УДК 517.925.7

А. А. Мохонько, А. З. Мохонько (Нац. ун-т „Львов. политехника”)

О МЕРОМОРФНЫХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МЕРОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

For systems of linear differential equations whose dimension can be decreased, we establish estimates for the growth of meromorphic vector solutions. As an essentially new feature, we can mention the fact that no additional restrictions are imposed on the order of growth of coefficients of the system.

Для системи лінійних диференціальних рівнянь, що допускають зниження размірності, отримано оцінки зростання мероморфних вектор-розв’язків без обмежень на порядок зростання коефіцієнтів системи.

Обозначим через M поле мероморфных в $\mathbb{C}$ функций. В статье получены априорные оценки мероморфных вектор-решений (м.в.-р.) систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_j}{dz} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} y_k, \qquad a_{k,j} \in M, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Если P — множество полюсов всех коэффициентов системы, то любое вектор-решение такой системы имеет компоненты, являющиеся аналитическими функциями в $\mathbb{C} \setminus P$. Нас интересуют вектор-решения $W(z) = (w_1(z), \ldots, w_n(z))$, компоненты которых $w_j \in M,\ j = 1, \ldots, n$.

Приложения неванлинновской теории к аналитической теории дифференциальных уравнений хорошо известны [1 – 3]. В частности, при доказательстве теоремы 1 мы следуем методу [1]. Новым моментом является отказ от ограничений на порядок роста коэффициентов и решений системы. В работе [1] изучались свойства вектор-решений системы (1) в случае, когда коэффициенты и компоненты вектор-решений — целые функции. Основной идеей доказательства в [1] является понижение размерности системы. Такое преобразование приводит к системе с мероморфными коэффициентами и мероморфными компонентами вектор-решений (см. (28), (29)). Поэтому в данной статье предполагается, что коэффициенты и решения системы принадлежат полю M.

Используем стандартные обозначения теории мероморфных функций [4]. Символы Ландау $O(\ldots)$, $o(\ldots)$ используются в статье при $r \to +\infty$.

Рост функции $f \in M$ описывается неванлинновскими характеристиками $m(r,f),\ T(r,f)$ [4, с. 24 – 27]. Напомним, что

$$\begin{gathered} m(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi, \qquad \ln^+ x = \max(\ln x, 0), \quad x \geq 0, \\ \ln^+ \left| \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \right| \leq \sum_{\nu=1}^{n} \ln^+ |x_\nu| + \ln n. \end{gathered} \tag{2}$$

Если f — целая функция, то $T(r,f) = m(r,f)$. Через $D(r,f)$ обозначим любую из характеристик $T(r,f),\ m(r,f)$. Если $f, g \in M$, то [4, с. 44, 45]

$$D(r, f + g) \leq D(r, f) + D(r, g) + \ln 2, \qquad D(r, f \cdot g) \leq D(r, f) + D(r, g),$$
$$D\left(r, \frac{f}{g}\right) \leq D(r, f) + D(r, g) + O(1). \tag{3}$$

Функция $f \in M$ имеет конечный порядок роста $\rho[f]$, если

$$\rho = \rho[f] = \limsup_{r \to +\infty} \frac{\ln T(r, f)}{\ln r} < +\infty.$$

Далее через E обозначаем некоторые множества интервалов на $[0, +\infty)$, сумма длин которых конечна $(\mathrm{mes}\ E < +\infty)$.

Если f принадлежит M, то выполняются следующие соотношения [4, с. 122, 125, 131]:

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\ln r), \quad \text{если} \quad \rho[f] < +\infty, \quad k = 1, 2, \ldots,$$
$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = o(\ln r), \quad \text{если} \quad \rho[f] \leq 1, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\ln^+ T(r, f) + \ln r), \quad r \notin E, \quad \text{если} \quad \rho[f] = +\infty, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Если $F(f_1, \ldots, f_n)$ — рациональная функция от $f_1, \ldots, f_n \in M$, $\deg_{f_j} F = k_j$, $j = 1, \ldots, n$, то [5]

$$T(r, F(f_1, \ldots, f_n)) \leq \sum_{j=1,\ldots,n} k_j T(r, f_j) + O(1); \tag{6}$$

если $R(f_1, \ldots, f_n)$ — полином от $f_1, \ldots, f_n \in M$, $\deg_{f_j} R = k_j$, $j = 1, \ldots, n$, то

$$m(r, R(f_1, \ldots, f_n)) \leq \sum_{j=1,\ldots,n} k_j m(r, f_j) + O(1). \tag{7}$$

Если

$$F(z) = \frac{P(z, f(z))}{Q(z, f(z))} = \frac{a_{1t} f^t + \ldots + a_{11} f + a_{10}}{a_{2m} f^m + \ldots + a_{21} f + a_{20}},$$

где $f, a_{ij} \in M$, $a_{1t}, a_{2m} \not\equiv 0$, $d = \max(m, t)$, причем $P(z, w)$, $Q(z, w)$ взаимно просты как многочлены от w над полем M, то [6]

$$T(r, F) = d\,T(r, f) + O\left(\sum_{i,j} T(r, a_{ij})\right). \tag{8}$$

Если $W(z) = (w_1(z), \ldots, w_n(z))$ — м.в.-р. системы (1), то обозначим

$$T(r, W) = \max_{k=1,\ldots,n} T(r, w_k). \tag{9}$$

Пусть матрица коэффициентов системы (1) имеет вид

$$A = B_0(z) = \begin{pmatrix} s_1 & p_1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{2,1} & s_2 & p_2 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \ldots & p_{n-1} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & s_n \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Обозначим $(j = 1, \ldots, n,\ t = 1, \ldots, n-j+1)$

$$d_{jt}(A) = \begin{vmatrix} s_t & p_t & 0 & \ldots & 0 \\ a_{t+1,t} & s_{t+1} & p_{t+1} & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{t+j-2,t} & a_{t+j-2,t+1} & a_{t+j-2,t+2} & \ldots & p_{t+j-2} \\ a_{t+j-1,t} & a_{t+j-1,t+1} & a_{t+j-1,t+2} & \ldots & s_{t+j-1} \end{vmatrix}, \tag{11}$$

$$d_{0,t} \equiv 1, \qquad H_j(A) = \sum_{t=1}^{n+1-j} d_{j,t}(A). \tag{12}$$

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть система* (1), (10) *такова, что* $(m \in \{0, 1, \ldots, n-1\},\ j = 1, 2, \ldots, n - m - 1)$

$$m\big(r, d_{jt}(A)\big) = o\big(m(r, H_{n-m}(A))\big), \qquad r \notin E, \quad t = 1, \ldots, n-j+1. \tag{13}$$

Тогда существует не более m *линейно независимых м.в.-р.* $W_k(z) = (w_{1k}(z), \ldots, w_{nk}(z))$, $k = 1, \ldots, m$, *системы* (1), (10) *таких, что*

$$\ln\big(r \cdot T(r, W_k)\big) = o\big(m(r, H_{n-m}(A))\big), \quad r \notin E \tag{14}$$

(*скорость роста которых ограничена скоростью роста коэффициентов*).

