УДК 517.928

М. К. Дауылбаев, А. Б. Уаисов (Казах. нац. ун-т им. аль-Фараби, Ин-т математики и мат. моделирования, Алматы, Казахстан)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ *

We study the asymptotic behavior of the solutions of a boundary-value problem with boundary jumps for linear integro-differential equations of the third order with small parameters at the two highest derivatives. The asymptotic convergence of the solution of a singularly perturbed integrodifferential boundary-value problem to the solution of the corresponding modified degenerate boundary-value problem is proved.

Вивчається асимптотична поведінка розв'язків крайової задачі з граничними стрибками для лінійних інтегро-диференціальних рівнянь третього порядку з малими параметрами при двох старших похідних. Показано асимптотичну збіжність розв'язку сингулярно збуреної інтегро-диференціальної крайової задачі до розв'язку відповідної модифікованої виродженої крайової задачі.

1. Введение. Математическими моделями многих процессов в физике, химии, биологии, механике и технике являются дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения, содержащие малые параметры при старших производных. Такие уравнения называются сингулярно возмущенными. В развитие основных направлений теории внесли существенный вклад А. Н. Тихонов [1, 2], Л. С. Понтрягин [3], Е. Ф. Мищенко [4], Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский [5, 6], М. И. Вишик, Л. А. Люстерник [7, 8], В. А. Треногин [9], Н. Х. Розов [4], А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов [10, 11], С. А. Ломов [12], М. И. Иманалиев [13], К. А. Касымов [14 – 17] и др.

В работах [8, 14] впервые изучены сингулярно возмущенные нелинейные уравнения второго порядка с неограниченными при стремлении малого параметра к нулю начальными условиями. Характерной особенностью этих задач является то, что решение сингулярно возмущенной начальной задачи стремится к решению вырожденного уравнения с измененными начальными условиями. В таком случае говорят, что имеет место явление начального скачка. Наиболее общие случаи задачи Коши с начальными скачками для сингулярно возмущенных нелинейных систем обыкновенных и интегро-дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных гиперболического типа изучены К. А. Касымовым [15 – 17]. Краевые задачи для сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, имеющие начальные скачки, рассмотрены в [18 – 23].

При исследовании некоторых краевых задач было обнаружено, что некоторые производные решения при достаточно малых значениях параметра становятся бесконечно большими на обоих концах интервала. Такие краевые задачи называются краевыми задачами с граничными скачками. Краевые задачи с граничными скачками разных порядков для обыкновенных дифференциальных уравнений рассмотрены в [24, 25], а для интегро-дифференциальных уравнений — в [26, 27].

* Частично поддержана грантом № AP05132587 „Краевые задачи для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с непрерывным и кусочно-постоянным аргументом” (2018 – 2020) Комитета по науке Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Настоящая работа посвящена исследованию асимптотического поведения решений краевой задачи для линейных интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка с малым параметром при двух старших производных в случае граничных скачков одинакового порядка, т. е. когда на концах заданного промежутка некоторые производные решения имеют одинаковые порядки роста при стремлении малого параметра к нулю, что является одной из особенностей рассматриваемой краевой задачи.

Полученные результаты были доложены на международной конференции „Математический анализ, дифференциальное уравнение и их приложения”, посвященной 80-летию со дня рождения академика А. М. Самойленко [28].

2. Постановка задачи и вспомогательные результаты. Рассмотрим сингулярно возмущенное интегро-дифференциальное уравнение

$$L_\varepsilon y(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A_0(t) y'' + A_1(t) y' + A_2(t) y = F(t) + \int\limits_0^1 \sum_{i=0}^{2} H_i(t,x) y^{(i)}(x,\varepsilon)\, dx \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$$h_1 y(t,\varepsilon) \equiv y(0,\varepsilon) = \alpha_1, \quad h_2 y(t,\varepsilon) \equiv y'(0,\varepsilon) = \alpha_2, \quad h_3 y(t,\varepsilon) \equiv y'(1,\varepsilon) = \alpha_3, \qquad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, а $\alpha_i,\ i = \overline{1,3}$, — известные постоянные.

Пусть выполнены следующие условия:

I. Функции $A_i(t),\ i = \overline{0,2},\ F(t)$ на отрезке $0 \le t \le 1$, а $H_0(t,x),\ H_1(t,x),\ H_2(t,x)$ в области $D = \{0 \le t \le 1, 0 \le x \le 1 =\}$ являются достаточно гладкими, т. е. непрерывно дифференцируемыми необходимое количество раз.

II. Корни уравнения $\mu^2 + A_0(t)\mu + A_1(t) = 0$ удовлетворяют неравенствам $\mu_1(t) \le -\gamma_1 < 0$, $\mu_2(t) \ge \gamma_2 > 0$.

