УДК 517.956

В. В. Городецький, О. В. Мартинюк, Р. І. Петришин (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

НЕЛОКАЛЬНА БАГАТОТОЧКОВА ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧА ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З АНАЛІТИЧНИМИ СИМВОЛАМИ У ПРОСТОРАХ ТИПУ *W*

The correct solvability of a nonlocal multipoint (in time) problem for the evolution equations with differentiation operators of infinite order is established for an infinite time interval and an initial function, which is an element of the space of generalized functions of the type W'. The properties of the fundamental solution and the behavior of the solution as $t \to +\infty$ are investigated.

Доведено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з операторами диференціювання нескінченного порядку у випадку нескінченного часового проміжку і початковою функцією, яка є елементом простору узагальнених функцій типу W'. Вивчено властивості фундаментального розв'язку і поведінку розв'язку при $t \to +\infty$.

Узагальненням задачі Коші для рівнянь з частинними похідними є нелокальна багатоточкова за часом задача, коли початкова умова $u(t,\cdot)|_{t=0} = f$ замінюється умовою $\sum_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = f$, де $t_0 = 0$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0, +\infty)$, $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, — фіксовані числа (якщо $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші); при цьому відповідна умова трактується у класичному розумінні або в слабкому сенсі, якщо f — узагальнена функція. Нелокальна багатоточкова за часом задача відноситься до нелокальних крайових задач для рівнянь з частинними похідними. Такі задачі виникають при моделюванні багатьох процесів і задач практики крайовими задачами для рівнянь з частинними похідними з нелокальними умовами (демографічні дослідження, задачі математичної біології тощо (див., наприклад, [1, 2])).

Дослідженнями нелокальних крайових задач у різних аспектах займалося багато математиків, при цьому використовувалися різні методи й підходи (див., наприклад, [3 – 10]). Одержано важливі результати щодо постановки, коректної розв'язності та побудови розв'язків, вивчено питання залежності характеру розв'язності задач від поведінки символів операцій, сформульовано умови регулярності та нерегулярності крайових умов для важливих випадків диференціально-операторних рівнянь.

При дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші для рівнянь з частинними похідними часто використовуються простори типу W, введені Б. Л. Гуревичем [11] (див. також [12]), в яких для характеристики поведінки функцій на нескінченності використовуються довільні опуклі функції. У цій роботі досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для рівняння $\partial u/\partial t = A_\varphi u$, де A_φ — псевдодиференціальний оператор з аналітичним символом φ у просторах типу W, який задовольняє умову „параболічності" — аналог умови „параболічності" для рівнянь з частинними похідними. При цьому оператор A_φ можна розуміти як оператор диференціювання „нескінченного порядку":

$$A_\varphi = F^{-1}_{\sigma \to x}[\varphi(\sigma) F_{x \to \sigma}] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (id/dx)^k,$$

де F і F^{-1} — пряме й обернене перетворення Фур'є. Встановлено властивості фундаментального розв'язку нелокальної багатоточкової за часом задачі для зазначеного рівняння, доведено коректну розв'язність задачі у півпросторі $t > 0$ у випадку, коли початкова функція є елементом простору узагальнених функцій типу W', знайдено аналітичне зображення розв'язку, а також досліджено поведінку розв'язку $u(t, \cdot)$ при $t \to +\infty$ у просторі типу W'.

1. Простори типу W і W'. Розглянемо функцію $\omega\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, яка є неперервною і зростаючою, причому $\omega(0) = 0$, $\omega(1) \geq 1$, $\lim_{x\to+\infty} \omega(x) = +\infty$. Для $x \geq 0$ покладемо $\Omega(x) = \int_0^x \omega(\xi)d\xi$. Функція Ω є диференційовною і зростаючою на $[0, +\infty)$, опуклою донизу [12], тобто

$$\forall\{x_1, x_2\} \subset [0, +\infty)\colon \Omega(x_1) + \Omega(x_2) \leq \Omega(x_1 + x_2).$$

Оскільки функція $\omega(x)$ — похідна функції $\Omega(x)$ — при $x \to +\infty$ необмежено зростає, то $\Omega(x)$ при $x \to +\infty$ зростає швидше за довільну лінійну функцію. Довизначимо функцію Ω на $(-\infty, 0]$ парним чином, тобто розглянемо функцію $\mu\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, яка має такі ж властивості, що і функція ω. Для $x \geq 0$ покладемо

$$M(x) = \int_0^x \mu(\xi)d\xi, \quad M(-x) = M(x).$$

Функція M за своїми властивостями аналогічна функції Ω. За допомогою функцій M і Ω Б. Л. Гуревич увів [11] серію просторів, названих ним просторами типу W. Зокрема, символом W_M^Ω позначається сукупність цілих функцій $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, для яких

$$\exists c > 0\ \exists a > 0\ \exists b > 0\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}\colon |\varphi(z)| \leq c \exp\{-M(ax) + \Omega(by)\}. \tag{1}$$

У W_M^Ω вводиться топологія індуктивної границі просторів $W_{M,a}^{\Omega,b}$, які складаються з тих функцій $\varphi \in W_M^\Omega$, для яких виконуються нерівності

$$|\varphi(x + iy)| \leq c \exp\{-M(\overline{a}x) + \Omega(\overline{b}y)\},\ z = x + iy \in \mathbb{C},$$

де $\overline{a}$ — довільна додатна стала, менша за a, $\overline{b}$ — довільна стала, більша за b. Якщо для $\varphi \in W_{M,a}^{\Omega,b}$ покласти

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{z\in\mathbb{C}}[|\varphi(z)| \exp\{-\Omega((b + \rho)y) + M(a(1 - \delta)x)\}], \quad \{\delta, \rho\} \subset \{1/n, n \geq 2\},$$

то з цими нормами $W_{M,a}^{\Omega,b}$ стає повним досконалим зліченно нормованим простором [12].

У праці [13] встановлено, що означення (1) простору W_M^Ω рівносильне такому:

$$(\varphi \in W_M^\Omega) \Leftrightarrow \Bigg(\exists\, \tilde{c} = \tilde{c}(\varphi) > 0\ \ \exists\, \tilde{a} = \tilde{a}(\varphi) > 0\ \ \exists\, \tilde{b} = \tilde{b}(\varphi) > 0$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}_+\ \exists \rho_n \in [0, n), \rho_0 = 0\ \forall x \in \mathbb{R}:$$

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leq \tilde{c}\left(\frac{\tilde{b}}{\rho_n}\right)^n n! \exp\{-M(\tilde{a}x) + \Omega(\rho_n)\}\Bigg), \tag{2}$$

де ρ_n — розв'язок рівняння $x\omega(x) = n,\ n \in \mathbb{Z}_+$, або

$$(\varphi \in W_M^\Omega) \Leftrightarrow \Bigg(\exists c_1, a_1, b_1 > 0\ \ \forall k \in \mathbb{Z}_+\ \exists \mu_k \in [0,k), \mu_0 = 0,$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}_+\ \exists \rho_n \in [0,n), \rho_0 = 0\ \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \le c_1 n! \left(\frac{b_1}{\rho_n}\right)^n \left(\frac{\mu_k}{a_1}\right)^k \exp\left\{\Omega(\rho_n) - M(\mu_k)\right\}\Bigg),$$

де μ_k — розв'язок рівняння $x\mu(x) = k,\ k \in \mathbb{Z}_+$. При цьому збіжність у просторі W_M^Ω еквівалентна такій збіжності: послідовність $\{\varphi_n, n \ge 1\} \subset W_M^\Omega$ збігається до нуля в W_M^Ω, якщо при довільному $q \in \mathbb{Z}_+$ послідовність $\{\varphi_n^{(q)}, n \ge 1\}$ збігається до нуля рівномірно при $n \to +\infty$ на будь-якому скінченному проміжку в $\mathbb{R}$ і для функцій $\varphi_n^{(q)}$ справджуються нерівності вигляду (2) зі сталими $\tilde{a},\ \tilde{b},\ \tilde{c} > 0$, не залежними від n.