Замечание. Применение более точных оценок (4) логарифмической производной для важных подклассов мероморфных функций приводит к таким утверждениям: 1) если коэффициенты система (1), (10) таковы, что

$$\begin{gathered} m(r, d_{jt}(A)) = O(\ln r), \qquad j = 1, 2, \ldots, n-m-1, \quad t = 1, \ldots, n-j+1, \\ m(r, H_{n-m}(A)) \neq O(\ln r), \end{gathered} \tag{15}$$

то система имеет не более m линейно независимых м.в.-р. $W_k,\ k = 1, 2, \ldots, m,$ конечного порядка роста; если

$$\begin{gathered} m\big(r, d_{jt}(A)\big) = o(\ln r), \quad j = 1, 2, \ldots, n-m-1, \quad t = 1, \ldots, n-j+1, \\ m\big(r, H_{n-m}(A)\big) \neq o(\ln r), \end{gathered} \tag{16}$$

то система имеет не более m линейно независимых м.в.-р. W_k порядка роста $\rho \leq 1$.

Соотношения (15) выполняются, например, если $d_{jk}(A)$ — рациональные функции, а $H_{n-m}(A)$ — трансцендентная функция. Действительно, любая трансцендентная функция растет быстрее любой рациональной функции [4, с. 49] ((6.26), (6.27)).

***Пример* 1.** Рассмотрим систему $y_1' = y_2,\ y_2' = e^{2z}y_1 + y_2$. Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \exp 2z & 1 \end{pmatrix}$, $d_{11}(A) = 0,\ d_{12} = 1;\ H_2(A) = -e^{2z},\ m(r, H_2(A)) = 2m(r, e^z)$. Тогда [7, с. 25] $m(r, e^z) = \dfrac{r}{\pi}$. Имеем $m(r, H_2(A)) = m(r, H_{2-0}(A)) = 2m(r, e^z) = \dfrac{2r}{\pi},\ 0 = m(r, d_{11}(A)) = m(r, d_{12}(A)) = o(m(r, H_{2-0}(A)))$. В этом примере $n = 2,\ m = 0$. Поэтому из теоремы следует, что рассматриваемая система не имеет м.в.-р. W таких, что $\ln^+ T(r, W) + \ln r = o\big(m(r, H_{2-0}(A))\big),\ r \notin E$. Действительно, эта система имеет два линейно независимых м.в.-р. $W_1 = \big(e^{e^z}, e^z e^{e^z}\big),\ W_2 = \big(e^{-e^z}, -e^z e^{-e^z}\big)$. Для целой функции $\exp\exp z$ выполняется [7, с. 26] $T(r, e^{e^z}) = m(r, e^{e^z}) \sim \dfrac{e^r}{(2\pi^3 r)^{1/2}},\ r \to +\infty$. Из предыдущего и (8) следует, что $T(r, e^z e^{-e^z}) = T(r, e^{e^z}) + O(T(r, e^z)) \sim \dfrac{e^r}{(2\pi^3 r)^{1/2}},\ r \to +\infty$. Поэтому, учитывая определения $W_1,\ W_2$, получаем $T(r, W_j) \sim \dfrac{e^r}{(2\pi^3 r)^{1/2}},\ r \to +\infty,\ j = 1, 2$. Следовательно, $r \sim \ln\big(r \cdot T(r, W_j)\big) \neq o\big(m(r, H_2(A))\big),\ r \to +\infty$, так как $m(r, H_2(A)) \sim \dfrac{2r}{\pi},\ r \to +\infty$.

***Пример* 2.** У системы $y_1' = y_2,\ y_2' = y_2(1 + e^z)$ матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 + e^z \end{pmatrix}$, $H_1(A) = H_{2-1}(A) = 1 + e^z;\ n = 2,\ m = 1,\ m(r, H_1(A)) = m(r, e^z + 1) = m(r, e^z) + O(1) \sim \dfrac{r}{\pi},\ r \to +\infty$. На основании теоремы рассматриваемая система имеет не более одного м.в.-р. W, для которого $\ln^+ T(r, W) + \ln r = o(m(r, H_1(A))),\ r \notin E$. Таким решением является м.в.-р. $W_1 = (1,\ 0)$. Вторым м.в.-р. системы, линейно независимым с W_1, является $W_2 = \big(e^{e^z},\ e^z e^{e^z}\big)$. Как отмечено в примере 1, $T(r, W_2) \sim \dfrac{e^r}{(2\pi^3 r)^{1/2}},\ r \to +\infty,\ \ln^+ T(r, W_2) + \ln r \sim r,\ r \to +\infty$. Поэтому $r \sim \ln(r \cdot T(r, W_2)) \neq o\big(m(r, H_1(A))\big),\ r \to +\infty$, так как $m(r, H_1(A)) \sim \dfrac{r}{\pi},\ r \to +\infty$.

Рассмотрим вектор $h(z) = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, где $h_j \in M$. Обозначим

$$Q_0(A, h) \equiv 1,$$

$$Q_k(A, h) = \begin{vmatrix} s_1 - h_1 & p_1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{2,1} & s_2 - h_2 & p_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & a_{k-1,3} & \ldots & p_{k-1} \\ a_{k,1} & a_{k,2} & a_{k,3} & \ldots & s_k - h_k \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{17}$$

Используя (17), записываем

$$Q_k = -h_k Q_{k-1} + \begin{vmatrix} s_1 - h_1 & p_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & s_2 - h_2 & p_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & a_{k-1,3} & \ldots & s_{k-1} - h_{k-1} & p_{k-1} \\ a_{k,1} & a_{k,2} & a_{k,3} & \ldots & a_{k,k-1} & s_k \end{vmatrix} =$$

$$= -h_k Q_{k-1} - Q_{k-2} h_{k-1} d_{1,k} + \begin{vmatrix} s_1 - h_1 & p_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & s_2 - h_2 & p_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & a_{k-1,3} & \ldots & s_{k-1} & p_{k-1} \\ a_{k,1} & a_{k,2} & a_{k,3} & \ldots & a_{k,k-1} & s_k \end{vmatrix} = \ldots$$

$$\ldots = d_{k,1}(A) - \sum_{i=0}^{k-1} Q_i(A,h) h_{i+1} d_{k-i-1,i+2}(A), \quad d_{0,k+1}(A) = 1. \tag{18}$$

Лемма 1. *Определитель $Q_k(A,h)$ можно представить в виде*

$$Q_k(A,h) = d_{k1}(A) - d_{k-1,1}(A) h_k + \sum_{j=0}^{k-2} d_{j1}(A) P_{jk}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{19}$$

где $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, P_{jk} — многочлен от функций h_t и $d_{\nu s}(A)$, $j+1 \leq t \leq k$, $j+2 \leq s \leq k$, $\nu < k$, степени не больше 1 по каждой из h_t, $d_{\nu s}$.

