}, t_{r,i}],\ r = \overline{1,m},\ i = \overline{1,N}$.

Введем обозначения

$$D_{r,i}(h) = X(t_{r,i}) \int\limits_{t_{r,i-1}}^{t_{r,i}} X^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau, \qquad r = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,N}, \tag{21}$$

$$H_{r,i}^{k,j}(h) = X(t_{r,i}) \int\limits_{t_{r,i-1}}^{t_{r,i}} X^{-1}(\tau)\widetilde{K}_{r,j}(\tau)d\tau, \qquad k,r = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,N}, \quad j = \overline{1,N+1}, \tag{22}$$

$$F_{r,i}(h) = X(t_{r,i}) \int\limits_{t_{r,i-1}}^{t_{r,i}} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau, \qquad r = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,N}. \tag{23}$$

Учитывая обозначения (21) – (23), определяем $u_{r,i}(t_{r,i}),\ r = \overline{1,m},\ i = \overline{1,N},\ \lim_{t\to T-0} u_{m,N}(t)$, и подставляя их в (16) – (19), получаем систему уравнений относительно неизвестных параметров $\lambda_{r,i},\ r = \overline{1,m},\ i = \overline{1,N+1}$:

$$B\lambda_{1,1} + C\lambda_{m,N+1} = d, \tag{24}$$

$$\big(I + D_{r,i}(h)\big)\lambda_{r,i} + H_{r,i}^{1,1}(h)\lambda_{1,1} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{N-1} H_{r,i}^{k,j+1}(h)\lambda_{k,j+1} + H_{r,i}^{m,N+1}(h)\lambda_{m,N+1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \big(H_{r,i}^{k,N+1}(h) + H_{r,i}^{k+1,1}(h)\big)\lambda_{k+1,1} - \lambda_{r,i+1} = -F_{r,i}(h), \quad r = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,N-1}, \tag{25}$$

$$(I + D_{r,N}(h))\lambda_{r,N} + H_{r,N}^{1,1}(h)\lambda_{1,1} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{N-1} H_{r,N}^{k,j+1}(h)\lambda_{k,j+1} + H_{r,N}^{m,N+1}(h)\lambda_{m,N+1} +$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\big(H_{r,N}^{k,N+1}(h)+H_{r,i}^{k+1,1}(h)\big)\lambda_{k+1,1}-\lambda_{r+1,1}=-F_{r,N}(h),\quad r=\overline{1,m}, \tag{26}$$

$$\big(I+D_{m,N}(h)\big)\lambda_{m,N}+H_{m,N}^{1,1}(h)\lambda_{1,1}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{N-1}H_{m,N}^{k,j+1}(h)\lambda_{k,j+1}+H_{m,N}^{m,N+1}(h)\lambda_{m,N+1}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\big(H_{m,N}^{k,N+1}(h)+H_{m,i}^{k+1,1}(h)\big)\lambda_{k+1,1}-\lambda_{m,N+1}=-F_{m,N}(h). \tag{27}$$

Матрицу, соответствующую левой части системы уравнений (24)–(27), обозначим через $Q_*(h)$, а саму систему запишем в виде

$$Q_*(h)\cdot\lambda=-F_*(h),\quad \lambda\in R^{nm(N+1)}, \tag{28}$$

где $F_*(h)=\Big(-d,F_{1,1}(0),F_{1,2}(t_{1,1}),F_{1,3}(t_{1,2}),\ldots,F_{m,N}(t_{m,N-1})\Big)'\in R^{nm(N+1)}$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма. *Пусть* $m\in\mathbb{N}$ *и* $N\in\mathbb{N}$ *такие, что* $mh_0=T,\ Nh=h_0$. *Тогда*:

а) *вектор* $\lambda^*=(\lambda^*_{1,1},\lambda^*_{1,2},\ldots,\lambda^*_{m,N+1})\in R^{nm(N+1)}$, *составленный из значений решения* $x^*_{r,i}(t)$ *задачи* (9)–(13) *в точках разбиения интервала* $\lambda^*_{r,i}=x^*_{r,i}(t_{r,i-1}),\ r=\overline{1,m},\ i=\overline{1,N}$, $\lambda^*_{m,N+1}=x^*_{m,N}(T)$, *удовлетворяет системе* (28);

б) *если* $\widetilde\lambda=(\widetilde\lambda_{1,1},\widetilde\lambda_{1,2},\ldots,\widetilde\lambda_{m,N+1})\in R^{nm(N+1)}$ *является решением системы уравнений* (28), *а система функций* $\widetilde u[t]=(\widetilde u_{1,1}(t),\widetilde u_{1,2}(t),\ldots,\widetilde u_{m,N}(t))$ — *решением задачи Коши* (14), (15) *при* $\lambda_{r,i}=\widetilde\lambda_{r,i},\ r=\overline{1,m},\ i=\overline{1,N},\ \lambda_{m,N+1}=\widetilde\lambda_{m,N+1}$, *то функции* $\widetilde x_{r,i}(t)$, *определяемые равенствами* $\widetilde x_{r,i}(t)=\widetilde\lambda_{r,i}+\widetilde u_{r,i}(t),\ t\in[t_{r,i-1},t_{r,i}),\ r=\overline{1,m},\ i=\overline{1,N},\ \widetilde x_{m,N}(T)=\widetilde\lambda_{m,N+1}$, *являются решениями задачи* (9)–(13).