Важливим є питання про нетривіальність просторів W_M^Ω, оскільки ці простори можуть містити лише єдину функцію $\varphi(x) \equiv 0$. Однією з умов нетривіальності простору W_M^Ω є умова $M(x) \le \Omega(x)$. Далі будемо вважати, що ця умова виконується (про необхідну й достатню умову нетривіальності простору W_M^Ω див. в [14]).

Функція g називається мультиплікатором у просторі W_M^Ω, якщо $g\psi \in W_M^\Omega$ для довільної функції $\psi \in W_M^\Omega$ і відображення $\psi \to g\psi$ є лінійним і неперервним оператором в W_M^Ω. Мультиплікатором у просторі W_M^Ω є кожна ціла однозначна функція g, яка задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists c_\varepsilon > 0\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C} \colon |g(z)| \le c_\varepsilon \exp\{M(\varepsilon x) + \Omega(\varepsilon y)\}.$$

Сукупність функцій, заданих на $\mathbb{R}$, які допускають аналітичне продовження в усю комплексну площину $\mathbb{C}$ і як функції комплексної змінної є елементами простору W_M^Ω, позначатимемо символом $W_M^\Omega(\mathbb{R})$.

Подібно до просторів типу S, введених у [15], простори типу W перетворенням Фур'є відображаються у простори типу W. Для того щоб сформулювати відповідні твердження, наведемо означення функцій, двоїстих за Юнгом. Нехай функції $M(x)$ і $\Omega(y)$ визначаються за допомогою функцій $\mu(\xi)$ і $\omega(\eta)$ відповідно. Якщо функції μ і ω взаємно обернені, тобто $\mu(\omega(\eta)) = \eta,\ \omega(\mu(\xi)) = \xi$, то функції $M(x)$ і $\Omega(y)$ називаються двоїстими за Юнгом. У цьому випадку має місце нерівність Юнга

$$\forall x \in [0, +\infty)\ \forall y \in [0, +\infty) \colon xy \le M(x) + \Omega(y).$$

Якщо для заданого $x \in [0, +\infty)$ взяти $y = \mu(x)$, то нерівність Юнга для таких $x,\ y$ перетворюється в рівність. Прикладами взаємно двоїстих функцій є функції

$$M(x) = \frac{x^p}{p}, \quad \Omega(y) = \frac{y^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$M(x) = (x+1)\ln(x+1) - x, \quad \Omega(y) = e^y - y - 1.$$

Простори типу W перетворенням Фур'є відображаються у простори типу W [12], а саме, правильною є формула $F[W_M^\Omega(\mathbb{R})] = W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, де Ω_1 і M_1 — функції, двоїсті за Юнгом відповідно до функцій M і Ω, при цьому оператор Фур'є $F \colon W_M^\Omega(\mathbb{R}) \to W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ є неперервним.

У просторах W_M^Ω визначено і неперервні операції диференціювання. За певних умов у просторі W_M^Ω є визначеним і неперервним оператор диференціювання нескінченного порядку. Зокрема, якщо ціла функція $\varphi(z) = \sum_{k=0}^\infty c_k z^k,\ z \in \mathbb{C},$ — мультиплікатор у просторі W_M^Ω, то у просторі $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ є визначеним і неперервним оператор диференціювання нескінченного порядку

$$\varphi(-iD_x) = \sum_{k=0}^\infty c_k(-iD_x)^k,$$

при цьому оператор $\varphi(-iD_x)$ можна розуміти як псевдодиференціальний оператор, побудований за функцією φ. Отже, якщо оператор $\varphi(-iD_x)$ позначити символом A_φ, то

$$(A_\varphi f)(x) = F^{-1}[\varphi(\sigma)]F[\varphi(x)] \quad \forall \varphi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}).$$

Символом $(W_M^\Omega(\mathbb{R}))'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями.

Оскільки у просторі $W_M^\Omega(\mathbb{R})$ є визначеною і неперервною операція зсуву аргументу $T_x:$ $\varphi(\xi) \to \varphi(\xi + x)\ \forall \varphi \in W_M^\Omega(\mathbb{R})$, то згортку узагальненої функції $f \in (W_M^\Omega(\mathbb{R}))'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) := \langle f_\xi, T_{-x}\varphi(\xi)\rangle = \langle f_\xi, \varphi(x - \xi)\rangle, \quad \varphi(\xi) = \varphi(-\xi), \quad \varphi \in W_M^\Omega(\mathbb{R}).$$

Якщо $f \in (W_M^\Omega(\mathbb{R}))',\ f * \varphi \in W_M^\Omega(\mathbb{R})$ для довільної функції $\varphi \in W_M^\Omega(\mathbb{R})$ і, крім того, із співвідношення $\varphi_n \to 0$ при $n \to \infty$ за топологією простору $W_M^\Omega(\mathbb{R})$ випливає, що $f * \varphi_n \to 0$ при $n \to \infty$ за топологією простору $W_M^\Omega(\mathbb{R})$, то функціонал f називається згортувачем у просторі $W_M^\Omega(\mathbb{R})$.

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in (W_M^\Omega(\mathbb{R}))'$ визначається як узагальнена функція, задана на просторі $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$:

$$\langle F[f], \varphi\rangle = \langle f, F[f]\rangle \quad \forall \varphi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}).$$

При цьому якщо узагальнена функція $f \in (W_M^\Omega(\mathbb{R}))'$ — згортувач у просторі $W_M^\Omega(\mathbb{R})$, то для довільної функції $\varphi \in W_M^\Omega(\mathbb{R})$ правильною є формула $F[f * \varphi] = F[f]F[\varphi],\ F[f]$ — мультиплікатор у просторі $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$.

2. Нелокальна багатоточкова за часом задача. Символом P_M^Ω позначимо клас цілих однозначних функцій $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, які є мультиплікаторами у просторі W_M^Ω і такими, що $e^\varphi \in$ $\in W_M^\Omega$, тобто

$$\exists a, b > 0\ \exists c \in (0; 1] : |e^{\varphi(z)}| = |e^{\varphi(x+iy)}| \le ce^{-M(ax)+\Omega(by)} \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Нехай $\varphi \in P_M^\Omega,\ A_\varphi$ — оператор диференціювання нескінченного порядку, побудований за функцією $\varphi,\ A_\varphi\colon W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}) \to W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ (див. п. 1).

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = A_\varphi u, \quad (t,x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Pi_T, \tag{4}$$

для якого задамо нелокальну багатоточкову за часом умову

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - \mu_1 u(t,\cdot)|_{t=t_1} - \ldots - \mu_m u(t,\cdot)|_{t=t_m} = f, \tag{5}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0, +\infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0, +\infty)$ — фіксовані числа, причому $\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m < +\infty$, $f \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$.

Класичний розв'язок задачі (4), (5) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є. В результаті одержимо

$$u(t,x) = G(t,x) * f, \quad (t,x) \in \Pi_T,$$

де $G(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)](x)$, $Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)$,

$$Q_1(t,\sigma) = \exp\{t\varphi(\sigma)\}, Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)\right)^{-1}.$$

Для того щоб дослідити властивості функції G, насамперед вивчимо властивості функцій Q_1 і Q_2. Правильним є таке твердження.