Доказательство. Учитывая определения (17), (11), имеем $(d_{01} = 1)$ $Q_1(A,h) = s_1 - h_1 = d_{11} - d_{01} h_1$, $Q_2(A,h) = d_{21} - d_{11} h_2 - d_{01}(d_{12} h_1 - h_1 h_2) = d_{21} - d_{11} h_2 - d_{01} P_{02}$, $Q_3(A,h) = d_{31} - d_{22} h_1 - h_2 Q_1(A,h) d_{13} - h_3 Q_2(A,h) = d_{31} - d_{21} h_3 + d_{11}(h_2 h_3 - h_2 d_{13}) + d_{01}(d_{13} h_1 h_2 - h_1 d_{22} + d_{12} h_1 h_3 - h_1 h_2 h_3) = d_{31} - d_{21} h_3 + d_{11} P_{13} + d_{01} P_{03}$. Условия леммы для многочленов P_{02}, P_{13}, P_{03} выполнены.

Допустим, что лемма доказана для всех Q_i, $i = 1, \ldots, k-1$, и докажем ее для Q_k, $k \geq 4$. Подставляя в (18) разложения Q_i вида (19), после простого преобразования получаем

$$Q_k = d_{k1} - h_k \Big(d_{k-1,1} - d_{k-2,1} h_{k-1} + \sum_{j=0}^{k-3} d_{j1} P_{j,k-1} \Big) -$$

$$- Q_1 h_2 d_{k-2,3} - Q_0 h_1 d_{k-2,2} - \sum_{i=2}^{k-2} \Big(d_{i1} - d_{i-1,1} h_i + \sum_{j=0}^{i-2} d_{j1} P_{j,i} \Big) h_{i+1} d_{k-i-1,i+2} =$$

$$= d_{k1} - h_k d_{k-1,1} - Q_1 h_2 d_{k-2,3} - Q_0 h_1 d_{k-2,2} -$$

$$- \sum_{i=2}^{k-2} \sum_{j=0}^{i-2} d_{j1} P_{j,i} h_{i+1} d_{k-i-1,i+2} - \sum_1 - \sum_2 + \sum_3,$$

где

$$\sum_1 = \sum_{j=0}^{k-3} d_{j1} P_{j,k-1} h_k - d_{k-2,1} h_{k-1} h_k \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{j=0}^{k-2} d_{j1} P^1_{j,k},$$

$$\sum_2 = \sum_{i=2}^{k-2} d_{i1} h_{i+1} d_{k-i-1,i+2} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{i=2}^{k-2} d_{i1} P^2_{i,k},$$

$$\sum_3 = \sum_{i=2}^{k-2} d_{i-1,1} h_i h_{i+1} d_{k-i-1,i+2} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{i=2}^{k-2} d_{i-1,1} P^3_{i-1,k},$$

$$Q_1 h_2 d_{k-2,3} = d_{11} h_2 d_{k-2,3} - d_{01} h_1 h_2 d_{k-2,3} \stackrel{\mathrm{df}}{=} d_{11} P^4_{1,k} + d_{01} P^4_{0,k}, \tag{20}$$

$$Q_0 h_1 d_{k-2,2} = d_{01} h_1 d_{k-2,2} \stackrel{\mathrm{df}}{=} d_{01} P^5_{0,k}, \qquad d_{01} = 1, \quad Q_0 = 1,$$

$$\sum_{i=2}^{k-2} \sum_{j=0}^{i-2} d_{j1} P_{j,i} h_{i+1} d_{k-i-1,i+2} = \sum_{j=0}^{k-4} d_{j1} \sum_{i=j+2}^{k-2} P_{j,i} h_{i+1} d_{k-i-1,i+2}.$$

Из предположения индукции о свойствах многочленов $P_{j,k-1}$ и определений многочленов $P^s_{j,k}$, $s = 1, 2, \ldots, 5$, $j = 0, 1, \ldots, k-2$, следует, что $P^s_{j,k}$ — некоторые многочлены от h_t и $d_{\nu s}$, $j+1 \le t \le k$, $j+2 \le t \le k$, $\nu < k$, степени не больше 1 по каждой из h_t, $d_{\nu s}$. Группируя слагаемые, содержащие d_{j1}, $j = 0, 1, \ldots, k-2$, получаем

$$\sum_1 + \sum_2 - \sum_3 - Q_1 h_2 d_{k-2,3} - Q_0 h_1 d_{k-2,2} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{j=0}^{k-2} d_{j1} P^*_{j,k}\,, \tag{21}$$

где $P^*_{j,k}$ — некоторые многочлены от h_t и $d_{\nu s}$, $j+1 \le t \le k$, $j+2 \le t \le k$, $\nu < k$, степени не больше 1 по каждой из h_t, $d_{\nu s}$. Подставляя (20), (21) в выражение для Q_k и группируя слагаемые, содержащие d_{j1}, $j = 0, 1, \ldots, k-2$, получаем (19).

Лемма 1 доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** Случай $m = n-1$ рассмотрим в более общей форме. Пусть дана система (1) с коэффициентами $a_{kj} \in M$ (условие (10) может не выполняться). Пусть $\mathrm{Sp}A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = H_1(A)$ — след матрицы A системы (1). Докажем, что система (1) не имеет $m+1 = n$ линейно независимых м.в.-р. W_k, $k = 1, \ldots, n$, таких, что

$$\max_{k=1,\ldots,n} \ln^+ T(r, W_k) + \ln r = o(m(r, \mathrm{Sp}A)), \quad r \notin E. \tag{22}$$

Допустим, что существуют n линейно независимых м.в.-р. W_k, $k = 1, \ldots, n$, для которых выполняется (22). Тогда W_k, $k = 1, \ldots, n$, — фундаментальная система решений системы (1) и ее детерминант $D(z)$ удовлетворяет равенству $\dfrac{D'(z)}{D(z)} = \mathrm{Sp}A$. Имеем

$$m(r, \mathrm{Sp}A) = m\left(r, \frac{D'(z)}{D(z)}\right) \stackrel{(5)}{=} O(\ln^+ T(r, D) + \ln r), \quad r \notin E. \tag{23}$$

Учитывая определение $D(z)$ и оценку (6), получаем

$$T(r, D) \le \max_{k=1,\ldots,n} T(r, W_k) + O(1),$$

$$\ln^+ T(r, D) \le \max_{k=1,\ldots,n} \ln^+ T(r, W_k) + O(1).$$

Отсюда и из (23) следует

$$m(r, \mathrm{Sp}A) = O(\ln^+ T(r, D) + \ln r) = O\Big(\max_{k=1,\ldots,n} \ln^+ T(r, W_k) + \ln r\Big), \quad r \notin E,$$

что противоречит (22).