Доказательство. а) Пусть $(x^*_{1,1}(t),x^*_{1,2}(t),\ldots,x^*_{m,N}(t))$ — решение задачи (9)–(13). Тогда в силу эквивалентности задач (9)–(13) и (14)–(19) пара $\big[(\lambda^*_{1,1},\lambda^*_{1,2},\ldots,\lambda^*_{m,N+1}),(u^*_{1,1}(t),u^*_{1,2}(t),\ldots,u^*_{m,N}(t))\big]$ с элементами $\lambda^*_{r,i}=x^*_{r,i}(t_{r,i-1}),\ \lambda^*_{m,N+1}=x^*_{m,N}(T),\ u^*_{r,i}(t)=x^*_{r,i}(t)-x^*_{r,i}(t_{r,i}),\ t\in[t_{r,i-1},t_{r,i}),\ r=\overline{1,m},\ i=\overline{1,N}$, будет решением задачи (14)–(19). Учитывая предположения $mh_0=T,\ Nh=h_0,\ m\in\mathbb{N},\ N\in\mathbb{N}$, и повторяя приведенные выше рассуждения, получаем, что $\lambda^*=(\lambda^*_{1,1},\lambda^*_{1,2},\ldots,\lambda^*_{m,N+1})\in R^{nm(N+1)}$ удовлетворяет системе уравнений (28).

б) Пусть $\widetilde\lambda=(\widetilde\lambda_{1,1},\widetilde\lambda_{1,2},\ldots,\widetilde\lambda_{m,N+1})\in R^{nm(N+1)}$ является решением системы уравнений (28).

Задача Коши (14), (15) при любом $\lambda=(\lambda_{1,1},\lambda_{1,2},\ldots,\lambda_{m,N+1})$ имеет единственное решение. Ее решение при $\lambda=\widetilde\lambda=(\widetilde\lambda_{1,1},\widetilde\lambda_{1,2},\ldots,\widetilde\lambda_{m,N+1})$ обозначим через $\widetilde u[t]=\big(\widetilde u_{1,1}(t),\widetilde u_{1,2}(t),\ldots,\widetilde u_{m,N}(t)\big)$, т. е.

$$\widetilde u_{r,i}(t)=X(t)\int\limits_{t_{r,i-1}}^{t}X^{-1}(\tau)\left[A(\tau)\widetilde\lambda_{r,i}+\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{N+1}\widetilde K_{r,j}(\tau)\widetilde\lambda_{r,j}+f(\tau)\right]d\tau, \tag{29}$$

где $t\in[t_{r,i-1},t_{r,i}],\ r=\overline{1,m},\ i=\overline{1,N}$.

Покажем, что пара $\big(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}[t]\big)$ является решением задачи (14) – (19). Действительно, (14), (15) выполняются в силу выбора $\widetilde{u}[t]$ по $\widetilde{\lambda}$. Если $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_{1,1}, \widetilde{\lambda}_{1,2}, \ldots, \widetilde{\lambda}_{m,N+1})$ удовлетворяет системе (28), то для него справедливо и (25), т. е.

$$\big(I + D_{r,i}(h)\big)\widetilde{\lambda}_{r,i} + H_{r,i}^{1,1}(h)\widetilde{\lambda}_{1,1} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{N-1} H_{r,i}^{k,j+1}(h)\widetilde{\lambda}_{k,j+1} +$$

$$+ H_{r,i}^{m,N+1}(h)\widetilde{\lambda}_{m,N+1} + \sum_{k=1}^{m-1}\big(H_{r,i}^{k,N+1}(h) + H_{r,i}^{k+1,1}(h)\big)\widetilde{\lambda}_{k+1,1} - \widetilde{\lambda}_{r,i+1} = -F_{r,i}(h),$$

$$r = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,N-1}.$$

Учитывая обозначения (21) – (23) и (20), последнее равенство записываем в виде

$$\widetilde{\lambda}_{r,i} + \left\{ X(t_{r,i}) \int\limits_{t_{r,i-1}}^{t_{r,i}} X^{-1}(\tau) \left[A(\tau)\widetilde{\lambda}_{r,i} + \sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{N+1} \widetilde{K}_{r,j}(\tau)\widetilde{\lambda}_{r,j} + f(\tau) \right] d\tau \right\} - \widetilde{\lambda}_{r,i+1} = 0. \tag{30}$$

Отсюда в силу равенства (29) выражение, содержащееся в фигурных скобках в (30), равно $\widetilde{u}_{r,i}(t_{r,i})$. Поэтому пара $\big(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}[t]\big)$ удовлетворяет условию (17). Аналогично устанавливается справедливость соотношений (18), (19).