Лема 1. *Нехай* $\varphi \in P_M^{\Omega}$. *Функція* $Q_1(t,z) = e^{t\varphi(z)}$, $t \in (0,+\infty)$, $z \in \mathbb{C}$, *при кожному* $t \in (0,+\infty)$, *як функція* z, *є елементом простору* W_M^{Ω}. *Існують сталі* $\tilde{a}$, $\tilde{b} > 0$ *такі, що для функції* $Q_1(t,x)$, $(t,x) \in (1,+\infty) \times \mathbb{R}$, *та її похідних* (*за змінною* $x \in \mathbb{R}$) *справджуються нерівності*

$$|D_x^n Q_1(t,x)| \le \left(\frac{\tilde{b}}{\rho_n}\right)^n t^n n! e^{\Omega(\rho_n)} e^{-M(\tilde{a}x)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{6}$$

де ρ_n — *розв'язок рівняння* $x\omega(x) = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Доведення. Оскільки $\varphi \in P_M^{\Omega}$, то виконується нерівність (3). Тоді

$$|e^{t\varphi(z)}| = |e^{\varphi(z)}|^t \le [e^{-M(ax)+\Omega(by)}]^t \le e^{-tM(ax)+t\Omega(by)}. \tag{7}$$

Із нерівності (7) випливає, що $Q_1(t,\cdot) \in W_M^{\Omega}$ при кожному $t \in (0,+\infty)$. Для доведення цього факту скористаємося тим, що функція Ω має такі властивості: а) $\forall \alpha \ge 1\ \forall x \in [0,+\infty):$ $\Omega(\alpha x) \ge \alpha\Omega(x)$; б) $\forall \alpha \in (0,1)\ \forall x \in [0,+\infty): \Omega(\alpha x) \le \alpha\Omega(x)$. Ці властивості випливають із рівності

$$\Omega(\alpha x) = \alpha \int_0^x \omega(\alpha\xi)d\xi, \quad x \ge 0,$$

яка виконується для довільного $\alpha > 0$ з урахуванням монотонного зростання функції ω на $[0,+\infty)$. Аналогічні властивості справджуються і для функції M.

Отже, при фіксованому $t \in (0,1)$

$$-tM(ax) \le -M(tax), \quad \exp\{-tM(ax) + t\Omega(by)\} \le$$
$$\le \exp\{-M(tax) + \Omega(tby)\} \le \exp\{-M(tax) + \Omega(by)\}.$$

Якщо $t > 1$, $t \ne n$, $n \in \{2,3,4,\ldots\}$, то $t = [t] + \{t\}$. Тоді

$$\exp\{-tM(ax)\} = \exp\{-[t]M(ax)\}\exp\{-\{t\}M(ax)\} \le \exp\{-\{t\}M(ax)\} \le$$
$$\le \exp\{-M(\{t\}ax)\}, \quad \exp\{t\Omega(by)\} \le \exp\{\Omega(bty)\}.$$

Якщо $t = n,\ n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$, то $t = 1 + n - 1$. Тоді

$$\exp\{-tM(ax)\} = \exp\{-M(ax)\}\exp\{-(n-1)M(ax)\} \le \exp\{-M(ax)\},$$
$$\exp\{t\Omega(by)\} \le \exp\{\Omega(bty)\}.$$

Звідси випливає, що $Q_1(t,\cdot) \in W_M^\Omega$ при кожному $t \in (0,+\infty)$. Зокрема, якщо $t > 1$, то правильною є оцінка

$$|Q_1(t,z)| \le e^{-M(\overline{a}x)+\Omega(bty)}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, \tag{8}$$

де

$$\overline{a} = \begin{cases} a\{t\}, & \text{якщо} \quad t \in (1,+\infty) \setminus \{2,3,4,\ldots\}, \\ a, & \text{якщо} \quad t = n, n \in \{2,3,4,\ldots\}, \end{cases}$$

$\{t\}$ — дробова частина числа t.

Доведемо тепер, що виконуються нерівності (6). Згідно з інтегральною формулою Коші

$$D_x^n Q_1(t,x) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{Q_1(t,z)}{(z-x)^{n+1}}dz, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

де Γ_R — коло радіуса R з центром у точці $x \in \mathbb{R}$. Використавши (8), отримаємо нерівності

$$|D_x^n Q_1(t,x)| \le \frac{n!}{R^n}\max_{z\in\Gamma_R}|Q_1(t,z)| \le \frac{n!}{R^n}\exp\{-M(\overline{a}x_0) + \Omega(btR)\},$$

де x_0 — точка максимуму функції $\exp\{-M(\overline{a}\xi)\}$, $\xi \in [x-R, x+R]$. Зауважимо, що

$$x_0 = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad |\xi| < R, \\ \xi + R, & \text{якщо} \quad \xi \le -R, \\ \xi - R, & \text{якщо} \quad \xi \ge R. \end{cases}$$

Оскільки M — опукла донизу на проміжку $(0,+\infty)$ функція, то вона задовольняє нерівність $M(\xi_1) + M(\xi_2) \le M(\xi_1+\xi_2)$, $\xi_1, \xi_2 \in (0,+\infty)$, або нерівність $M(\xi_1) - M(\xi_1+\xi_2) \le -M(\xi_2)$. Звідси випливає існування сталих $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ таких, що

$$\exp\{-M(\overline{a}x_0)\} \le \exp\{-M(a_1x) + M(a_2R)\} \quad \forall R > 0, \quad x > 0.$$

Оскільки $M(a_2R) \le \Omega(a_2R)$ (умова нетривіальності простору W_M^Ω), то справджується нерівність

$$\exp\{-M(\overline{a}x_0)\} \le \exp\{-M(a_1x)\}\exp\{M(a_2R)\} \le \exp\{-M(a_1x)\}\exp\{\Omega(a_2R)\}.$$

Оскільки $btR + a_2R < btR + a_2tR = (b+a_2)tR$, якщо $t > 1$, то з урахуванням нерівності опуклості для функції Ω знаходимо

$$|D_x^n Q_1(t,z)| \le \frac{n!}{R^n}\exp\{-M(a_1x)\}\exp\{\Omega(b_1tR)\}, \quad b_1 = b + a_2.$$

Для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ функція $g_n(R) = R^{-n} \exp\{\Omega(b_1 t R)\}$ диференційовна, причому

$$\lim_{R\to+\infty} g_n(R) = +\infty, \quad \lim_{R\to+0} g_n(R) = \begin{cases} +\infty, & n \in \mathbb{N}, \\ 0, & n = 0. \end{cases}$$

Оскільки $g_n(R) > 0,\ R \in (0, +\infty)$, то ця функція досягає свого інфімуму, який знайдемо за допомогою методів диференціального числення:

$$g_n'(R) = R^{-(n+1)}(b_1 t R \omega(b_1 t R) - n) e^{\Omega(b_1 t R)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

(тут $\omega = \Omega'$). Прирівнюючи $g_n'(R)$ до нуля, отримуємо $b_1 t R \omega(b_1 t R) = n,\ n \in \mathbb{Z}_+$. Безпосередньо переконуємося в тому, що $g_n(R)$ досягає свого інфімуму в точці $R_n = b_1^{-1} t^{-1} \rho_n$, де ρ_n — розв'язок рівняння $x\omega(x) = n$ ($\rho_0 = 0$, якщо $n = 0$, і $\rho_n \le n$, якщо $n \in \mathbb{N}$). Отже,

$$\inf_{R>0} g_n(R) = \left(\frac{b_1 t}{\rho_n}\right)^n e^{\Omega(\rho_n)}.$$

Таким чином,

$$|D_x^n Q_1(t,x)| \le n! \inf_{R>0} g_n(R) \exp\{-M(a_1 x)\} \le \left(\frac{\tilde b}{\rho_n}\right)^n t^n n! \exp\{-M(\tilde a x) + \Omega(\rho_n)\},$$

де $\tilde b = b_1,\ \tilde a = a_1$.

Лему 1 доведено.