Допустим теперь, что в (10) все $p_j \not\equiv 0,\ j = 1, \ldots, n-1$. Если $W = (w_1, \ldots, w_n)$ — нетривиальное м.в.-р. системы (1), (10), то из строения матрицы (10) следует, что $w_1 \not\equiv 0$.

Пусть $m = 0$. Тогда $n - m = n$,

$$H_{n-m}(A) = H_n(A) = d_{n1}(A). \tag{24}$$

Предположим, что существует нетривиальное м.в.-р. $W = (w_1, \ldots, w_n)$ системы (1), (10) такое, что

$$\ln^+ T(r, W) + \ln r = o(m(r, H_n(A)), \quad r \notin E. \tag{25}$$

Запишем систему (1), (10) в виде

$$\begin{aligned} &w_1(s_1 - w_1'/w_1) + p_1 w_2 = 0, \\ &w_1 a_{21} + w_2(s_2 - w_2'/w_2) + w_3 p_2 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &w_1 a_{n1} + \ldots + w_{n-1} a_{n\,n-1} + w_n(s_n - w_n'/w_n) = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Эта система имеет нетривиальное решение. Поэтому $Q_n(A, h_0) \equiv 0$, где $h_0 = (h_{01}, \ldots, h_{0n})$, $h_{0j} = w_j'/w_j,\ j = 1, \ldots, n$. Из леммы 1 следует, что

$$0 \equiv Q_n(A, h_0) \overset{(19)}{=} d_{n1}(A) - d_{n-1,1}(A) h_{0n} + \sum_{j=0}^{n-2} d_{j1}(A) P_{jn}, \tag{27}$$

где P_{jn} — некоторые многочлены от функций $h_{0t} = w_t'/w_t,\ j+1 \le t \le n$, и $d_{\nu s}(A),\ \nu < n$, $j + 2 \le s \le n$, степени не больше 1 по каждой из $h_{0t},\ d_{\nu s}$. Поэтому, учитывая (24), имеем

$$H_n(A) = d_{n-1,1}(A) h_{0n} - \sum_{j=0}^{n-2} d_{j1}(A) P_{jn}.$$

Из этого равенства, учитывая свойства многочленов P_{jn}, получаем

$$m(r, H_n(A)) \overset{(7)}{\le} \sum_{j=1}^{n} \left(r, \frac{w_j'}{w_j}\right) + \sum_{\substack{1 \le j \le n-1 \\ 1 \le t \le n-j+1}} m(r, d_{jt}) + O(1) \overset{(5),(13)}{\le}$$

$$\le O\left(\sum_{j=1}^{n} \ln^+ T(r, w_j) + \ln r\right) + o\big(m(r, H_n(A))\big), \quad r \notin E,$$

поэтому $m(r, H_n(A)) = O\big(\ln^+ T(r, W) + \ln r\big),\ r \notin E$, что противоречит (25).

Пусть теперь $0 < m < n - 1$, $m \in \mathbb{N}$. Предположим, что существует $m + 1$ линейно независимое м.в.-р. $W_k(z) = (w_{k1}(z), \ldots, w_{kn}(z)),\ k = 0, 1, 2, \ldots, m$, системы (1), (10) такое, что выполняется (14). Одно из этих $m + 1$ решений, например W_0, обозначим через U, $W_0 = U = (u_1, \ldots, u_n) = (w_{01}(z), \ldots, w_{0n}(z))$. Любое из оставшихся m м.в.-р. обозначим через $W=(w_1,\ldots,w_n)$. Поскольку U — нетривиальное м.в.-р. системы (1), (10), то $u_1\not\equiv 0$. Опишем процесс перехода от системы (1) с матрицей коэффициентов (10) размера n к системе дифференциальных уравнений с матрицей коэффициентов вида (10) и размера $n-1$.

Каждому из m м.в.-р. $W=(w_1,\ldots,w_n)$ системы (1), (10), поставим в соответствие вектор

$$V=(v_1,v_2,\ldots,v_n)=\left(\frac{w_1}{u_1},\, w_2-\frac{w_1u_2}{u_1},\ldots,w_n-\frac{w_1u_n}{u_1}\right),\quad v_1=\frac{w_1}{u_1}\not\equiv 0. \tag{28}$$

Из (1), (10) и (28) следует, что эти m векторов V (28) — решения системы [1] (формулы (3.9)–(3.13))

$$\begin{aligned}
&v_1'=v_2p_1/u_1,\\
&v_2'=v_2(s_2-p_1u_2/u_1)+p_2v_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&v_n'=v_2(a_{n2}-p_1u_n/u_1)+\sum_{k=3}^{n-1}a_{nk}v_k+s_nv_n,
\end{aligned}\tag{29}$$

матрица коэффициентов которой имеет вид

$$B=\left(\begin{array}{c|cccc}
0 & p_1/u_1 & 0 & \ldots & 0\\
\hline
0 & & & & \\
\vdots & & B_1 & & \\
0 & & & &
\end{array}\right), \tag{30}$$

где

$$B_1=\begin{pmatrix}
s_2-p_1u_2/u_1 & p_2 & 0 & \ldots & 0\\
a_{32}-p_1u_3/u_1 & s_3 & p_3 & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
a_{n2}-p_1u_n/u_1 & a_{n3} & a_{n4} & \ldots & s_n
\end{pmatrix}. \tag{31}$$

Установим связь между $d_{j,k-1}(B_1)$, $1\le j\le n-1$, $2\le k\le n-j$, и $d_{jk}(A)$.

Лемма 2. *Выполняются соотношения* $(d_{0,j+2}(A)=1)$

$$\begin{aligned}
&d_{j,k-1}(B_1)=d_{jk}(A),\qquad k>2,\quad 1\le j\le n-2,\\
&d_{j1}(B_1)=d_{j2}(A)+\sum_{k=1}^{j}Q_k(A,h)d_{j-k,k+2}(A),\quad j=1,2,\ldots,n-1,
\end{aligned}\tag{32}$$

где $h=h_0=(u_1'/u_1,\ldots,u_n'/u_n)=(w_{01}'/w_{01},\ldots,w_{0n}'/w_{0n})$.