Фундаментальная система решений (ФСР) сингулярно возмущенного однородного дифференциального уравнения

$$L_\varepsilon y(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A_0(t) y'' + A_1(t) y' + A_2(t) y = 0, \qquad (3)$$

соответствующего уравнению (1), имеет при $\varepsilon \to 0$ асимптотическое представление [15]

$$y_1^{(q)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^q} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mu_1(x)\,dx\right)\bigl(\mu_1^q(t) y_{10}(t) + O(\varepsilon)\bigr), \quad q = \overline{0,2},$$

$$y_2^{(q)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^q} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^1 \mu_2(x)\,dx\right)\bigl(\mu_2^q(t) y_{20}(t) + O(\varepsilon)\bigr), \quad q = \overline{0,2}, \qquad (4)$$

$$y_3^{(q)}(t,\varepsilon) = y_{30}^{(q)}(t) + O(\varepsilon), \quad q = \overline{0,2},$$

где функция $y_{30}(t) = \exp\left(-\int_0^t \frac{A_2(x)}{A_1(x)}dx\right)$ является решением однородного вырожденного дифференциального уравнения $L_0 y(t) \equiv A_1(t) y' + A_2(t) y = 0$ с начальным условием $y(0) = 1$, а функции $y_{i0}(t),\ i=1,2,$ — решения задачи

$$p_i(t)y_{i0}'(t)+q_i(t)y_{i0}(t)=0,\quad y_{i0}(0)=1,\quad i=1,2,$$

где

$$p_i(t)=(A_0(t)+2\mu_i(t))\mu_i(t),\qquad q_i(t)=3\mu_i'(t)\mu_i(t)+A_0(t)\mu_i'(t)+A_2(t).$$

Вронскиан, составленный из ФСР уравнения (3) с помощью (4), имеет асимптотическое представление

$$W(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^3}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\mu_1(x)\,dx-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^1\mu_2(x)\,dx\right)\mu_1(t)\mu_2(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t))\times$$
$$\times y_{10}(t)y_{20}(t)y_{30}(t)+O(\varepsilon). \tag{5}$$

Введем следующие вспомогательные функции:

$$K_0(t,s,\varepsilon)=\frac{P_0(t,s,\varepsilon)}{W(s,\varepsilon)},\qquad K_1(t,s,\varepsilon)=\frac{P_1(t,s,\varepsilon)}{W(s,\varepsilon)}, \tag{6}$$

где $W(s,\varepsilon)$ — вронскиан из ФСР уравнения (3), а $P_0(t,s,\varepsilon),\ P_1(t,s,\varepsilon)$ — определители, полученные заменой третьей строки вронскиана $W(s,\varepsilon)$ строками $(y_1(t,\varepsilon),0,y_3(t,\varepsilon))$ и $(0,y_2(t,\varepsilon),0)$ соответственно. Функции $K_0(t,s,\varepsilon),\ K_1(t,s,\varepsilon)$ удовлетворяют по переменной t однородному дифференциальному уравнению (3), т. е.

$$L_\varepsilon K_0(t,s,\varepsilon)=0,\qquad L_\varepsilon K_1(t,s,\varepsilon)=0,\qquad 0\le t\le 1,\quad t\ne s.$$

Функция $K(t,s,\varepsilon)=K_0(t,s,\varepsilon)+K_1(t,s,\varepsilon)$ является функцией Коши, т. е. является решением задачи

$$L_\varepsilon K(t,s,\varepsilon)=0,\qquad K(s,s,\varepsilon)=0,\qquad K'(s,s,\varepsilon)=0,\qquad K''(s,s,\varepsilon)=1.$$

Из (6) с помощью (4), (5) для вспомогательных функций $K_0(t,s,\varepsilon),\ K_1(t,s,\varepsilon)$ получаем асимптотические при $\varepsilon\to 0$ представления

$$K_0^{(q)}(t,s,\varepsilon)=$$
$$=\varepsilon^2\left(\frac{y_{30}^{(q)}(t)}{y_{30}(s)\mu_1(s)\mu_2(s)}-\frac{\mu_1^q(t)y_{10}(t)}{\varepsilon^q y_{10}(s)\mu_1(s)\left(\mu_2(s)-\mu_1(s)\right)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu_1(x)\,dx}+O(\varepsilon)\right),\quad t\ge s,$$
$$K_1^{(q)}(t,s,\varepsilon)= \tag{7}$$
$$=\varepsilon^2\left(\frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)}{\varepsilon^q y_{20}(s)\mu_2(s)\left(\mu_2(s)-\mu_1(s)\right)}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^s\mu_2(x)\,dx}+O(\varepsilon)\right),\qquad t\le s,\quad q=\overline{0,2}.$$