Зауважимо, що якщо $t \in (0, 1)$, то правильними є оцінки

$$|D_x^n Q_1(t,x)| \le \left(\frac{\tilde b}{\rho_n}\right)^n n! e^{\Omega(\rho_n)} e^{-M(atx)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

***Наслідок* 1.** *$Q_1(t,x) \in W_M^\Omega(\mathbb{R})$ при кожному $t \in (0, +\infty)$.*

Лема 2. *Для похідних функції $Q_2(x) = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t,x)\right)^{-1}$, $x \in \mathbb{R}$, справджуються оцінки*

$$|D_x^n Q_2(x)| \le \tilde c \left(\frac{\tilde b}{\rho_n}\right)^n t_m^n n! e^{\Omega(\rho_n)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

де $\tilde c = \mu^{-1} \sum_{r=0}^\infty \tilde\mu^r r^n,\ \tilde\mu = \mu^{-1}\mu_0 m < 1,\ \mu_0 = \max\{\mu_1, \ldots, \mu_m\},\ \tilde b$ — стала з нерівності (6).

Доведення. Із оцінок (6) випливають нерівності $Q_1(t_k,x)| < 1,\ k \in \{1, \ldots, m\}$. Оскільки

$$\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,x) = \mu^{-1}\left(1 - \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,x)\right),$$

причому

$$\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,x) < \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^m \mu_k < 1,$$

то, використовуючи поліноміальну формулу, знаходимо

$$Q_2(x) = \frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-r}\left(\sum_{k=1}^{m}\mu_k e^{t_k\varphi(x)}\right)^r = \sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-(r+1)}\times$$

$$\times\left(\sum_{r_1+\ldots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\ldots r_m!}(\mu_1 e^{t_1\varphi(x)})^{r_1}\ldots(\mu_m e^{t_m\varphi(x)})^{r_m}\right) =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-(r+1)}\sum_{r_1+\ldots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\ldots r_m!}\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}Q_1(\lambda, x),$$

де $\lambda = t_1r_1 + \ldots + t_mr_m \le t_m(r_1 + \ldots + r_m) = t_mr$. Звідси та з (6) випливають нерівності

$$|D_x^n Q_2(\sigma)| \le \left(\frac{\tilde{b}}{\rho_n}\right)^n t_m^n n! e^{\Omega(\rho_n)}\sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-(r+1)}\mu_0^r r^n\sum_{r_1+\ldots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\ldots r_m!},$$

де $\mu_0 = \max\{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$. Далі скористаємося тим, що

$$\sum_{r_1+\ldots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\ldots r_m!} = m^r.$$

Тоді

$$|D_x^n Q_2(x)| \le \tilde{c}\left(\frac{\tilde{b}}{\rho_n}\right)^n t_m^n n! e^{\Omega(\rho_n)},$$

де $\tilde{c} = \mu^{-1}\sum_{r=0}^{\infty}\tilde{\mu}^r r^n$, $\tilde{\mu} = \mu^{-1}\mu_0 m < 1$.

Лему 2 доведено.

Зауважимо, що функція Q_2 обмежена на $\mathbb{R}$, бо

$$|Q_2(x)| \le \left(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k\right)^{-1} \equiv \alpha_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Звідси та з оцінок (9) випливає, що Q_2 — мультиплікатор у просторі $W_M^{\Omega}(\mathbb{R})$. Оскільки $Q_1(t, \cdot) \in \in W_M^{\Omega}(\mathbb{R})$, а Q_2 — мультиплікатор у цьому просторі, то функція $Q(t, x) = Q_1(t, x)Q_2(x)$ є елементом простору $W_M^{\Omega}(\mathbb{R})$. Функція $G(t, \cdot)$ — обернене перетворення Фур'є функції $Q(t, \cdot) \in \in W_M^{\Omega}(\mathbb{R})$, тому $G(t, \cdot)$ — елемент простору $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ (при кожному $t \in (0, \infty)$). Використовуючи зображення функції Q_2, знаходимо

$$G(t, \sigma) = (2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} Q_1(t, x)Q_2(x)e^{i\sigma x}dx =$$

$$= (2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{t\varphi(x)}\left(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k e^{t_k\varphi(x)}\right)^{-1} e^{i\sigma x}dx =$$

$$= (2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{t\varphi(x)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{\mu^{r+1}}\sum_{r_1+\ldots+r_m=r}\frac{r!\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}}{r_1!\ldots r_m!}\times$$

$$\times e^{(t_1r_1+\ldots+t_mr_m)\varphi(x)}e^{i\sigma x}dx =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\mu^{r+1}} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}}{r_1!\ldots r_m!}\tilde{G}(t_1r_1+\ldots+t_mr_m+t,\sigma),$$

де $\tilde{G}(t_1r_1+\ldots+t_mr_m+t,\sigma) = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{(t_1r_1+\ldots+t_mr_m+t)\varphi(x)}e^{i\sigma x}dx$, $\tilde{G}(t,\sigma)$ — фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (4), тобто $\tilde{G}(t,\sigma) = F^{-1}[Q_1(t,x)](\sigma)$. Зазначимо, що $\tilde{G}(t,\cdot) \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ при кожному $t \in (0,\infty)$, тобто $\tilde{G}(t,z) \in W_{M_1}^{\Omega_1}$, $z \in \mathbb{C}$, при кожному $t \in (0,\infty)$. Для проведення подальших міркувань оцінимо $\tilde{G}(t,z)$, $z \in \mathbb{C}$, виділивши при цьому залежність від параметра t.

Оскільки $Q_1(t,\cdot) \in W_M^{\Omega}$ при кожному $t \in (0,+\infty)$, то $Q_1(t,x+iy)$ прямує до нуля при $|x| \to +\infty$ швидше за будь-який степінь $|x|^{-1}$ рівномірно в кожній смузі $|y| \le y_0$ (при фіксованому $t \in (0,+\infty)$), а функція $e^{i\sigma z}$ залишається в цій смузі обмеженою за модулем. Тому, використавши інтегральну теорему Коші, інтегрування вздовж дійсної осі Ox замінимо інтегруванням вздовж будь-якої прямої, паралельної осі Ox, тобто

$$\tilde{G}(t,\sigma) = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \exp\{t\varphi(x+iy) + i(x+iy)\sigma\}dx, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

При фіксованому $t \in (0,\infty)$ функція $G(t,\cdot)$ є цілою функцією, тому можна виконати аналітичне продовження, замінивши при цьому σ на $\sigma + i\tau = s$. У результаті прийдемо до співвідношення

$$\tilde{G}(t,\sigma+i\tau) = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \exp\{t\varphi(x+iy) + i(x+iy)(\sigma+i\tau)\}dx.$$

Тоді з урахуванням нерівності (7) маємо

$$|\tilde{G}(t,\sigma+i\tau)| \le c\int_{\mathbb{R}} \exp\{-tM(ax) + t\Omega(by) - y\sigma - x\tau\}dx \le$$

$$\le c\exp\{-\sigma y + t\Omega(by)\}\int_{\mathbb{R}} \exp\{-tM(ax) + |x|\,|\tau|\}dx =$$

$$= 2c\exp\{-\sigma y + t\Omega(by)\}\int_0^{\infty} \exp\{-tM(ax) + x|\tau|\}dx, \quad c = (2\pi)^{-1}.$$

Оцінимо вираз $-tM(ax) + x|\tau|$. Нехай Ω_1 — двоїста за Юнгом функція до функції M. Тоді, використавши нерівність Юнга, знайдемо, що

$$-tM(ax) + \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\varepsilon|\tau|}{at} \le -tM(ax) + \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\left[M\left(\frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \Omega_1\left(\frac{\varepsilon|\tau|}{at}\right)\right]$$

для довільно фіксованого параметра $\varepsilon > 1$. Оскільки $ax \ge \dfrac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}$, $x \ge 0$, M — зростаюча функція, то $M(ax) \ge M(ax/\sqrt{\varepsilon})$. Тоді

$$-tM(ax) \le -tM\left(\frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \quad t > 0.$$

Отже,

$$-tM(ax)+x|\tau| \leq -tM\left(\frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}M\left(\frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\Omega_1\left(\frac{\varepsilon|\tau|}{at}\right) \leq$$

$$\leq -\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}}tM\left(\frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\Omega_1\left(\frac{\varepsilon|\tau|}{at}\right).$$