Доказательство. Если $k > 2$, то первое из равенств (32) следует из определений $d_{j,k-1}(B_1)$ и матрицы (31). Если $k = 2$, то

$$d_{j,1}(B_1) \overset{(30)}{=} d_{j2}(A) - \frac{p_1}{u_1}\begin{vmatrix} u_2 & p_2 & 0 & \dots & 0 \\ u_3 & s_3 & p_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_j & a_{j,3} & a_{j,4} & \dots & p_j \\ u_{j+1} & a_{j+1,3} & a_{j+1,4} & \dots & s_{j+1} \end{vmatrix} =$$

$$= d_{j2}(A) - \frac{p_1 u_2}{u_1} d_{j-1,3} + \frac{p_1 p_2}{u_1}\begin{vmatrix} u_3 & p_3 & 0 & \dots & 0 \\ u_4 & s_4 & p_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_j & a_{j,4} & a_{j,5} & \dots & p_j \\ u_{j+1} & a_{j+1,4} & a_{j+1,5} & \dots & s_{j+1} \end{vmatrix} =$$

$$= d_{j2} - \frac{p_1 u_2}{u_1} d_{j-1,3} + \frac{p_1 p_2}{u_1} u_3 d_{j-2,4}(A) - \frac{p_1 p_2}{u_1} p_3 \begin{vmatrix} u_4 & p_4 & 0 & \dots & 0 \\ u_5 & s_5 & p_5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_j & a_{j,5} & a_{j,6} & \dots & p_j \\ u_{j+1} & a_{j+1,5} & a_{j+1,6} & \dots & s_{j+1} \end{vmatrix} =$$

$$= d_{j2}(A) + \sum_{k=1}^{j} (-1)^k \frac{u_{k+1}}{u_1} p_1 p_2 \dots p_k d_{j-k,k+2}(A).$$

Известно [1], что $(-1)^k \dfrac{u_{k+1}}{u_1} p_1 p_2 \dots p_k = Q_k(A,h),\ h = (u_1'/u_1, \dots, u_n'/u_n)$. Поэтому из предыдущего следует (32).

Лемма 2 доказана.

Матрица (31) имеет вид (10). На основании (29) каждый из m векторов (см. (28))

$$Y_1 = (v_2, v_3 \dots, v_n) \overset{\text{df}}{=} (v_{12}, v_{13}, \dots, v_{1n}) \tag{33}$$

является решением системы дифференциальных уравнений

$$Y_1' = B_1 Y_1 \tag{34}$$

размерности $n - 1$.

Используя одно решение $U = (u_1, \dots, u_n)$ из ранее имевшихся $m + 1$ м.в.-р. системы (1), (10), понижаем порядок этой системы на единицу. Получаем систему (34), (31), имеющую m м.в.-р. вида (33). Пусть $Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1m}$ — полученные указанным способом м.в.-р. системы (34), (31) (Y_1 — одно из этих решений). Из линейной независимости $m + 1$ м.в.-р. $W_0 = U = (u_1, \dots, u_n),\ W_j = (w_{j1}, \dots, w_{jn}),\ u_1, w_{j1} \not\equiv 0,\ j = 1, \dots, m,$ системы (1), (10) следует линейная независимость m м.в.-р. $Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{1m}$ системы (34), (31) $(Y_1 = (v_{12}, v_{13}, \ldots, v_{1n}),$ $v_{12} \not\equiv 0)$, причем из (28), (33), (9), (6) следует, что

$$T(r, Y_1) \overset{\mathrm{df}}{=} \max_{j=2,3,\ldots,n} T(r, v_j) \overset{(28),(6)}{\leq} \sum_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} T(r, w_{i,j}) + O(1). \tag{35}$$

Имеем $W_i = (w_{i1}, \ldots, w_{in}),\ i = 0, 1, \ldots, m,\ T(r, W_i) \overset{(9)}{=} \max\limits_{j=1,\ldots,n} T(r, w_{ij}),$

$$\sum_{j=1}^{n} T(r, w_{i,j}) \leq n \max_{j=1,\ldots,n} T(r, w_{i,j}) = nT(r, W_i), \tag{36}$$

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{n} T(r, w_{i,j}) \overset{(36)}{\leq} \sum_{i=0}^{m} nT(r, W_i) \leq n(m+1) \max_{i=0,1,\ldots,m} T(r, W_i).$$

Из последнего неравенства и из (35) следует, что

$$\max T(r, Y_1) \overset{\mathrm{df}}{=} \max_{t=1,\ldots,m} T(r, Y_{1,t}) = O\Big(\max_{i=0,1,\ldots,m} T(r, W_i)\Big). \tag{37}$$

При преобразовании (28) $m+1$ линейно независимое м.в.-р. $W_k(z),\ k = 0, 1, \ldots, m,$ системы (1), (10), переходит в m линейно независимых м.в.-р. $Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{1m}$ вида (33) системы (34), (31), причем выполняется оценка (37).

Используя решения $Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{1m}$, уменьшаем размерность матрицы A еще $m-1$ раз. В результате получаем системы дифференциальных уравнений

$$Y_k' = B_k Y_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{38}$$

размерности $n-k$, где $Y_k = (v_{k,k+1}, v_{k,k+2}, \ldots, v_{k,n})$, а матрица

$$B_k = \begin{pmatrix} s_{k+1} - p_k v_{k-1,k+1}/v_{k-1,k} & p_{k+1} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{k+2,k+1} - p_k v_{k-1,k+2}/v_{k-1,k} & s_{k+2} & p_{k+2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,k+1} - p_k v_{k-1,n}/v_{k-1,k} & a_{n,k+2} & a_{n,k+3} & \ldots & s_n \end{pmatrix}, \tag{39}$$

причем повторное применение оценки (37) м.в.-р. системы (38) на каждом шаге понижения порядка системы дает $(k = 1, \ldots, m)$

$$\max T(r, Y_k) \overset{\mathrm{df}}{=} \max_{t=1,2,\ldots,m-k+1} T(r, Y_{k,t}) = O\Big(\max_{i=0,1,\ldots,m} T(r, W_i)\Big). \tag{40}$$