Пусть функции $\Phi_i(t,\varepsilon),\ i=1,2,3,$ являются решением задачи

$$L_\varepsilon\Phi_i(t,\varepsilon)=0,\quad h_k\Phi_i(t,\varepsilon)=\delta_{ki},\quad i,k=1,2,3,$$

где δ_{ki} — символ Кронекера. Функции $\Phi_i(t,\varepsilon),\ i=1,2,3,$ назовем граничными функциями краевой задачи (1), (2). Граничные функции определяются формулой

$$\Phi_i(t,\varepsilon)=\frac{I_i(t,\varepsilon)}{I(\varepsilon)},\quad i=\overline{1,3}, \tag{8}$$

где

$$I(\varepsilon)=\begin{vmatrix} h_1y_1(t,\varepsilon) & h_1y_2(t,\varepsilon) & h_1y_3(t,\varepsilon)\\ h_2y_1(t,\varepsilon) & h_2y_2(t,\varepsilon) & h_2y_3(t,\varepsilon)\\ h_3y_1(t,\varepsilon) & h_3y_2(t,\varepsilon) & h_3y_3(t,\varepsilon)\end{vmatrix}=\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\mu_1(0)\mu_2(1)y_{20}(1)+O(\varepsilon)\right)\neq 0, \tag{9}$$

а $I_i(t,\varepsilon)$ — определитель, получаемый из $I(\varepsilon)$ заменой его i-й строки строкой $(y_1(t,\varepsilon),\ y_2(t,\varepsilon),$ $y_3(t,\varepsilon))$. Например, определитель $I_1(t,\varepsilon)$ имеет вид

$$I_1(t,\varepsilon)=\begin{vmatrix} y_1(t,\varepsilon) & y_2(t,\varepsilon) & y_3(t,\varepsilon)\\ h_2y_1(t,\varepsilon) & h_2y_2(t,\varepsilon) & h_2y_3(t,\varepsilon)\\ h_3y_1(t,\varepsilon) & h_3y_2(t,\varepsilon) & h_3y_3(t,\varepsilon)\end{vmatrix}=\frac{1}{\varepsilon^2}y_{30}(t)y_{20}(1)\mu_2(1)\mu_1(0)-$$

$$-\frac{\mu_2(1)y_{20}(1)y_{10}(t)y'_{30}(0)}{\varepsilon}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(x)\,dx}-\frac{y_{20}(t)y'_{30}(1)\mu_1(0)}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_2(x)\,dx}+$$

$$+O\left(\frac{1}{\varepsilon}+e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(x)\,dx}+e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_2(x)\,dx}\right). \tag{10}$$

Из (8), используя формулы (9), (10), можно получить для $\Phi_1(t,\varepsilon)$ следующее асимптотическое при $\varepsilon\to 0$ представление:

$$\Phi_1^{(q)}(t,\varepsilon)=y_{30}^{(q)}(t)-\frac{\mu_1^q(t)y_{10}(t)y'_{30}(0)}{\varepsilon^{q-1}\mu_1(0)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(x)\,dx}-\frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)y'_{30}(1)}{\varepsilon^{q-1}\mu_2(1)y_{20}(1)}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_2(x)\,dx}+$$

$$+O\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon^{q-2}}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(x)\,dx}+\frac{1}{\varepsilon^{q-2}}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_2(x)\,dx}\right). \tag{11}$$

Аналогично можно получить асимптотические представления для граничных функций $\Phi_2(t,\varepsilon),\ \Phi_3(t,\varepsilon)$:

$$\Phi_2^{(q)}(t,\varepsilon)=-\varepsilon\frac{y_{30}^{(q)}(t)}{\mu_1(0)}+\frac{\mu_1^q(t)y_{10}(t)}{\varepsilon^{q-1}\mu_1(0)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(x)\,dx}+\frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)y'_{30}(1)}{\varepsilon^{q-2}\mu_2(1)\mu_1(0)y_{20}(1)}\times$$

$$\times e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_2(x)\,dx}+O\left(\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^{q-2}}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(x)\,dx}+\frac{1}{\varepsilon^{q-3}}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_2(x)\,dx}\right),$$

$$\Phi_3^{(q)}(t,\varepsilon)=\frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)}{\varepsilon^{q-1}\mu_2(1)y_{20}(1)}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_2(x)\,dx}+O\left(\frac{1}{\varepsilon^{q-2}}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_2(x)\,dx}\right),\quad q=\overline{0,2}. \tag{12}$$