Звідси випливає оцінка

$$J := \int\limits_0^\infty \exp\{-tM(ax)+x|\tau|\}dx \leq$$

$$\leq \int\limits_0^\infty \exp\left\{-\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}}tM\left(\frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right\}dx \exp\left\{\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\Omega_1\left(\frac{\varepsilon|\tau|}{at}\right)\right\}.$$

Крім того,

$$\exp\left\{-\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}}tM\left(\frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right\} \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{(\sqrt{\varepsilon}-1)t}\frac{1}{M\left(\dfrac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\right)},$$

$$J \leq c_0 t^{-1}\exp\left\{\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\Omega_1\left(\frac{\varepsilon|\tau|}{at}\right)\right\}, \quad c_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}-1}\int\limits_0^\infty \frac{dx}{M\left(\dfrac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\right)}.$$

Отже,

$$|\tilde{G}(t,\sigma+i\tau)| \leq \tilde{c}t^{-1}\exp\left\{\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\Omega_1\left(\frac{\varepsilon|\tau|}{at}\right)-\sigma y+t\Omega(by)\right\}.$$

Нехай M_1 — функція, двоїста за Юнгом до Ω. Оцінимо вираз $\alpha := -\sigma y+t\Omega(by)$. Для цього підберемо знак y так, щоб справджувалася рівність $\sigma y = |\sigma|\cdot|y|$, а величину y виберемо так, щоб нерівність Юнга $\sigma y \leq M_1(\sigma)+\Omega(y),\ \sigma \geq 0,\ y \geq 0$, перетворилася у рівність вигляду

$$|\sigma|\cdot|y| = t\left[\frac{|\sigma|}{tb}b|y|\right] = t\left[M_1\left(\frac{\sigma}{tb}\right)+\Omega(by)\right].$$

Отже,

$$\alpha = -tM_1\left(\frac{\sigma}{tb}\right)-t\Omega(by)+t\Omega(by) = -tM_1\left(\frac{\sigma}{tb}\right).$$

Таким чином,

$$|\tilde{G}(t,\sigma+i\tau)| \leq \tilde{c}t^{-1}\exp\left\{-tM_1\left(\frac{\sigma}{tb}\right)+\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\Omega_1\left(\frac{\varepsilon|\tau|}{at}\right)\right\} \leq$$

$$\leq \tilde{c}t^{-1}\exp\left\{-tM_1\left(\frac{\sigma}{tb}\right)+t\Omega_1\left(\frac{\varepsilon|\tau|}{at}\right)\right\}, \quad \varepsilon > 1. \tag{10}$$

Повернемося тепер до оцінювання функції $G(t,\sigma)$, врахувавши при цьому нерівність (10) при $\tau = 0$. В результаті отримаємо

$$|G(t,\sigma)| \leq \tilde{c}t^{-1}\sum_{r=0}^{\infty}\tilde{\mu}^r \times$$

$$\times \exp\{-(t_1r_1+\ldots+t_mr_m+t)\}M_1\left(\frac{\sigma}{b(t_1r_1+\ldots+t_mr_m+t)}\right) \leq$$

$$\leq \tilde{c}t^{-1}\sum_{r=0}^{\infty}\tilde{\mu}^r = \tilde{c}'t^{-1} \quad \forall\sigma\in\mathbb{R}, \tag{11}$$

де $\tilde{c}' = c(1-\tilde{\mu})^{-1}$. Зауважимо, що $G(t,\sigma)$ — неперервна функція аргументу $t\in(0,+\infty)$. Справді, з (7) випливає, що для $t\geq t_0>0$ справджується нерівність

$$Q(t,x)=Q_1(t,x)Q_2(x)\leq e^{-t_0M(ax)}\left(\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\right)^{-1}.$$

Звідси випливає рівномірна збіжність інтеграла

$$(2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}}Q(t,x)e^{i\sigma x}dx=G(t,\sigma)$$

у довільній смузі $\{(t,x)\colon 0<t_0\leq t, x\in\mathbb{R}\}$. Отже, функція $G(t,\cdot)$ є неперервною в кожній точці проміжку $(0,\infty)$. Аналогічно доводимо диференційовність $G(t,\cdot)$ за змінною t на $(0,+\infty)$.

Лема 3. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}(f*G(t,\cdot))=f*\frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t} \quad \forall f\in(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}))'.$$

Доведення. За означенням згортки узагальненої функції з основною маємо

$$f*G(t,x)=\langle f_\xi, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle, \quad \check{G}(t,\xi)=G(t,-\xi).$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}(f*G(t,\cdot))=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[(f*G(t+\Delta t,\cdot))-(f*G(t,\cdot))]=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left\langle f_\xi, \frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\cdot)-T_{-x}\check{G}(t,\cdot)]\right\rangle.$$

Граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\cdot)-T_{-x}\check{G}(t,\cdot)] \underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial t}T_{-x}\check{G}(t,\cdot)$$

виконується в сенсі збіжності за топологією простору $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, тому з урахуванням неперервності функціонала f маємо

$$\frac{\partial}{\partial t}(f*G(t,\cdot))=\left\langle f_\xi, \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\cdot)-T_{-x}\check{G}(t,\cdot)]\right\rangle=$$

$$= \left\langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial t} T_{-x} \check{G}(t,\cdot) \right\rangle = \left\langle f_\xi, T_{-x} \frac{\partial}{\partial t} \check{G}(t,\xi) \right\rangle = f * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}.$$

Лему 3 доведено.

Символом $(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}),*)'$ позначимо клас узагальнених функцій з $(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}))'$, які є згортувачами у просторі $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$.

Лема 4. *Нехай*

$$\omega(t,x) = f * G(t,x), \quad f \in (W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}),*)', \quad (t,x) \in \Pi_T.$$

Тоді у просторі $(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}))'$ *справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} \omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \omega(t,\cdot) = f. \tag{12}$$

Доведення. Врахувавши властивість неперервності перетворення Фур'є і формулу

$$F[f*G] = F[f]\cdot F[G] = F[f]Q(t,x),$$

яка правильна для довільної узагальненої функції з класу $(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}),*)'$, співвідношення (12) запишемо у вигляді

$$\mu \lim_{t\to+0} F[\omega(t,\cdot)] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} F[\omega(t,\cdot)] = F[f] \left(\mu \lim_{t\to+0} Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} Q(t,\cdot) \right)$$

(вказані границі розглядаються у просторі $(W_M^\Omega(\mathbb{R}))'$). Доведемо, що у просторі $(W_M^\Omega(\mathbb{R}))'$ справджується співвідношення

$$\mu \lim_{t\to+0} Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} Q(t,\cdot) = 1. \tag{13}$$

Для доведення (13) візьмемо довільну функцію $\psi \in W_M^\Omega(\mathbb{R})$ і, використавши теорему про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега, знайдемо

$$\mu \lim_{t\to+0} \langle Q(t,\cdot),\psi\rangle - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} \langle Q(t,\cdot),\psi\rangle =$$

$$= \mu \lim_{t\to+0} \int_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} \int_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left[\mu Q(0,\sigma) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l Q(t_l,\sigma) \right] \psi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\mu}{\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)} - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \frac{Q_1(t_l,\sigma)}{\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)} \right] \psi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\mu - \sum_{l=1}^{m} \mu_l Q_1(t_l, \sigma)}{\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k, \sigma)} \psi(\sigma) d\sigma = \int\limits_{\mathbb{R}} \psi(\sigma) d\sigma = \langle 1, \psi \rangle$$

(тут $Q(t, \cdot)$ трактується як регулярна узагальнена функція з простору $(W_M^{\Omega}(\mathbb{R}))'$). Отже, співвідношення (13) виконується. Звідси випливає, що правильним є співвідношення (12).

Лему 4 доведено.

Зауважимо, що з (13) випливає співвідношення

$$\mu \lim_{t \to +0} G(t, \cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} G(t, \cdot) = \delta$$

(δ — дельта-функція Дірака), яке виконується у просторі $(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}))'$.