Тогда функции $\widetilde{x}_{r,i}(t)$, построенные с помощью пары $\big[(\lambda_{1,1}^*, \lambda_{1,2}^*, \ldots, \lambda_{m,N+1}^*), (u_{1,1}^*(t), u_{1,2}^*(t), \ldots, u_{m,N}^*(t))\big]$, будут решением задачи (9) – (13).

Лемма доказана.

Используя данную лемму, можно установить, что обратимость матрицы $Q_*(h)$ системы уравнений (28) является необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости задачи (9) – (13).

Алгоритм нахождения решения аппроксимирующей краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений (14) – (19) основан на построении и решении системы (28). Для этого решаем задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений на подынтервалах

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + P(t), \qquad x(t_{r,i-1}) = 0, \quad t \in [t_{r,i-1}, t_{r,i}], \qquad r = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,N}. \tag{31}$$

Здесь $P(t)$ — либо $(n \times n)$-матрица, либо n-вектор, непрерывный на $[t_{r,i-1}, t_{r,i}]$, $r = \overline{1,m}$. Решением задачи (31) будет либо квадратная матрица, либо вектор размерности n.

Обозначим через $E_{*,r,i}(A(\cdot), P(\cdot), t)$ решение задачи Коши (14), (15) и

$$E_{*,r,i}(A(\cdot), P(\cdot), t) = X_{r,i}(t) \int\limits_{t_{r,i-1}}^{t} X_{r,i}^{-1}(\tau)P(\tau)d\tau, \quad t \in [t_{r,i-1}, t_{r,i}], \tag{32}$$

где $X_{r,i}(t)$ — фундаментальная матрица дифференциального уравнения на (r,i)-м интервале.

***Шаг* 1.** Пусть выбраны числа $m \in \mathbb{N}$ и $N \in \mathbb{N}$ такие, что $mh_0 = T$, $Nh = h_0$, где h_0 — шаг разбиения отрезка $[0,T]$, а h — внутренний шаг разбиения частичных отрезков $[t_{r-1}, t_r]$, $r = \overline{1,m}$.

Решая mN задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + A(t), \quad x(t_{r,i-1}) = 0, \quad t \in [t_{r,i-1}, t_{r,i}], \qquad r = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,N}, \tag{33}$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \widetilde{K}_{r,j}(t), \quad x(t_{r,i-1}) = 0, \quad t \in [t_{r,i-1}, t_{r,i}], \quad r = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,N}, \quad j = \overline{1,N+1}, \tag{34}$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad x(t_{r,i-1}) = 0, \qquad t \in [t_{r,i-1}, t_{r,i}], \quad r = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,N}, \tag{35}$$

получаем $E_{*,r,i}(A(\cdot), A(\cdot), t)$, $E_{*,r,i}(A(\cdot), \widetilde{K}_{r,j}(\cdot), t)$, $E_{*,r,i}(A(\cdot), f(\cdot), t)$, $r = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,N+1}$.

***Шаг* 2.** Составим систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров

$$Q_*(h) \cdot \lambda = -F_*(h), \quad \lambda \in R^{nm(N+1)}.$$

Здесь элементы матрицы $Q_*(h)\colon R^{nm(N+1)} \to R^{nm(N+1)}$ и вектора $F_*(h) \in R^{nm(N+1)}$ определяются равенствами (21)–(23), где вместо

$$X(t_{r,i}) \int\limits_{t_{r,i-1}}^{t_{r,i}} X^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau, \qquad X(t_{r,i}) \int\limits_{t_{r,i-1}}^{t_{r,i}} X^{-1}(\tau)\widetilde{K}_{r,j}(\tau)d\tau,$$

$$r = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,N}, \quad j = \overline{1,N+1}, \qquad X(t_{r,i}) \int\limits_{t_{r,i-1}}^{t_{r,i}} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$$

в силу (32) можно использовать $E_{*,r,i}\big(A(\cdot), A(\cdot), t\big)$, $E_{*,r,i}\big(A(\cdot), \widetilde{K}_{r,j}(\cdot), t\big)$ и $E_{*,r,i}(A(\cdot), f(\cdot), t)$, $r = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,N+1}$.