3. Основные результаты. Решение задачи (1), (2) ищем в виде

$$y(t,\varepsilon) = C_1\Phi_1(t,\varepsilon) + C_2\Phi_2(t,\varepsilon) + C_3\Phi_3(t,\varepsilon) +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t K_0(t,s,\varepsilon)z(s,\varepsilon)\,ds + \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_1^t K_1(t,s,\varepsilon)z(s,\varepsilon)\,ds, \tag{13}$$

где $\Phi_i(t,\varepsilon),\ i=1,2,3,$ — граничные функции, имеющие вид (8), $K_0(t,s,\varepsilon),\ K_1(t,s,\varepsilon)$ — вспомогательные функции, определяемые в виде (6), $C_i,\ i=1,2,3,$ — неизвестные постоянные, $z(t,\varepsilon)$ — неизвестная функция.

Для определения неизвестной функций $z(t,\varepsilon)$ подставим (13) в (1). В результате относительно $z(t,\varepsilon)$ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$z(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon) + \int\limits_0^1 H(t,s,\varepsilon)z(s,\varepsilon)\,ds, \tag{14}$$

где

$$f(t,\varepsilon) = F(t) + \sum_{i=1}^{3} C_i \int\limits_0^1 \sum_{j=0}^{2} H_j(t,x)\Phi_i^{(j)}(x,\varepsilon)\,dx,$$

$$H(t,s,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=0}^{2}\int\limits_s^1 H_i(t,x)K_0^{(i)}(x,s,\varepsilon)\,dx - \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=0}^{2}\int\limits_0^s H_i(t,x)K_1^{(i)}(x,s,\varepsilon)\,dx. \tag{15}$$

Пусть выполнено следующее условие:

III. Число 1 не является собственным значением ядра $H(t,s,\varepsilon)$ при достаточно малых ε.

Тогда уравнение (14) имеет единственное решение вида

$$z(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon) + \int\limits_0^1 R(t,s,\varepsilon)f(s,\varepsilon)\,ds, \tag{16}$$

где $R(t,s,\varepsilon)$ — резольвента ядра $H(t,s,\varepsilon)$. Подставляя (16) в (13), получаем решение задачи (1), (2) в виде

$$y(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{3} C_i Q_i(t,\varepsilon) + P(t,\varepsilon), \tag{17}$$

где

$$Q_i(t,\varepsilon) = \Phi_i(t,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t K_0(t,s,\varepsilon)\overline{\varphi_i}(s,\varepsilon)\,ds + \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_1^t K_1(t,s,\varepsilon)\overline{\varphi_i}(s,\varepsilon)\,ds,$$

$$P(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t K_0(t,s,\varepsilon)\overline{F}(s,\varepsilon)\,ds + \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_1^t K_1(t,s,\varepsilon)\overline{F}(s,\varepsilon)\,ds, \tag{18}$$

$$\overline{\varphi}_i(t,\varepsilon)=\int\limits_0^1\sum_{j=0}^2\overline{H}_j(t,x,\varepsilon)\Phi_i^{(j)}(x,\varepsilon)\,dx,\quad \overline{F}(t,\varepsilon)=F(t)+\int\limits_0^1R(t,s,\varepsilon)F(s)\,ds,$$
$$\overline{H}_i(t,x,\varepsilon)=H_i(t,x)+\int\limits_0^1R(t,s,\varepsilon)H_i(s,x)\,ds,\quad i=\overline{1,3}. \tag{19}$$

Из (19) с учетом (11), (12), (15) для $\overline{\varphi}_i(t,\varepsilon)$, $\overline{H}_i(t,x,\varepsilon)$, $i=\overline{1,3}$, $\overline{F}(t,\varepsilon)$ можно получить следующие асимптотические представления:

$$\overline{\varphi}_i(t,\varepsilon)=\overline{\varphi}_i(t)+O(\varepsilon),\quad i=\overline{1,3},$$
$$\overline{H}_i(t,x,\varepsilon)=\overline{H}_i(t,x)+O(\varepsilon),\quad i=\overline{1,3},\quad \overline{F}(t,\varepsilon)=\overline{F}(t)+O(\varepsilon), \tag{20}$$

где

$$\overline{\varphi}_1(t)=\int\limits_0^1\sum_{i=0}^2\overline{H}_i(t,x)y_{30}^{(i)}(x)\,dx+\overline{H}_2(t,0)y'_{30}(0)-\overline{H}_2(t,1)y'_{30}(1),$$
$$\overline{\varphi}_2(t)=-\overline{H}_2(t,0),\quad \overline{\varphi}_3(t)=\overline{H}_2(t,1), \tag{21}$$

а $\overline{H}_i(t,x)$, $i=\overline{1,3}$, и $\overline{F}(t)$ — не зависящие от ε главные части разложений (20).