З леми 4 випливає, що для рівняння (4) нелокальну багатоточкову за часом задачу можна сформулювати так: знайти розв'язок рівняння (4), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t \to +0} u(t, \cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} u(t, \cdot) = f, \quad f \in (W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}), *)', \tag{14}$$

де граничні співвідношення розглядаються у просторі $(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}))'$.

Правильним є таке твердження.

Теорема 1. *Задача* (4), (14) *коректно розв'язна. Розв'язок дається формулою*

$$u(t, x) = f * G(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_T,$$

причому $u(t, \cdot) \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ *при кожному* $t \in (0, \infty)$.

Доведення. Функція $u(t, x)$ є розв'язком рівняння (4). Справді (див. лему 3),

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(f * G(t, x)) = f * \frac{\partial G(t, x)}{\partial t},$$
$$A_\varphi u(t, x) = F^{-1}[\varphi(\sigma) F[f * G(t, x)](\sigma)](x).$$

Оскільки f — згортувач у просторі $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, то

$$F[f * G(t, \cdot)] = F[f] F[G(t, \cdot)] = F[f] Q(t, \cdot).$$

Отже,

$$A_\varphi u(t, x) = F^{-1}[\varphi(\sigma) Q(t, \sigma) F[f](\sigma)](x) =$$
$$= F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t} Q(t, \sigma) F[f](\sigma)\right](x) = F^{-1}\left[F\left[\frac{\partial}{\partial t} G\right] F[f]\right](x) =$$
$$= F^{-1}\left[F\left[f * \frac{\partial G}{\partial t}\right]\right] = f * \frac{\partial G}{\partial t}.$$

Звідси випливає, що функція $u(t, x)$, $(t, x) \in \Pi_T$, задовольняє рівняння (4). З леми 4 випливає, що u задовольняє умову (14) у вказаному сенсі.

Доведемо, що задача (4), (14) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A_\varphi^* v = 0, (t,x) \in [0,t_0) \times \mathbb{R}, \quad 0 \le t < t_0 < +\infty, \tag{15}$$

$$v(t,\cdot)|_{t=t_0} = \psi, \quad \psi \in (W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}), *)', \tag{16}$$

де $A_\varphi^* = F[\varphi F^{-1}[g]]$ $\forall g \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, A_φ^* — звуження спряженого оператора до оператора A_φ на простір $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}) \subset (W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}))'$. Умову (16) розуміємо в слабкому сенсі.

Із результатів, отриманих у [16], випливає, що задача Коші (15), (16) є розв'язною, при цьому $v(t,\cdot) \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ при кожному $t \in [0,t_0)$.

Нехай $Q_{t_0}^t \colon (W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}), *)' \to W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ — оператор, який зіставляє функціоналу $\psi \in \in (W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}), *)'$ розв'язок задачі (15), (16). Оператор $Q_{t_0}^t$ є лінійним і неперервним, він визначений для довільних t і t_0 таких, що $0 \le t < t_0 < +\infty$, і має такі властивості:

$$\forall \psi \in (W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}), *)' \colon \frac{dQ_{t_0}^t \psi}{dt} + A_\varphi^* Q_{t_0}^t \psi = 0, \quad \lim_{t \to t_0} Q_{t_0}^t \psi = \psi$$

(границя розглядається у просторі $(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}))'$).

Розглянемо розв'язок $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_T$, задачі (4), (14), який розумітимемо як регулярний функціонал із простору $(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}), *)' \supset W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$. Доведемо, що задача (4), (14) може мати лише єдиний розв'язок у просторі $(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}), *)'$. Для цього достатньо довести, що єдиним розв'язком рівняння (4) при нульовій початковій умові може бути лише функціонал $u(t,x) \equiv 0$ (при кожному $t \in (0,+\infty)$). Застосуємо функціонал u до функції $Q_{t_0}^t \psi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, де ψ — довільно фіксований елемент із простору $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}) \subset (W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}), *)'$. Диференціюючи по t і використовуючи рівняння (4), (14), знаходимо

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi \rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, Q_{t_0}^t \psi \right\rangle + \left\langle u, \frac{\partial Q_{t_0}^t \psi}{\partial t} \right\rangle =$$
$$= \langle A_\varphi u, Q_{t_0}^t \psi \rangle - \langle u, A_\varphi^* Q_{t_0}^t \psi \rangle =$$
$$= \langle A_\varphi u, Q_{t_0}^t \psi \rangle - \langle A_\varphi u, Q_{t_0}^t \psi \rangle = 0, t \in [0,t_0).$$

Звідси випливає, що $\langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi \rangle$ є сталою величиною, при цьому справджується граничне співвідношення

$$\lim_{t \to t_0} \langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi \rangle = \langle u(t_0,\cdot), \psi \rangle = \mathrm{const} = c$$

у довільній точці $t_0 \in (0,+\infty)$. Отже, якщо в (14) $f = 0$, то

$$\mu \lim_{t \to +0} \langle u(t,\cdot), \psi \rangle - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t \to t_k} \langle u(t,\cdot), \psi \rangle = \mu c_0 - \sum_{k=1}^m \mu_k c_k = 0,$$

де c_0, c_1, ..., c_m — довільні сталі. Покажемо, що $c_0 = 0$. Якщо це не так, тобто $c_0 \ne 0$, то $c_1 = c_0 \alpha_1$, ..., $c_m = c_0 \alpha_m$. Тоді маємо співвідношення $\mu c_0 - \sum_{k=1}^m \mu_k c_0 \alpha_k = 0$, тобто $c_0 \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \alpha_k \right) = 0$. Якщо $c_0 \ne 0$, то $\mu = \sum_{k=1}^m \mu_k \alpha_k$, де α_k, $k \in \{1,\ldots,m\}$, — довільні сталі. Це суперечить тому, що μ — фіксований параметр. Отже, $c_0 = 0$. Аналогічно показуємо, що $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$. Таким чином, $\langle u(t_0, \cdot), \psi \rangle = 0$ для довільного $\psi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, тобто $u(t_0, x)$ — нульовий функціонал із простору $(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}), *)'$. Оскільки $t_0 \in (0, +\infty)$ і t_0 вибрано довільним чином, то $u(t, \cdot) = 0$ для всіх $t \in (0, +\infty)$.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Розв'язок* $u(t, x)$ *нелокальної багатоточкової за часом задачі* (4), (14) *збігається до нуля у просторі* $(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}))'$ *при* $t \to +\infty$.

Доведення. Нагадаємо, що розв'язок задачі (4), (14) дається формулою

$$u(t, x) = f * G(t, x) = \langle f_\xi, T_{-x}\check{G}(t, \xi) \rangle = \langle f_\xi, G(t, x - \xi) \rangle.$$

Нехай $\psi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$. Покладемо

$$\Phi_t(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, x - \xi)\psi(x)dx, \quad \Phi_{t,R}(\xi) = \int_{-R}^{R} G(t, x - \xi)\psi(x)dx, \quad R > 0.$$

У цих позначеннях перевіримо, що: а) при кожному $t > 1$ і $R > 0$ функція $\Phi_{t,R}(\xi)$ належить простору $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, $\Phi_{t,R}(\xi) \to \Phi_t(\xi)$ при $R \to +\infty$ у просторі $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$; б) $\Phi_t(\xi) \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ при кожному $t > 0$. Звідси випливатиме, що

$$\langle u(t, x), \psi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f_\xi, G(t, x - \xi) \rangle \psi(x)dx = \left\langle f_\xi, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, x)\psi(x + \xi)dx \right\rangle =$$

$$= \left\langle f_\xi, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, -y)\psi(-(y - \xi))dy \right\rangle = \left\langle f_\xi, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, -y)\check{\psi}(y - \xi)dy \right\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, -y)\langle f_\xi, \check{\psi}(y - \xi) \rangle dy = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, -y)(f * \check{\psi})(y)dy$$

(тут $u(t, \cdot)$ трактується як регулярна узагальнена функція з простору $(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}))'$ при кожному $t > 0$).