Решая систему (28), находим $\lambda^*_{r,i}$, $r = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,N}$. Тем самым мы получаем значения функции $x^*(t)$ в точках нагружения.

***Шаг* 3.** Значения функции $x^*(t)$ в остальных точках подынтервала $[t_{r,i-1}, t_{r,i}]$ определяются решением задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{r=1}^{m} \sum_{j=1}^{N+1} \widetilde{K}_{r,j}(t)\lambda^*_{r,j} + f(t), \qquad t \in [t_{r,i-1}, t_{r,i}],$$

$$x(t_{r,i-1}) = \lambda^*_{r,i}, \qquad r = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,N}.$$

4. Численный метод решения линейной краевой задачи для аппроксимирующей системы нагруженных дифференциальных уравнений и его сходимость. Как известно, фундаментальную матрицу удается построить не всегда, поэтому предлагается численная реализация алгоритма нахождения решения задачи (14)–(19). Далее мы будем предполагать, что матрица $A(t)$ и вектор-функция $f(t)$ непрерывно дифференцируемы до третьего порядка на $[0,T]$, матрица $K(t,s)$ имеет непрерывные частные производные по t до третьего порядка на $[0,T] \times [0,T]$. Тогда решение краевой задачи имеет непрерывные производные до четвертого порядка [22, с. 226]. Задачи Коши (33) – (35) будем решать методом Рунге – Кутта четвертого порядка. Для этого каждый интервал $[t_{r,i-1}, t_{r,i}]$, $r = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, N}$, разобьем на четные $\widetilde{N}$ части с шагом $\widetilde{h} = (t_{r,i} - t_{r,i-1})/\widetilde{N}$. Построив систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров

$$Q_*^{\widetilde{h}}(h)\lambda = -F_*^{\widetilde{h}}(h), \quad \lambda \in R^{nm(N+1)},$$

найдем $\lambda^{\widetilde{h}} = (\lambda_{1,1}^{\widetilde{h}}, \lambda_{1,2}^{\widetilde{h}}, \ldots, \lambda_{m,N}^{\widetilde{h}})$, являющиеся значениями решения задачи (14) – (19) в начальных точках подынтервалов, т. е. $x_{r,i}^{\widetilde{h}}(t_{r,i-1}) = \lambda_{r,i}^{\widetilde{h}}$, $r = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, N}$. Тем самым мы найдем значения численного решения $x_{r,i}^*(t)$ в начальных точках подынтервалов. Значения численного решения в остальных точках подынтервалов получим, вновь применив метод Рунге – Кутта четвертого порядка к задачам Коши вида

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + \sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{N+1} \widetilde{K}_{r,j}(t) \cdot \lambda_{r,j}^{\widetilde{h}} + f(t), \quad t \in [t_{r,i-1}, t_{r,i}],$$

$$z(t_{r,i-1}) = \lambda_{r,i}^{\widetilde{h}}, \qquad r = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Для построения приближенного решения линейной краевой задачи (14) – (19) используем сплайн-аппроксимацию. Функция $\widetilde{x}(t)$ интерполируется кубическим сплайном:

$$\widetilde{x}(t) = \widehat{a}_{r,i} + \widehat{b}_{r,i}(t - t_{r,i}) + \frac{\widehat{c}_{r,i}}{2}(t - t_{r,i})^2 + \frac{\widehat{d}_{r,i}}{6}(t - t_{r,i})^3,$$

$$t_{r,i-1} \le t \le t_{r,i}, \qquad r = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, N},$$

где $\widehat{a}_{r,i}, \widehat{b}_{r,i}, \widehat{c}_{r,i}, \widehat{d}_{r,i}$ — коэффициенты, определяемые по формулам

$$\widehat{c}_{r,i-1} + 4\widehat{c}_{r,i} + \widehat{c}_{r,i+1} = \frac{6}{h^2}\Big(\lambda_{r,i-1}^* - 2\lambda_{r,i}^* + \lambda_{r,i+1}^*\Big), \qquad r = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$\widehat{a}_{r,i} = \lambda_{r,i}^*, \qquad r = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\widehat{d}_{r,i} = \frac{\widehat{c}_{r,i} - \widehat{c}_{r,i-1}}{h}, \qquad r = \overline{1, m}, \ i = \overline{1, N},$$

$$\widehat{b}_{r,i} = \frac{h}{2}\widehat{c}_{r,i} - \frac{h^2}{6}\widehat{d}_{r,i} + \frac{\lambda_{r,i}^* - \lambda_{r,i-1}^*}{h}, \qquad r = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, N},$$

причем $\widehat{c}_{r,0} = \widehat{c}_{r,N} = 0$.