Используя краевые условия (2), получаем систему алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных C_i, $i=1,2,3$:

$$C_1h_iQ_1(t,\varepsilon)+C_2h_iQ_2(t,\varepsilon)+C_3h_iQ_3(t,\varepsilon)=\alpha_i-h_iP(t,\varepsilon),\quad i=\overline{1,3}. \tag{22}$$

Для коэффициентов и правых частей системы (22) имеют место асимптотические представления

$$h_1Q_i(t,\varepsilon)=\delta_{1i}-\varepsilon\frac{\overline{\varphi}_i(0)}{\mu_2^2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}+O(\varepsilon^2),\quad i=\overline{1,3},$$
$$h_1P(t,\varepsilon)=-\varepsilon\frac{\overline{F}(0)}{\mu_2^2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}+O(\varepsilon^2),$$
$$h_2Q_i(t,\varepsilon)=\delta_{2i}-\frac{\overline{\varphi}_i(0)}{\mu_2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}+O(\varepsilon),\quad i=\overline{1,3},$$
$$h_2P(t,\varepsilon)=-\frac{\overline{F}(0)}{\mu_2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}+O(\varepsilon), \tag{23}$$
$$h_3Q_i(t,\varepsilon)=\delta_{3i}+\int\limits_0^1\frac{y'_{30}(1)\overline{\varphi}_i(s)}{y_{30}(s)A_1(s)}\,ds+\frac{\overline{\varphi}_i(1)}{\mu_1(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}+O(\varepsilon),\quad i=\overline{1,3},$$
$$h_3P(t,\varepsilon)=\int\limits_0^1\frac{y'_{30}(1)\overline{F}(s)}{y_{30}(s)A_1(s)}\,ds+\frac{\overline{F}(1)}{\mu_1(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}+O(\varepsilon).$$

Тогда главный определитель $\omega(\varepsilon)$ системы (22) с учетом (23) имеет асимптотическое представление

$$\omega(\varepsilon)=\begin{vmatrix} h_1Q_1(t,\varepsilon) & h_1Q_2(t,\varepsilon) & h_1Q_3(t,\varepsilon)\\ h_2Q_1(t,\varepsilon) & h_2Q_2(t,\varepsilon) & h_2Q_3(t,\varepsilon)\\ h_3Q_1(t,\varepsilon) & h_3Q_2(t,\varepsilon) & h_3Q_3(t,\varepsilon)\end{vmatrix}=\overline{\omega}+O(\varepsilon),$$

где

$$\overline{\omega}=\left(1-\frac{\overline{\varphi}_2(0)}{\mu_2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}\right)\left(1+\int\limits_0^1\frac{y'_{30}(1)\overline{\varphi}_3(s)}{y_{30}(s)A_1(s)}\,ds+\frac{\overline{\varphi}_3(1)}{\mu_1(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}\right)+$$

$$+\frac{\overline{\varphi}_3(0)}{\mu_2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}\left(\int\limits_0^1\frac{y'_{30}(1)\overline{\varphi}_2(s)}{y_{30}(s)A_1(s)}\,ds+\frac{\overline{\varphi}_2(1)}{\mu_1(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}\right). \qquad (24)$$

IV. Пусть $\overline{\omega}\neq 0$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* I – IV. *Тогда при достаточно малых* ε *на отрезке* $[0,1]$ *существует единственное решение сингулярно возмущенной интегро-дифференциальной краевой задачи* (1), (2), *для которого справедливы следующие асимптотические при* $\varepsilon\to 0$ *представления*:

$$y^{(q)}(t,\varepsilon)=\alpha_1\left[y_{30}^{(q)}(t)+\int\limits_0^t\frac{y_{30}^{(q)}(t)\overline{\varphi}_1(s)}{y_{30}(s)\mu_1(s)\mu_2(s)}\,ds-\frac{(\mu_1^{q-2}(t)-\mu_2^{q-2}(t))\overline{\varphi}_1(t)}{\varepsilon^{q-1}(\mu_2(t)-\mu_1(t))}-\right.$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^{q-1}}\left(\frac{\mu_1^q(t)y_{10}(t)y'_{30}(0)}{\mu_1(0)}+\frac{\mu_1^q(t)y_{10}(t)\overline{\varphi}_1(0)}{\mu_1^2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(x)\,dx}+$$

$$\left.+\frac{1}{\varepsilon^{q-1}}\left(\frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)\overline{\varphi}_1(1)}{\mu_2^2(1)y_{20}(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}-\frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)y'_{30}(1)}{y_{20}(1)\mu_2(1)}\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t\mu_2(x)\,dx}\right]+$$