М.в.-р. $Y_k = (v_{k,k+1}, v_{k,k+2}, \ldots, v_{k,n})$ системы (38), (39) поставим в соответствие вектор $h_k = (h_{k,k+1}, h_{k,k+2}, \ldots, h_{k,n})$, где $h_{k,k+p} = v'_{k,k+p}/v_{k,k+p},\ p = 1, 2, \ldots, n-k,\ k = 1, 2, \ldots, m,$ в частности $h_{m-1} = (h_{m-1,m}, h_{m-1,m+1}, \ldots, h_{m-1,m+i}, \ldots, h_{m-1,n})$, где $(i+1)$-й элемент этого вектора имеет вид $h_{m-1,m+i} = v'_{m-1,m+i}/v_{m-1,m+i},\ i = 0, 1, \ldots, n-m.$

Из (5) следует $(r \notin E)$, что

$$m(r, h_{k,k+p}) = m\left(r, \frac{v'_{k,k+p}}{v_{k,k+p}}\right) = O(\ln^+ T(r, v_{k,k+p}) + \ln r) \overset{(9)}{=}$$

$$\overset{(9)}{=} O\left(\ln^+\left(\max_{t=1,2,\ldots,m-k+1} T(r, Y_{k,t})\right) + \ln r\right) \overset{(40)}{=}$$

$$\overset{(40)}{=} O\left(\ln^+\left(\max_{i=0,1,\ldots,m} T(r, W_i)\right) + \ln r\right), \qquad p = 1, 2, \ldots, n-k, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{41}$$

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Выполняется равенство* $(j \in \mathbb{N},\ j \leq n-m)$

$$d_{j1}(B_m) = d_{j,m+1}(A) + d_{j,m}(A) + \ldots + d_{j,1}(A) + \tilde{P}_{mj}, \tag{42}$$

где $\tilde{P}_{mj} = \tilde{P}_{mj}(h_{k,k+p}, d_{\nu,s}(A))$ *— многочлены от* $h_{k,k+p},\ k = 0, 1, \ldots, m-1,\ p = 1, 2, \ldots, j,$ *и* $d_{\nu,s}(A),\ s = 1, 2, \ldots, m+j,\ \nu \leq j-1,$ *степени не больше* 1 *от каждой из функций* $h_{k,k+p}$, $d_{\nu,s}(A)$.

Продолжим доказательство теоремы. Понижая размерность матрицы A, мы использовали m м.в.-р., а по предположению их $m+1$, значит, система $Y'_m = B_m Y_m$ (см. (38), (39)) имеет одно нетривиальное м.в.-р. $Y_m = (v_{m,m+1}, v_{m,m+2}, \ldots, v_{m,n})$, для которого выполняется (см. (40))

$$T(r, Y_m) = O\left(\max_{i=0,1,\ldots,m} T(r, W_i)\right). \tag{43}$$

Преобразуем систему $Y'_m = B_m Y_m$ к виду, аналогичному (26). В результате получим систему линейных однородных уравнений с определителем матрицы коэффициентов $Q_{n-m}(B_m, h_m)$ (см. (17)), имеющую нетривиальное решение $Y_m = (v_{m,m+1}, v_{m,m+2}, \ldots, v_{m,n})$. Поэтому $Q_{n-m}(B_m, h_m) \equiv 0$. Отсюда, учитывая (18), получаем $(h_m = (h_{m,m+1}, h_{m,m+2}, \ldots$ $\ldots, h_{m,m+i}, \ldots, h_{m,n}),\ h_{m,m+i} = \dfrac{v'_{m,m+i}}{v_{m,m+i}},\ i = 1, 2, \ldots, n-m,\ Q_0(B_m, h_m) = 1,$ $d_{0,n-m+1}(B_m) = 1)$

$$d_{n-m,1}(B_m) = h_{m,n} Q_{n-m-1}(B_m, h_m) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-m-2} Q_i(B_m, h_m) h_{m,m+i+1} d_{n-m-i-1,i+2}(B_m). \tag{44}$$

Применим к $Q_i(B_m, h_m),\ i \leq n-m-1$, лемму 1 (см. (19)), а к $d_{j1}(B_m),\ j \leq n-m-1$, формулу (42). Учитывая, что $d_{j,t}(B_m) = d_{j,m+t}(A)$ при $t \geq 2$ и $j = 1, 2, \ldots, n-m$ (см. (39)), получаем

$$d_{n-m,1}(B_m) \overset{(44)}{=} P(d_{\nu,s}(A), h_{m,m+p}), \tag{45}$$

где P — многочлен степени не больше 1 от $d_{\nu,s}(A),\ \nu < n-m,\ s = 1, 2, \ldots, n$, и $h_{m,m+p}$, $p = 1, 2, \ldots, n-m$. Из (42) при $j = n-m$ следует, что

$$d_{n-m,1}(B_m) = d_{n-m,m+1}(A) + d_{n-m,m}(A) + \ldots + d_{n-m,1}(A) + \tilde{P}_{m,n-m}, \tag{46}$$

$\tilde{P}_{m,n-m} = \tilde{P}_{m,n-m}(h_{k,k+p}, d_{\nu,s}(A))$ — многочлен от $h_{k,k+p},\ k = 0, 1, \ldots, m-1,\ p = 1, 2, \ldots, n-$ $-m$, и $d_{\nu,s}(A),\ s = 1, 2, \ldots, n,\ \nu \leq n-m-1$, степени не больше 1 от каждой из функций

$h_{k,k+p},\ d_{\nu,s}(A)$. Учитывая определение $H_{n-m}(A)$ (12), а также равенства (45), (46) и свойства многочленов $P(d_{\nu,s}(A), h_{m,m+p}),\ \tilde{P}_{m,n-m}$, получаем

$$H_{n-m}(A) = d_{n-m,m+1}(A) + d_{n-m,m}(A) + \ldots + d_{n-m,1}(A) = R_{m,n-m}, \tag{47}$$

где $R_{m,n-m} = R_{m,n-m}(h_{k,k+p}, d_{\nu,s}(A))$ — многочлены от $h_{k,k+p},\ k = 0, 1, \ldots, m,\ p = 1, 2, \ldots \ldots, n-m$, и $d_{\nu,s}(A),\ s = 1, 2, \ldots, n,\ \nu \leq n-m-1$, степени не больше 1 по каждой переменной.

Из равенства (47), учитывая свойства многочленов $R_{m,n-m}$ и соотношения (7), (41), имеем $(r \notin E)$

$$m(r, H_{n-m}(A)) \overset{(7)}{\leq} \sum_{\substack{k=0,1,\ldots,m \\ p=1,2,\ldots,n-m}} m(r, h_{k,k+p}) + \sum_{\substack{s=1,2,\ldots,n \\ \nu\leq n-m-1}} m(r, d_{\nu,s}(A)) + O(1) \overset{(41),(13)}{=}$$

$$\overset{(41),(13)}{=} O\Big(\ln^+\Big(\max_{i=0,1,\ldots,m} T(r, W_i)\Big) + \ln r\Big) + o(m(r, H_{n-m}(A))).$$

Отсюда получаем $m(r, H_{n-m}(A)) = O\big(\ln^+(\max_{i=0,1,\ldots,m} T(r, W_i)) + \ln r\big),\ r \notin E$, что противоречит (14). Случай, когда в (10) некоторые из $p_j \equiv 0$, рассматривается аналогично [1].