Отже, встановимо властивість а). При фіксованих $\{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+$ маємо

$$|\xi^k D_\xi^n \Phi_{t,R}(\xi)| \leq \int_{-R}^{R} |\xi^k \psi(x) D_\xi^n G(t, x - \xi)|dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi^k \psi(\xi + \eta) D_\eta^n G(t, \eta)|d\eta.$$

Оскільки $\psi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, то при деяких $\overline{c}$, $\overline{a}$, $\overline{b} > 0$ справджуються нерівності (див. п. 1)

$$|\xi^k D_\xi^n \psi(\xi)| \leq \overline{c} n! \left(\frac{b_1}{\rho_n}\right)^n \left(\frac{\mu_k}{\overline{a}}\right)^k \exp\{\Omega_1(\rho_n) - M_1(\mu_k)\}, \quad \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+, \quad \{\xi, \eta\} \subset \mathbb{R}.$$

Звідси при кожному $\eta \in \mathbb{R}$ отримуємо

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\xi^k \psi(\xi + \eta)| = \sup_{y \in \mathbb{R}} |(y - \eta)^k \psi(y)| = \sup_{y \in \mathbb{R}} \left| \sum_{l=0}^{k} C_k^l y^l (-\eta)^{k-l} \psi(y) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{l=0}^{k} C_k^l |\eta|^{k-l} \sup_{y\in\mathbb{R}} |y^l \psi(y)| \leq \overline{c} \sum_{l=0}^{k} C_k^l \left(\frac{\mu_l}{\overline{a}}\right)^l |\eta|^{k-l} e^{-M(\mu_l)}. \tag{17}$$

Як встановлено раніше, $G(t,\cdot) \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ при кожному $t > 0$, тому для функції G та її похідних (за змінною η) справджуються оцінки

$$|D_\eta^n G(t,\eta)| \leq \tilde{c} \left(\frac{\tilde{b}}{\overline{\rho}_n}\right)^n n! e^{\Omega(\rho_n)} e^{-M_1(\tilde{a}\eta)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad n \in \mathbb{R},$$

з деякими сталими $\tilde{c}$, $\tilde{b}$, $\tilde{a} > 0$, залежними від t, $\overline{\rho}_n = \overline{\rho}_n(t)$.

Врахувавши (17) і останню нерівність, знайдемо

$$|\xi^k D_\xi^n \Phi_{t,R}(\xi)| \leq \overline{c}\tilde{c} \left(\frac{\tilde{b}}{\overline{\rho}_n}\right)^n n! e^{\Omega(\rho_n)} \sum_{l=0}^{k} C_k^l \left(\frac{\mu_l}{\overline{a}}\right)^l e^{-M_1(\mu_l)} \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^{k-l} e^{-M_1(\tilde{a}\eta)} d\eta.$$

Виконавши заміну змінної інтегрування $\tilde{a}\eta = z$, прийдемо до співвідношення

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^{k-l} \exp\{-M_1(\tilde{a}\eta)\} d\eta = \left(\frac{1}{\tilde{a}}\right)^{k-l+1} \int_{-\infty}^{+\infty} |z|^{k-l} \exp\{-M_1(z)\} dz =$$

$$= 2\left(\frac{1}{\tilde{a}}\right)^{k-l+1} \int_0^{\infty} z^{k-l} \exp\{-M_1(z)\} dz.$$

Використавши властивість опуклості функції M_1, знайдемо

$$\exp\{-M_1(z)\} \leq \exp\left\{-M_1\left(\frac{z}{2}\right)\right\} \exp\left\{-M_1\left(\frac{z}{2}\right)\right\}.$$

Тоді

$$J_{k-l} := \int_0^{\infty} z^{k-l} \exp\{-M_1(z)\} dz \leq \sup_{z\geq 0} \left(z^{k-l} \exp\left\{-M_1\left(\frac{z}{2}\right)\right\}\right) \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \exp\left\{-M_1\left(\frac{z}{2}\right)\right\} dz.$$

Оскільки

$$\sup_{z\geq 0} \left(z^{k-l} \exp\left\{-M_1\left(\frac{z}{2}\right)\right\}\right) = (2\tilde{\mu}_{k-l})^{k-l} e^{-M_1(\tilde{\mu}_{k-l})},$$

то виконується нерівність

$$J_{k-l} \leq c_0 (2\tilde{\mu}_{k-l})^{k-l} e^{-M_1(\tilde{\mu}_{k-l})}, \quad l \in \{0, 1, \ldots, k\},$$

де $c_0 = \int_0^{\infty} \exp\left\{-M_1\left(\frac{z}{2}\right)\right\} dz.$

Тоді

$$|\xi^k D_\xi^n \Phi_{t,R}(\xi)| \leq \frac{2c_0\bar{c}\tilde{c}}{\bar{a}} \left(\frac{\tilde{b}}{\rho_n}\right)^n n! e^{\Omega_1(\rho_n)} \sum_{l=0}^{k} C_k^l \left(\frac{\mu_l}{\bar{a}}\right)^l e^{-M_1(\mu_l)} \times$$

$$\times (2\tilde{\mu}_{k-l})^{k-l} e^{-M_1(\tilde{\mu}_{k-l})}.$$

Далі зауважимо, що $\tilde{\mu}_k < \mu_k$ при $t > 1$, оскільки $\tilde{\mu}_k = \tilde{\mu}_k(t)$. Тоді

$$\Lambda := \left(\frac{\mu_l}{\bar{a}}\right)^l e^{-M_1(\mu_l)} \tilde{\mu}_{k-l}^{k-l} e^{-M_1(\tilde{\mu}_{k-l})} \leq \left(\frac{\mu_l}{\bar{a}}\right)^l e^{-M_1(\mu_l)} \mu_{k-l}^{k-l} \leq$$

$$\leq \left(\frac{\mu_l}{\bar{a}}\right)^l e^{-M_1(\mu_l)} \mu_{k-l}^{k-l} e^{-M(\mu_{k-l})} e^{M_1(\mu_{k-l})}.$$

Зауважимо, що $\sup_{z \geq 0} z^k e^{-M_1(x)} = \mu_k^k e^{-M_1(\mu_k)}$. Тоді

$$\mu_l^l e^{-M_1(\mu_l)} \mu_{k-l}^{k-l} e^{-M_1(\mu_{k-l})} = \sup_{z \geq 0} (z^l e^{-M_1(z)}) \sup_{z \geq 0} (z^{k-l} e^{-M_1(z)}) \leq$$

$$\leq \sup_{z \geq 0} (z^k e^{-M_1(z)}) = \mu_k^l e^{-M_1(\mu_k)}.$$

Отже,

$$\Lambda \leq \mu_k^k e^{-M_1(\mu_k)} \left(\frac{1}{\bar{a}}\right)^l e^{M_1(\mu_{k-l})} \leq \left(\frac{1}{\bar{a}}\right)^l e^{k-l} \mu_k^k e^{-M_1(\mu_k)}.$$

Тут враховано, що $e^{M_1(\mu_k)} < e^k$. Справді,

$$M_1(\mu_k) = \int_0^{\mu_k} \mu_1(\xi) d\xi, \quad k \geq 1.$$

Згідно з теоремою про середнє значення

$$\forall k \geq 1 \;\; \exists \xi_k \in (0, \mu_k) \colon M_1(\mu_k) = \mu_k \mu_1(\xi_k).$$

Функція μ_1 є зростаючою і неперервною, тому $M_1(\mu_k) < \mu_k \mu_1(\mu_k) = k,\ k \geq 1$. Отже, $\exp M_1(\mu_k) < e^k$. Таким чином,

$$|\xi^k D_\xi^n \Phi_{t,R}(\xi)| \leq \bar{\tilde{c}} n! \left(\frac{\tilde{b}}{\rho_n}\right)^n (\alpha \mu_k)^k e^{\Omega_1(\rho_n) - M_1(\mu_k)} \sum_{l=0}^{k} C_k^l \left(\frac{1}{a}\right)^l (2e)^{k-l} =$$

$$= \alpha_0 n! \left(\frac{\tilde{b}}{\rho_n}\right)^n (\alpha \mu_k)^k e^{\Omega_1(\rho_n) - M_1(\mu_k)}, \tag{18}$$

де $\alpha_0 = 2c_0 \bar{c} \tilde{c} \bar{a}^{-1}$, $\alpha = \dfrac{1}{a} + 2e$, звідки й випливає, що $\Phi_{t,R}(\xi) \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ при кожному $t > 1$ і $R > 0$. Зауважимо також, що сталі в нерівності (18) не залежать від R.