$$+\frac{1}{\overline{\omega}}\left[\alpha_1\overline{\omega}_1+\left(\alpha_2+\frac{\overline{F}(0)}{\mu_2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}\right)\left(1+\frac{\overline{\varphi}_3(1)}{\mu_1(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}+\int\limits_0^1\frac{y'_{30}(1)\overline{\varphi}_3(s)}{y_{30}(s)A_1(s)}\,ds\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\overline{\varphi}_3(0)}{\mu_2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}\left(\alpha_3-\int\limits_0^1\frac{y'_{30}(1)\overline{F}(s)}{y_{30}(s)A_1(s)}\,ds-\frac{\overline{F}(1)}{\mu_1(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}\right)\right]\times$$

$$\times\left[\int\limits_0^t\frac{y_{30}^{(q)}(t)\overline{\varphi}_2(s)}{y_{30}(s)\mu_1(s)\mu_2(s)}\,ds+\frac{(\mu_1^{q-2}(t)-\mu_2^{q-2}(t))\overline{\varphi}_2(t)}{\varepsilon^{q-1}(\mu_2(t)-\mu_1(t))}+\right.$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^{q-1}}\left(\frac{\mu_1^q(t)y_{10}(t)}{\mu_1(0)}-\frac{\mu_1^q(t)y_{10}(t)\overline{\varphi}_2(0)}{\mu_1^2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(x)\,dx}+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^{q-1}}\frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)\overline{\varphi}_2(1)}{\mu_2^2(1)y_{20}(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t\mu_2(x)\,dx}\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{\overline{\omega}}\Bigg[\alpha_1\overline{\omega}_2-\left(\alpha_2+\frac{\overline{F}(0)}{\mu_2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}\right)\left(\frac{\overline{\varphi}_2(1)}{\mu_1(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}+\int\limits_0^1\frac{y_{30}'(1)\overline{\varphi}_2(s)}{y_{30}(s)A_1(s)}\,ds\right)+$$

$$+\left(\alpha_3-\int\limits_0^1\frac{y_{30}'(1)\overline{F}(s)}{y_{30}(s)A_1(s)}\,ds-\frac{\overline{F}(1)}{\mu_1(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}\right)\left(1-\frac{\overline{\varphi}_2(0)}{\mu_2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}\right)\Bigg]\times$$

$$\times\Bigg[\int\limits_0^t\frac{y_{30}^{(q)}(t)\overline{\varphi}_3(s)\,ds}{y_{30}(s)\mu_1(s)\mu_2(s)}-\frac{(\mu_1^{q-2}(t)-\mu_2^{q-2}(t))\overline{\varphi}_3(t)}{\varepsilon^{q-1}(\mu_2(t)-\mu_1(t))}-\frac{\mu_1^q(t)y_{10}(t)\overline{\varphi}_3(0)}{\varepsilon^{q-1}\mu_1^2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}\times$$

$$\times e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(x)\,dx}+\frac{1}{\varepsilon^{q-1}}\left(\frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)\overline{\varphi}_3(1)}{\mu_2^2(1)y_{20}(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}+\frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)}{\mu_2(1)y_{20}(1)}\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t\mu_2(x)\,dx}\Bigg]+$$

$$+\int\limits_0^t\frac{y_{30}^{(q)}(t)\overline{F}(s)}{y_{30}(s)\mu_1(s)\mu_2(s)}\,ds-\frac{(\mu_1^{q-2}(t)-\mu_2^{q-2}(t))\overline{F}(t)}{\varepsilon^{q-1}(\mu_2(t)-\mu_1(t))}-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^{q-1}}\frac{\mu_1^q(t)y_{10}(t)\overline{F}(0)}{\mu_1^2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(x)\,dx}+\frac{1}{\varepsilon^{q-1}}\frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)\overline{F}(1)}{\mu_2^2(1)y_{20}(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}\times$$

$$\times e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t\mu_2(x)\,dx}+O\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon^{q-2}}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(x)\,dx}+\frac{1}{\varepsilon^{q-2}}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t\mu_2(x)\,dx}\right),\quad q=\overline{0,2},\tag{25}$$

где $\overline{\varphi}_i(t),\ i=\overline{1,3},\ \overline{\omega}$ *имеют вид* (21), (24), *а* $\overline{\omega}_1,\ \overline{\omega}_2$ *— некоторые известные постоянные, выражаемые через* $\overline{\varphi}_i(0),\ \overline{\varphi}_i(1),\ i=\overline{1,3}$.