5. Примеры. Рассмотрим на [0,1] краевую задачу для двумерной системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^1 K(t, s)x(s)ds + f(t), \qquad x \in (0, 1), \quad x \in R^2, \tag{36}$$

$$Bx(0) + Cx(1) = d, \tag{37}$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t^2 e^t & 0 \end{pmatrix}, \qquad K(t,s) = \begin{pmatrix} 0 & t^2 s \\ t^3 s^3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f(t) = \begin{pmatrix} 1 - t^3 - \dfrac{3}{4}t^2 - t \\ t^2 e^t - t^3 e^t + 2t + t^3/20 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Решением задачи (36), (37) является вектор $x^*(t) = \begin{pmatrix} t-1 \\ t^2+1 \end{pmatrix}$.

Задача (36), (37) аппроксимируется краевой задачей для нагруженных дифференциальных уравнений.

Случай 1. Пусть $m = 1,\ N = 5,\ \widetilde{N} = 8.$

На отрезке $[0,1]$ выберем точки $t_i = (i-1)\cdot 0.2,\ i = \overline{1,5}$. Функцию $K(t,s)x(s)$ представим в виде кубического сплайна. Тогда краевая задача (36), (37) сведется к краевой задаче для системы нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{j=1}^{6} M_j K(t, t_{j-1}) x(t_{j-1}) + f(t), \quad t \in (0,1),$$

$$Bx(0) + Cx(1) = d, \quad d \in R^2,$$

где

$$M_1 = M_6 = \frac{3}{38}, \qquad M_2 = M_5 = \frac{43}{190}, \qquad M_3 = M_4 = \frac{37}{190}$$

— коэффициенты, найденные по формуле (8).

Введем параметры $\lambda_j = x(t_{j-1}),\ j = \overline{1,6}$, и, выполнив замену $u_i(t) = x(t) - \lambda_i,\ i = \overline{1,5}$, получим краевую задачу вида

$$\frac{du_i}{dt} = A(t)(u_i + \lambda_i) + \sum_{j=1}^{6} M_j K(t, t_{j-1})\lambda_j + f(t), \qquad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = \overline{1,5},$$

$$u_i(t_{i-1}) = 0, \quad i = \overline{1,5},$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_6 = d,$$

$$\lambda_s + u_s(t_s) = \lambda_{s+1}, \quad s = \overline{1,4},$$

$$\lambda_5 + \lim_{t \to t_5 - 0} u_5(t) = \lambda_6.$$

Разбивая каждый интервал $[t_{i-1}, t_i],\ i = \overline{1,5}$, на $\widetilde{N}$ частей, решаем задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + A(t), \qquad x(t_{i-1}) = 0, \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = \overline{1,5},$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \widetilde{K}_j(t), \qquad x(t_{i-1}) = 0, \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = \overline{1,5}, \quad j = \overline{1,6},$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \qquad x(t_{i-1}) = 0, \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = \overline{1,5},$$