Теорема доказана.

***Доказательство леммы* 3.** Так же, как и в (32), выразим $d_{j1}(B_m)$ через определители матрицы B_{m-1}. Используя (18) и (32), получаем $(B_0 = A,\ d_{0,j+2}(B_{m-1}) = 1$ (см. (12), (10)))

$$d_{j1}(B_m) = d_{j2}(B_{m-1}) + Q_j(B_{m-1}, h_{m-1}) + \sum_{i=1}^{j-1} Q_i(B_{m-1}, h_{m-1}) d_{j-i,i+2}(B_{m-1}). \tag{48}$$

Учитывая (17), имеем $Q_0(A, h) \equiv 1,\ Q_1(A, h) = s_1 - h_1 = d_{11}(A) - h_1,\ Q_2(A, h) = d_{21}(A) - - d_{11}(A)h_2 - d_{01}(A)(d_{12}(A)h_1 + h_1 h_2)$, поэтому

$$Q_0(B_{m-1}, h_{m-1}) \equiv 1, \qquad Q_1(B_{m-1}, h_{m-1}) = d_{11}(B_{m-1}) - h_{m-1,m},$$

где $h_{m-1} = (h_{m-1,m}, h_{m-1,m+1}, \ldots, h_{m-1,n}),\ h_{m-1,m+i} = \dfrac{v'_{m-1,m+i}}{v_{m-1,m+i}},\ i = 0, 1, \ldots, n-m$. Далее $(d_{0,j+1}(B_{m-1}) = 1)$

$$Q_j(B_{m-1}, h_{m-1}) \overset{(18)}{=} d_{j,1}(B_{m-1}) - h_{m-1,m} d_{j-1,2}(B_{m-1}) -$$

$$-(d_{11}(B_{m-1}) - h_{m-1,m}) h_{m-1,m+1} d_{j-2,3}(B_{m-1}) -$$

$$-\sum_{i=2}^{j-1} Q_i(B_{m-1}, h_{m-1}) h_{m-1,m+i} d_{j-i-1,i+2}(B_{m-1}) \overset{(19)}{=}$$

$$\overset{(19)}{=} d_{j,1} - h_{m-1,m} d_{j-1,2} - (d_{11} - h_{m-1,m}) h_{m-1,m+1} d_{j-2,3} -$$

$$-\sum_{i=2}^{j-1} \Big(d_{i1} - d_{i-1,1} h_{m-1,m-1+i} + \sum_{t=0}^{i-2} d_{t1} P_{ti}\Big) h_{m-1,m+i} d_{j-i-1,i+2}, \tag{49}$$

где $d_{t1} = d_{t1}(B_{m-1})$, $P_{ti} = P_{ti}\big(h_{m-1,m-1+p}, d_{\nu,s}(B_{m-1})\big)$ — некоторые многочлены от $h_{m-1,m-1+p}$ и $d_{\nu,s}(B_{m-1})$, $p = t+1, t+2, \ldots, i$, $s = t+2, t+3, \ldots, i$, $\nu \le i-1$, $i = 2, 3, \ldots, j-1$, $t = 0, 1, \ldots, i-2$, степени не больше 1 по каждой из $h_{m-1,m-1+p}$ и $d_{\nu,s}(B_{m-1})$. Группируя в (49) слагаемые, содержащие $d_{i1} = d_{i1}(B_{m-1})$, $i = 0, 1, \ldots, j-1$, получаем $(d_{0i} = 1)$

$$Q_j(B_{m-1}, h_{m-1}) = d_{j,1}(B_{m-1}) + \sum_{i=0}^{j-1} d_{i1}(B_{m-1}) P^*_{ij}\big(h_{m-1,m-1+p}, d_{\nu,s}(B_{m-1})\big), \qquad (50)$$

где $P^*_{ij}\big(h_{m-1,m-1+p}, d_{\nu,s}(B_{m-1})\big)$ — некоторые многочлены от $h_{m-1,m-1+p}$ и $d_{\nu,s}(B_{m-1})$, $p = i+1, i+2, \ldots, j$, $s = i+2, i+3, \ldots, j$, $\nu \le j-1$, $i = 0, 1, \ldots, j-1$, степени не больше 1 по каждой из $h_{m-1,m-1+p}$ и $d_{\nu,s}(B_{m-1})$.

Преобразуем сумму в правой части (48) $\big(Q_1(B_{m-1}, h_{m-1}) = d_{11} - h_{m-1,m}\big)$:

$$\sum_{i=1}^{j-1} Q_i(B_{m-1}, h_{m-1}) d_{j-i,i+2}(B_{m-1}) \overset{(19)}{=} (d_{11} - h_{m-1,m}) d_{j-1,3} +$$

$$+ \sum_{i=2}^{j-1} \left(d_{i1} - d_{i-1,1} h_{m-1,m-1+i} + \sum_{t=0}^{i-2} d_{t1} P_{ti} \right) d_{j-i,i+2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{j-1} d_{i1}(B_{m-1}) P^\star_{ij}\big(h_{m-1,m-1+p}, d_{\nu,s}(B_{m-1})\big), \quad d_{01}(B_{m-1}) = 1, \qquad (51)$$

где $P_{ti} = P_{ti}\big(h_{m-1,m-1+p}, d_{\nu,s}(B_{m-1})\big)$ — разные многочлены от $h_{m-1,m-1+p}$ и $d_{\nu,s}(B_{m-1})$ степени не больше 1 по каждой переменной, $p = t+1, t+2, \ldots, i$, $s = t+2, t+3, \ldots, i$, $\nu \le i-1$, $i = 2, 3, \ldots, j-1$, $t = 0, 1, \ldots, i-2$, $P^\star_{ij}(h_{m-1,m-1+p}, d_{\nu,s}(B_{m-1}))$ — разные многочлены от $h_{m-1,m-1+p}$ и $d_{\nu,s}(B_{m-1})$, степени не больше 1 по каждой из $h_{m-1,m-1+p}$ и $d_{\nu,s}(B_{m-1})$, $p = i+1, i+2, \ldots, j$, $s = i+2, i+3, \ldots, j+1$, $\nu \le j-1$, $i = 1, 2, \ldots, j-1$.