Доказательство. Из формулы (18) с учетом (7), (11), (12), (19) для функций $Q_i(t,\varepsilon)$, $i=1,2,3,$ $P(t,\varepsilon)$ получаем асимптотические формулы

$$Q_1^{(q)}(t,\varepsilon)=y_{30}^{(q)}(t)+\int\limits_0^t\frac{y_{30}^{(q)}(t)\overline{\varphi}_1(s)}{y_{30}(s)\mu_1(s)\mu_2(s)}\,ds-\frac{(\mu_1^{q-2}(t)-\mu_2^{q-2}(t))\overline{\varphi}_1(t)}{\varepsilon^{q-1}(\mu_2(t)-\mu_1(t))}-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^{q-1}}\left(\frac{\mu_1^q(t)y_{10}(t)y_{30}'(0)}{\mu_1(0)}+\frac{\mu_1^q(t)y_{10}(t)\overline{\varphi}_1(0)}{\mu_1^2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(x)\,dx}+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^{q-1}}\left(\frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)\overline{\varphi}_1(1)}{\mu_2^2(1)y_{20}(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}-\frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)y_{30}'(1)}{y_{20}(1)\mu_2(1)}\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t\mu_2(x)\,dx}+$$

$$+O\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon^{q-2}}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(x)\,dx}+\frac{1}{\varepsilon^{q-2}}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t\mu_2(x)\,dx}\right),\quad q=\overline{0,2},$$

$$Q_2^{(q)}(t,\varepsilon)=\int\limits_0^t \frac{y_{30}^{(q)}(t)\overline{\varphi}_2(s)}{y_{30}(s)\mu_1(s)\mu_2(s)}\,ds+\frac{(\mu_1^{q-2}(t)-\mu_2^{q-2}(t))\overline{\varphi}_2(t)}{\varepsilon^{q-1}(\mu_2(t)-\mu_1(t))}+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^{q-1}}\left(\frac{\mu_1^q(t)y_{10}(t)}{\mu_1(0)}-\frac{\mu_1^q(t)y_{10}(t)\overline{\varphi}_2(0)}{\mu_1^2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(x)\,dx}+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^{q-1}}\frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)\overline{\varphi}_2(1)}{\mu_2^2(1)y_{20}(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t\mu_2(x)\,dx}+$$

$$+O\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon^{q-2}}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(x)\,dx}+\frac{1}{\varepsilon^{q-2}}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t\mu_2(x)\,dx}\right), \tag{26}$$

$$Q_3^{(q)}(t,\varepsilon)=\int\limits_0^t \frac{y_{30}^{(q)}(t)\overline{\varphi}_3(s)}{y_{30}(s)\mu_1(s)\mu_2(s)}\,ds-\frac{(\mu_1^{q-2}(t)-\mu_2^{q-2}(t))\overline{\varphi}_3(t)}{\varepsilon^{q-1}(\mu_2(t)-\mu_1(t))}-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^{q-1}}\frac{\mu_1^q(t)y_{10}(t)\overline{\varphi}_3(0)}{\mu_1^2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(x)\,dx}+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^{q-1}}\left(\frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)\overline{\varphi}_3(1)}{\mu_2^2(1)y_{20}(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}+\frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)}{\mu_2(1)y_{20}(1)}\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t\mu_2(x)\,dx}+$$

$$+O\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon^{q-2}}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(x)\,dx}+\frac{1}{\varepsilon^{q-2}}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t\mu_2(x)\,dx}\right),\quad q=\overline{0,2},$$

$$P^{(q)}(t,\varepsilon)=\int\limits_0^t \frac{y_{30}^{(q)}(t)\overline{F}(s)}{y_{30}(s)\mu_1(s)\mu_2(s)}\,ds-\frac{(\mu_1^{q-2}(t)-\mu_2^{q-2}(t))\overline{F}(t)}{\varepsilon^{q-1}(\mu_2(t)-\mu_1(t))}-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^{q-1}}\frac{\mu_1^q(t)y_{10}(t)\overline{F}(0)}{\mu_1^2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(x)\,dx}+\frac{1}{\varepsilon^{q-1}}\frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)\overline{F}(1)}{\mu_2^2(1)y_{20}(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}\times$$

$$\times e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t\mu_2(x)\,dx}+O\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon^{q-2}}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(x)\,dx}+\frac{1}{\varepsilon^{q-2}}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t\mu_2(x)\,dx}\right),\quad q=\overline{0,2}. \tag{27}$$