где $\widetilde{K}_j(t) = M_j K(t, t_{j-1}), \quad j = \overline{1,6}.$

Составим систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров

$$Q_*(0.2)\lambda^* = -F_*(0.2), \qquad \lambda \in R^{12}. \tag{38}$$

Здесь

$$Q_*(0.2) =$$

$$= \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & 0.02 & -1 & \frac{1.207}{10^4} & \frac{3.3234}{10^8} & \frac{2.0772}{10^4} & \frac{1.1217}{10^7} & \frac{3.1158}{10^4} & \frac{3.0899}{10^7} & \frac{4.8281}{10^4} & \frac{2.1052}{10^7} & \frac{2.1053}{10^4} \\
0.0031 & 1 & \frac{7.2422}{10^7} & -1 & \frac{4.9853}{10^6} & \frac{3.2885}{10^7} & \frac{1.6825}{10^5} & \frac{4.9328}{10^7} & \frac{4.6350}{10^5} & \frac{7.6436}{10^7} & \frac{3.1579}{10^5} & \frac{3.3330}{10^7} \\
0 & 0 & 1.0007 & 0.0609 & -0.9999 & 0.0015 & \frac{6.0578}{10^6} & 0.0022 & \frac{1.6688}{10^5} & 0.0034 & \frac{1.137}{10^5} & 0.0015 \\
0 & 0 & 0.0258 & 1.0009 & \frac{7.4795}{10^5} & -0.999 & \frac{2.5243}{10^4} & \frac{2.8984}{10^5} & \frac{6.9539}{10^4} & \frac{4.4912}{10^5} & \frac{4.7379}{10^4} & \frac{1.9584}{10^5} \\
0 & 0 & \frac{2.0533}{10^6} & 0.0023 & 1.0038 & 0.1041 & -0.9999 & 0.0059 & \frac{1.3141}{10^4} & 0.0092 & \frac{8.9533}{10^5} & 0.004 \\
0 & 0 & \frac{4.7136}{10^5} & \frac{1.0042}{10^4} & 0.0852 & 1.0048 & 0.0011 & -0.9997 & 0.0030 & \frac{4.0166}{10^4} & 0.0021 & \frac{1.7514}{10^4} \\
0 & 0 & \frac{8.0618}{10^6} & 0.0045 & \frac{5.5495}{10^5} & 0.0077 & 1.0132 & 0.1522 & -0.9995 & 0.0179 & \frac{3.5153}{10^4} & 0.0078 \\
0 & 0 & \frac{1.2731}{10^4} & \frac{4.6436}{10^4} & \frac{8.7638}{10^4} & \frac{7.9913}{10^4} & 0.2048 & 1.0164 & 0.0081 & -0.998 & \frac{5.5514}{10^3} & \frac{8.0993}{10^4} \\
0 & 0 & \frac{2.2424}{10^5} & 0.0074 & \frac{1.5436}{10^4} & 0.0128 & \frac{5.2096}{10^4} & 0.0192 & 1.0354 & 0.2120 & -0.999 & 0.013 \\
0 & 0 & \frac{2.7044}{10^4} & 0.0015 & 0.0019 & 0.0027 & 0.0063 & 0.004 & 0.4259 & 1.0453 & 0.0118 & -0.9973
\end{pmatrix},$$

$F_*(0.2) = (1, 1, 0.178, 0.043, 0.124, 0.1398, 0.0481, 0.2452, -0.0602, 0.3359, -0.2148, 0.3595)'.$

Решением системы (38) будет параметр $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*)'$, где

$$\lambda_1^* = \begin{pmatrix} -1.0003162 \\ 0.9994274 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2^* = \begin{pmatrix} -0.8003253 \\ 1.0394268 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_3^* = \begin{pmatrix} -0.6003436 \\ 1.159424 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4^* = \begin{pmatrix} -0.4003574 \\ 1.3594198 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_5^* = \begin{pmatrix} -0.2003531 \\ 1.6394173 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_6^* = \begin{pmatrix} -0.0003162 \\ 1.9994274 \end{pmatrix}.$$

***Таблица* 1**

t	$x_1(t)$	$\lvert x_1^*(t) - x_1(t)\rvert$	$x_2(t)$	$\lvert x_2^*(t) - x_2(t)\rvert$
0	-1.000316	0.000316	0.999427	0.000573
0.05	-0.905032	0.000317	1.001193	0.000573
0.1	-0.900319	0.000319	1.009427	0.000573
0.15	-0.850322	0.000322	1.021927	0.000573
0.2	-0.800325	0.000325	1.039427	0.000573
0.25	-0.750330	0.000327	1.061926	0.000573
0.3	-0.700334	0.000330	1.089426	0.000574
0.35	-0.650340	0.000332	1.121925	0.000574
0.4	-0.600344	0.000334	1.159424	0.000574
0.45	-0.550348	0.000346	1.201923	0.000576
0.5	-0.500352	0.000348	1.249422	0.000577
0.55	-0.450355	0.000350	1.301921	0.000577
0.6	-0.400357	0.000352	1.359420	0.000577
0.65	-0.350359	0.000358	1.421919	0.000581
0.7	-0.300358	0.000359	1.489418	0.000581
0.75	-0.250357	0.000359	1.561917	0.000582
0.8	-0.2003531	0.000353	1.639417	0.000583
0.85	-0.150348	0.000351	1.721918	0.000583
0.9	-0.100340	0.000348	1.809419	0.000582
0.95	-0.050329	0.000344	1.901922	0.000582
1	-0.000316	0.000340	1.999427	0.000581

Координаты параметра λ^* являются значениями решения аппроксимирующей краевой задачи в точках нагрузки. В остальных точках интервалов $[t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1,5}$, значения решения определяются, как значения решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \mathcal{F}_*(t), \qquad x(t_{i-1}) = \lambda_i^*, \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = \overline{1,5},$$

где

$$\mathcal{F}_*(t) = \frac{3}{38}K(t,0)\lambda_1^* + \frac{43}{190}K(t,0.2)\lambda_2^* + \frac{37}{190}K(t,0.4)\lambda_3^* +$$

$$+\frac{37}{190}K(t,0.6)\lambda_4^* + \frac{43}{190}K(t,0.8)\lambda_5^* + \frac{3}{38}K(t,1)\lambda_6^* + f(t).$$

Результаты численной реализации построенного алгоритма при выборе чисел m, N и $\widetilde{N}$, а также разности между решениями исходной и ее аппроксимирующей краевой задачи приведены в табл. 1.