Далі, не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $G(t,x) = G(t,-x)$ (або $G(t,x) = -G(t,-x)$), $x \in \mathbb{R}$, бо G завжди можна записати у вигляді суми $G_1 + G_2$, де

$$G_1(t,x) = \frac{1}{2}[G(t,x) + G(t,-x)], \quad G_2(t,x) = \frac{1}{2}[G(t,x) - G(t,-x)].$$

Тоді $\Phi_t(\xi)$ можна записати у вигляді

$$\Phi_t(\xi) = (G(t,\cdot) * \psi)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad t > 1.$$

Отже,

$$F[\Phi_t] = F[G(t,\cdot) * \psi] = F[G(t,\cdot)]F[\psi] = Q(t,\cdot)F[\psi].$$

Якщо $\psi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, то $F[\psi] \in W_M^{\Omega}(\mathbb{R})$. Крім того, як встановлено раніше, $Q(t,\cdot) \in W_M^{\Omega}(\mathbb{R})$ при кожному $t > 0$. Тоді $F[\Phi_t] \in W_M^{\Omega}(\mathbb{R})$, тобто $\Phi_t \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ при кожному $t > 1$. Звідси випливає також, що

$$J_{t,R}(\xi) := \Phi_t(\xi) - \Phi_{t,R}(\xi) = \int\limits_{|x|>R} G(t, x-\xi)\psi(x)dx$$

є елементом простору $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ при кожному $t > 1$ і $R > 0$. Далі безпосередньо переконуємося в тому, що $J_{t,R} \to 0$ при $R \to +\infty$ у просторі $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, враховуючи при цьому, що сталі в нерівностях (18) не залежать від $R > 0$. Отже, властивості а), б) виконуються.

Оскільки $f \in (W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}), *)'$ — згортувач у просторі $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, то $f * \check{\psi} \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$. Звідси, зокрема, отримуємо

$$|(f * \check{\psi})(y)| \leq c \exp\{-M_1(ay)\}, \quad y \in \mathbb{R},$$

сталі c, $a > 0$ не залежать від y. Враховуючи останню нерівність і оцінку (11), знаходимо

$$|\langle u(t,\cdot), \psi\rangle| \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(t,-y)||(f * \check{\psi})(y)|dy \leq \tilde{c}d^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-M_1(ay)\}dy =$$

$$= \omega_0 t^{-1} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Переходячи тут до границі при $t \to +\infty$, переконуємося, що $\langle u(t,\cdot), \psi\rangle \to 0$ при $t \to +\infty$ для довільної функції $\psi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, що й потрібно було довести.

Як приклад, розглянемо рівняння (4) з оператором A_φ, побудованим за функцією $\varphi(x) = -x^2/2$, $x \in \mathbb{R}$. У цьому випадку $A_\varphi = \left(-i\dfrac{d}{dx}\right)^2/2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2}{dx^2}$, а рівняння (4) — це рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (t,x) \in \Pi_T. \tag{19}$$

Функція $\varphi(z) = -\dfrac{z^2}{2}$ є елементом простору P_M^{Ω}, де $M(x) = x^2/2$, $\Omega(y) = y^2/2$. Справді, $e^{-z^2/2} \in W_{x^2/2}^{y^2/x}$, оскільки

$$|e^{-z^2/2}| = |e^{-(x+iy)^2/2}| = e^{-x^2/2 + y^2/2}.$$

Крім того, функція $-z^2/2$ — мультиплікатор у просторі $W_{x^2/2}^{y^2/2}$. Функція $Q_1(t,z) = e^{-tz^2/2}$ задовольняє умову (7). За теоремою 1 нелокальна m-точкова за часом задача для рівняння

(19) коректно розв'язна, якщо $f \in (W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}), *)'$, де Ω_1 і M_1 — функції, двоїсті за Юнгом до функцій M і Ω відповідно. У цьому випадку маємо $\Omega_1(y) = y^2/2$, $M_1(x) = x^2/2$ (див. приклад із п. 1). Отже, для рівняння (19) вказана задача коректно розв'язна, якщо $f \in (W_{x^2/2}^{y^2/2}(\mathbb{R}), *)'$, при цьому $u(t,x) = f * G(t,x)$, де

$$G(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\mu^{r+1}} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}}{r_1!\ldots r_m!} \frac{1}{\sqrt{\pi(\lambda,r)}} e^{-\frac{x^2}{2(\lambda,r)}},$$

$$(\lambda, r) = t_1 r_1 + \ldots + t_m r_m + t.$$

Зокрема, якщо $f = \delta \in (W_{x^2/2}^{y^2/2}(\mathbb{R}), *)'$, то $u(t,x) = G(t,x)$. Якщо $m = 1$ (випадок двоточкової задачі), $f = \delta$, то

$$u(t,x) = (\sqrt{2}\mu)^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)^r \frac{1}{\sqrt{\pi(t+rt_1)}} e^{-\frac{x^2}{2(t+rt_1)}}.$$

Література

1. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.
2. *Белавин И. А., Капица С. П., Курдюмов С. П.* Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1988. – **38**, № 6. – С. 885 – 902.
3. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач. – М.: Наука, 1980. – 208 с.
4. *Романко В. К.* Граничные задачи для одного класса дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. – 1974. – **10**, № 11. – С. 117 – 131.
5. *Романко В. К.* Нелокальные граничные задачи для некоторых систем уравнений // Мат. заметки. – 1985. – **37**, № 7. – С. 399 – 409.
6. *Макаров А. А.* Существование корректной двухточечной краевой задачи в слое для систем псевдодифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**, № 1. – С. 114 – 150.
7. *Чесалин В. И.* Задача с нелокальными граничными условиями для абстрактных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1979. – **15**, № 11. – С. 2104 – 2106.
8. *Ильків В. С., Пташник Б. И.* Некоторая нелокальная двухточечная задача для систем уравнений с частными производными // Сиб. мат. журн. – 2005. – **46**, № 11. – С. 119 – 129.
9. *Chabrowski J.* On non-local problem for elliptic linear equations // Funkcialaj ekvacioj. – 1980. – **32**. – P. 217 – 226.
10. *Lazetic N. L.* On classical solutions of mixed boundary problems for one-dimensional parabolic equation of second order // Pabl. Inst. Math. – 2000. – **67**. – P. 53 – 75.
11. *Гуревич Б. Л.* Некоторые пространства основных и обобщенных функций и проблема Коши для конечно-разностных схем // Докл. АН СССР. – 1954. – **99**, № 6. – С. 893 – 896.
12. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.
13. *Готинчан Т. І., Атаманюк Р. М.* Різні форми означення просторів типу W // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2011. – Вип. 111. – С. 21 – 26.
14. *Готинчан Т. І.* Про нетривіальність та вкладання просторів типу W // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2003. – Вип. 160. – С. 39 – 44.
15. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
16. *Городецький В. В., Колісник Р. С.* Оператори диференціювання нескінченного порядку в просторах типу C та їх застосування // Доп. НАН України. – 2004. – № 10. – С. 14 – 19.

Одержано 23.03.19