Подставляя (50), (51) в (48) и группируя слагаемые с $d_{i1}(B_{m-1})$, $i = 1, 2, \ldots, j-1$, получаем

$$d_{j1}(B_m) = d_{j,1}(B_{m-1}) + d_{j2}(B_{m-1}) + \sum_{i=0}^{j-1} d_{i1}(B_{m-1}) P_{ij}, \qquad (52)$$

где $P_{ij} = P_{ij}\big(h_{m-1,m-1+p}, d_{\nu,s}(B_{m-1})\big)$ — многочлены от $h_{m-1,m-1+p}$ и $d_{\nu,s}(B_{m-1})$ степени не больше 1 по каждой из $h_{m-1,m-1+p}$ и $d_{\nu,s}(B_{m-1})$, $p = i+1, i+2, \ldots, j$, $s = i+2, i+3, \ldots, j+1$, $\nu \le j-1$, $i = 1, 2, \ldots, j-1$. Но (см. (39), (31), (11)) $d_{\nu,s}(B_{m-1})) = d_{\nu,m+s-1}(A)$ при $s \ge 2$. Поэтому

$$d_{j1}(B_m) = d_{j,1}(B_{m-1}) + d_{j,m+1}(A) + \sum_{i=0}^{j-1} d_{i1}(B_{m-1}) P_{ij}(h_{m-1,m-1+p}, d_{\nu,m+s-1}(A)), \qquad (53)$$

где $P_{ij}\big(h_{m-1,m-1+p}, d_{\nu,m+s-1}(A)\big)$ — многочлены от $h_{m-1,m-1+p}$ и $d_{\nu,m+s-1}(A)$ степени не больше 1 по каждой из $h_{m-1,m-1+p}$ и $d_{\nu,m+s-1}(A)$, $p = i+1, i+2, \ldots, j$, $s = i+2, i+3, \ldots, j+1$, $\nu \le j-1$, $i = 1, 2, \ldots, j-1$.

Докажем формулу (42). Если $m = 1$, то из (53) имеем ($B_0 = A$, $h_0 = \big(w'_{01}/w_{01}, \ldots \ldots, w'_{0n}/w_{0n}\big)$, $h_{0,p} = w'_{0p}/w_{0p}$ (см. (32)))

$$d_{i1}(B_1) = d_{i,1}(A) + d_{i,2}(A) + \sum_{t=0}^{i-1} d_{t1}(A) P_{ti}(h_{0,p}; d_{\nu,s}(A)) =$$

$$= d_{i,1}(A) + d_{i,2}(A) + \tilde{P}_{1i}, \qquad i \in \mathbb{N}, \quad i \leq n-1, \tag{54}$$

где $\tilde{P}_{1i}$ — многочлен по $h_{0,p}$ и $d_{\nu,s}(A)$, $p = 1, 2, \ldots, i$, $s = 1, 2, \ldots, i+1$, $\nu < i$, степени не больше 1 по каждой из функций.

Пусть для всех $i \in \mathbb{N}$, $i \leq j \leq n-m$, $2 \leq m$, справедливо равенство

$$d_{i1}(B_{m-1}) = d_{i,1}(A) + d_{i,2}(A) + \ldots + d_{i,m}(A) + \tilde{P}_{m-1,i}, \quad i \leq n-m, \tag{55}$$

где $\tilde{P}_{m-1,i}$ — многочлен от h_{0p}, $h_{1,p+1}, \ldots, h_{m-2,m-2+p}$ и $d_{\nu,s}(A)$, $p = 1, 2, \ldots, i$, $s = 1, 2, \ldots, i+$ $+\, m-1$, $\nu < i$, степени не больше 1 по каждой из $h_{k,k+t}$ и $d_{\nu,s}(A)$.

Подставляя (55) в (53), получаем

$$d_{j1}(B_m) = d_{j,1}(A) + d_{j,2}(A) + \ldots + d_{j,m}(A) + d_{j,m+1}(A) + \tilde{P}_{m-1,j} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{j-1} (d_{i,1}(A) + \ldots + d_{i,m}(A) + \tilde{P}_{m-1,i}) P_{ij}(h_{m-1,m-1+p}, d_{\nu,m+s-1}(A)) =$$

$$= d_{j,1}(A) + d_{j,2}(A) + \ldots + d_{j,m+1}(A) + \tilde{P}_{m,j},$$

где $\tilde{P}_{m,j}$ — многочлен от h_{0p}, $h_{1,p+1}, \ldots, h_{m-1,m-1+p}$ и $d_{\nu,s}(A)$, $p = 1, 2, \ldots, j$, $s = 1, 2, \ldots, j+$ $+\, m$, $\nu < j$, степени не больше 1 по каждой из $h_{k,k+t}$ и $d_{\nu,s}(A)$. Здесь мы учли, что $\tilde{P}_{m-1,i}$ содержит $d_{\nu,s}(A)$ с индексами $s = 1, 2, \ldots, i+m-1$, а в $P_{ij}(h_{m-1,m-1+p}, d_{\nu,m+s-1}(A))$ входят $d_{\nu,m+s-1}(A)$ с индексами $s = i+2, i+3, \ldots, j+1$. Далее, в $\tilde{P}_{m-1,i}$ входят также $h_{0p}, h_{1,p+1}, \ldots, h_{m-2,m-2+p}$ при $p = 1, 2, \ldots, i$, а в $P_{ij}(h_{m-1,m-1+p}, d_{\nu,m+s-1}(A))$ — $h_{m-1,m-1+p}$ с индексами $p = i+1, i+2, \ldots, j$.

Лемма 3 доказана.

Литература

1. *Hengartner W.* Über die Wachstumsordnung eines linearen Systems von Differentialgleichungen mit ganzen Funktionen als Koeffizienten // Comment. Math. Helv. – 1967. – **42**, № 1. – С. 60 – 80.
2. *Steinmetz N.* Nevanlinna theory, normal families, and algebraic differential equations. – Springer Int. Publ. AG, 2017. – 235 p.
3. *Мохонько А. А.* Теорема Мальмквиста для решений дифференциальных уравнений в окрестности логарифмической особой точки // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 4. – С. 476 – 483.
4. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
5. *Мохонько А. З., Мохонько В. Д.* Оценки неванлинновских характеристик некоторых классов мероморфных функций и их приложения к дифференциальным уравнениям // Сиб. мат. журн. – 1974. – **15**, № 6. – С. 1305 – 1322.
6. *Мохонько А. З.* Поле алгеброидных функций и оценки их неванлинновских характеристик // Сиб. мат. журн. – 1981. – **22**, № 3. – С. 213 – 218.
7. *Хейман У. К.* Мероморфные функции. – М.: Изд-во иностр. лит., 1966. – 287 с.

Получено 15.07.18