Случай 2. Пусть $m = 2,\ N = 5$ и $\widetilde{N} = 8$. При данном выборе чисел задача (36), (37) имеет вид

$$\frac{dx_1}{dt} = A(t)x_1 + \int\limits_0^{1/2} K(t,s)x_1(s)ds + \int\limits_{1/2}^{1} K(t,s)x_2(s)ds + f(t), \quad t \in [0, 0.5], \tag{39}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = A(t)x_2 + \int\limits_0^{1/2} K(t,s)x_1(s)ds + \int\limits_{1/2}^{1} K(t,s)x_2(s)ds + f(t), \quad t \in [0.5, 1], \tag{40}$$

$$Bx_1(0) + Cx_2(1) = d, \tag{41}$$

$$x_1(0.5) = x_2(0.5), \tag{42}$$

где (42) — условие непрерывности решения в точке $t = 0.5$.

На отрезке $[0, 0.5]$ выберем точки $t_{1,j} = j \cdot 0.1$, а на отрезке $[0.5, 1]$ — точки $t_{2,j} = j \cdot 0.1 + 0,5$, $j = \overline{0, N}$.

Функции $K(t,s)x_1(s)$ и $K(t,s)x_2(s)$ на отрезках $[0, 0.5]$ и $[0.5, 1]$ соответственно представим в виде кубических сплайнов.

Тогда краевая задача (39) – (42) сведется к краевой задаче для системы нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_{r,i}}{dt} = A(t)x_{r,i} + M_1^{(1)} K(t, t_{1,0})x_{1,1}(t_{1,0}) +$$

$$+ \sum_{r=1}^{2} \sum_{j=1}^{4} M_{j+1}^{(r)} K(t, t_{r,j})x_{r,j+1}(t_{r,j}) +$$

$$+ \left(M_6^{(1)} + M_1^{(2)}\right) K(t, t_{1,5})x_{2,1}(t_{1,5}) +$$

$$+ M_6^{(2)} K(t, t_{2,5})x_{2,5}(t_{2,5}) + f(t), \qquad t \in [t_{r,i-1}, t_{r,i}], \quad r = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, N},$$

$$Bx_{1,1}(0) + Cx_{2,5}(1) = d,$$

$$x_{r,i}(t_{r,i}) = x_{r,i+1}(t_{r,i}), \qquad r = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$x_{1,5}(t_{1,5}) = x_{2,1}(t_{1,5}),$$

$$\lim_{t \to 1-0} x_{2,5}(t) = x_{2,5}(1).$$

Результаты вычислений приведены в табл. 2.

Случай 3. Пусть $m = 4,\ N = 5$ и $\widetilde{N} = 8$. При таком выборе чисел разность между решениями краевой задачи (36), (37) и ее аппроксимирующей краевой задачи не будет превышать значения $\varepsilon = 0.00004$.

Приведенный пример показывает, что при уменьшении шага разбиения отрезка, на котором рассматривается краевая задача, точность найденных численного и приближенного решений повышается.

Таблица 2

t	$x_1(t)$	$\lvert x_1^*(t) - x_1(t)\rvert$	$x_2(t)$	$\lvert x_2^*(t) - x_2(t)\rvert$
0	–1.0000377	$3.775 \cdot 10^{-5}$	0.9998563	$1.437 \cdot 10^{-4}$
0.05	–0.9500379	$3.792 \cdot 10^{-5}$	1.0023563	$1.437 \cdot 10^{-4}$
0.1	–0.9000384	$3.840 \cdot 10^{-5}$	1.0098563	$1.437 \cdot 10^{-4}$
0.15	–0.8500391	$3.912 \cdot 10^{-5}$	1.0223563	$1.437 \cdot 10^{-4}$
0.2	–0.8000400	$4.004 \cdot 10^{-5}$	1.0398562	$1.438 \cdot 10^{-4}$
0.25	–0.7500411	$4.111 \cdot 10^{-5}$	1.0623562	$1.438 \cdot 10^{-4}$
0.3	–0.7000423	$4.227 \cdot 10^{-5}$	1.0898561	$1.439 \cdot 10^{-4}$
0.35	–0.6500435	$4.346 \cdot 10^{-5}$	1.1223560	$1.440 \cdot 10^{-4}$
0.4	–0.6000446	$4.463 \cdot 10^{-5}$	1.1598559	$1.441 \cdot 10^{-4}$
0.45	–0.5500457	$4.573 \cdot 10^{-5}$	1.2023557	$1.443 \cdot 10^{-4}$
0.5	–0.5000467	$4.671 \cdot 10^{-5}$	1.2498556	$1.444 \cdot 10^{-4}$
0.55	–0.4500475	$4.750 \cdot 10^{-5}$	1.3023554	$1.446 \cdot 10^{-4}$
0.6	–0.4000481	$4.807 \cdot 10^{-5}$	1.3598552	$1.448 \cdot 10^{-4}$
0.65	–0.3500484	$4.836 \cdot 10^{-5}$	1.4223550	$1.450 \cdot 10^{-4}$
0.7	–0.3000483	$4.830 \cdot 10^{-5}$	1.4898549	$1.451 \cdot 10^{-4}$
0.75	–0.2500479	$4.786 \cdot 10^{-5}$	1.5623547	$1.453 \cdot 10^{-4}$
0.8	–0.2000470	$4.697 \cdot 10^{-5}$	1.6398546	$1.454 \cdot 10^{-4}$
0.85	–0.1500456	$4.558 \cdot 10^{-5}$	1.7223546	$1.454 \cdot 10^{-4}$
0.9	–0.1000436	$4.362 \cdot 10^{-5}$	1.8098548	$1.452 \cdot 10^{-4}$
0.95	–0.0500410	$4.104 \cdot 10^{-5}$	1.9023553	$1.447 \cdot 10^{-4}$
1	$-3.775 \cdot 10^{-5}$	$3.775 \cdot 10^{-5}$	1.9998563	$1.437 \cdot 10^{-4}$

Литература

1. *Быков Я. В.* О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе: Киргиз. гос. ун-т, 1957. – 328 с.
2. *Кривошеин Л. Е.* Приближенные методы решения обыкновенных линейных интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе, 1962. – 228 с.
3. *Lakshmikantham V., Rao M. R. M.* Theory of integro-differential equations. – London: Gordon Breach, 1995.
4. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004.
5. *Wazwaz A. M.* Linear and nonlinear integral equations: methods and applications. – Beijing: Higher Education Press, and Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
6. *Джумабаев Д. С., Бакирова Э. А.* Признаки корректной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2010. – **46**, № 4. – С. 550 – 564.
7. *Джумабаев Д. С.* Об одном методе решения линейной краевой задачи для интегродифференциального уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2010. – **50**, № 7. – С. 1209 – 1221.

8. *Джумабаев Д. С.* Об одном алгоритме нахождения решения линейной двухточечной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2013. – **53**, № 6. – С. 914 – 937.
9. *Джумабаев Д. С., Бакирова Э. А.* О признаках однозначной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2013. – **49**, № 10. – С. 1125 – 1140.
10. *Джумабаев Д. С.* Необходимые и достаточные условия разрешимости линейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 8. – С. 1074 – 1091.
11. *Dzhumabaev D. S.* On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations // J. Comput. and Appl. Math. – 2016. – **294**, № 2. – P. 342 – 357.
12. *Loscalzo F. R., Talbot T. D.* Spline function approximations for solutions of ordinary differential equations // SIAM J. Numer. Anal. – 1967. – **4**, № 3. – P. 433 – 445.
13. *Алберг Дж., Нельсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972. – 316 с.
14. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 350 с.
15. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. – Киев: Наук. думка, 1993. – 286 с.
16. *Nikolova N. S., Bainov D. D.* Application of spline-function for the construction of an approximate solution of boundary value problems for a class of functional-differential equations // Yokohama Math. – 1981. – **29**, № 1. – P. 108 – 122.
17. *Brunner H.* Collocation methods for Volterra integral and related functional equations. – London: Cambridge Univ. Press, 2004.
18. *Turkyilmazoglu M.* An effective approach for numerical solutions of high- order Fredholm integro-differential equations // Appl. Math. and Comput. – 2014. – **227**. – P. 384 – 398.
19. *Yuzbasi Ş.* Numerical solutions of system of linear Fredholm – Volterra integro-differential equations by the Bessel collocation method and error estimation // Appl. Math. and Comput. – 2015. – **250**. – P. 320 – 338.
20. *Черевко И. М., Якимов И. В.* Численный метод решения краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 6. – С. 854 – 860.
21. *Джумабаев Д. С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1989. – **29**, № 1. – С. 50 – 66.
22. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
23. *Dzhumabaev D. S.* Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations // Math. Methods Appl. Sci. – 2018. – **41**, № 4. – P. 1439 – 1462.
24. *Абдуллаев В. М., Айда-Заде К. Р.* О численном решении нагруженных дифференциальных уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2004. – **44**, № 9. – С. 1585 – 1595.
25. *Aida-zade K. R., Abdullaev V. M.* On the numerical solution of loaded systems of ordinary differential equations with nonseparated multipoint and integral conditions // Numer. Anal. and Appl. – 2014. – **7**. – P. 1 – 14.
26. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.

Получено 15.03.19,
после доработки — 08.06.19