Из системы (22) единственным образом определяем постоянные $C_i,\ i=1,2,3,$ для которых имеет место асимптотическое представление

$$C_1=\alpha_1+O(\varepsilon),$$

$$C_2=\frac{1}{\overline{\omega}}\left[\alpha_1\overline{\omega}_1+\left(\alpha_2+\frac{\overline{F}(0)}{\mu_2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}\right)\times\right.$$

$$\times\left(1+\frac{\overline{\varphi}_3(1)}{\mu_1(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}+\int\limits_0^1\frac{y_{30}'(1)\overline{\varphi}_3(s)}{y_{30}(s)A_1(s)}\,ds\right)+$$

$$+\frac{\overline{\varphi}_3(0)}{\mu_2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}\left(\alpha_3-\int\limits_0^1\frac{y_{30}'(1)\overline{F}(s)}{y_{30}(s)A_1(s)}\,ds-\frac{\overline{F}(1)}{\mu_1(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}\right)\Bigg]+O(\varepsilon), \quad (28)$$

$$C_3=\frac{1}{\overline{\omega}}\Bigg[\alpha_1\overline{\omega}_2-\left(\alpha_2+\frac{\overline{F}(0)}{\mu_2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}\right)\left(\frac{\overline{\varphi}_2(1)}{\mu_1(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}+\int\limits_0^1\frac{y_{30}'(1)\overline{\varphi}_2(s)}{y_{30}(s)A_1(s)}\,ds\right)+$$

$$+\left(\alpha_3-\int\limits_0^1\frac{y_{30}'(1)\overline{F}(s)}{y_{30}(s)A_1(s)}\,ds-\frac{\overline{F}(1)}{\mu_1(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}\right)\left(1-\frac{\overline{\varphi}_2(0)}{\mu_2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}\right)\Bigg]+O(\varepsilon).$$

Теперь, подставляя (26) – (28) в (17), получаем асимптотические представления (25).

Теорема 1 доказана.

Из формулы (25) можно получить асимптотические оценки

$$\left|y^{(q)}(t,\varepsilon)\right|\leq C+\frac{C}{\varepsilon^{q-1}}e^{-\gamma_1\frac{t}{\varepsilon}}+\frac{C}{\varepsilon^{q-1}}e^{-\gamma_2\frac{1-t}{\varepsilon}}, \quad q=0,1,2, \quad (29)$$

где $C>0,\ \gamma_i>0,\ i=1,2,$ — некоторые постоянные, не зависящие от ε.

Из (29) следует, что на концах $t=0$ и $t=1$ заданного промежутка для решений краевой задачи (1), (2) справедливы следующие порядки роста: $y''(0,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\ y''(1,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon\to 0$, т. е. имеет место так называемое явление граничных скачков первого порядка.

4. Модифицированная вырожденная задача. Рассмотрим следующую измененную вырожденную краевую задачу, соответствующую исходной сингулярно возмущенной задаче (1), (2):

$$L_\varepsilon\overline{y}(t)\equiv A_1(t)\overline{y}'+A_2(t)\overline{y}=F(t)+\int\limits_0^1\sum_{i=0}^2 H_i(t,x)\overline{y}^{(i)}(x)\,dx+\Delta(t), \quad (30)$$

$$\overline{y}(0)=\alpha_1, \quad \overline{y}'(0)=\alpha_2+\Delta_0, \quad \overline{y}'(1)=\alpha_3+\Delta_1, \quad (31)$$

где $\Delta(t)$ — неизвестный пока скачок интегрального члена, а $\Delta_0,\ \Delta_1$ — скачки производных первого порядка в точках $t=0$ и $t=1$ соответственно. Для определения $\Delta(t)$ получаем нижеследующую задачу относительно разности $u(t,\varepsilon)$ между решением $y(t,\varepsilon)$ сингулярно возмущенной задачи (1), (2) и решением $\overline{y}(t)$ измененной вырожденной задачи (30), (31):

$$L_\varepsilon y\equiv\varepsilon^2u'''+\varepsilon A_0(t)u''+A_1(t)u'+A_2(t)u=$$

$$=-\Delta(t)+\int\limits_0^1\sum_{i=0}^2 H_i(t,x)u^{(i)}(x,\varepsilon)\,dx-\varepsilon^2y'''-\varepsilon A_0(t)y'', \quad (32)$$

$$u(0,\varepsilon)=0, \qquad u'(0,\varepsilon)=-\Delta_0, \qquad u'(1,\varepsilon)=-\Delta_1. \quad (33)$$

Поскольку типы задач (32), (33) и (1), (2) одинаковые, то для решения задачи (32), (33) применяем оценки (25). В результате получаем представление

$$u^{(q)}(t,\varepsilon)=-\frac{1}{\overline{\omega}}\left[\left(\Delta_0+\frac{\overline{\Delta}(0)}{\mu_2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}\right)\times\right.$$

$$\times\left(1+\frac{\overline{\varphi}_3(1)}{\mu_1(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}+\int\limits_0^1\frac{y'_{30}(1)\overline{\varphi}_3(s)}{y_{30}(s)A_1(s)}\,ds\right)+$$

$$\left.+\frac{\overline{\varphi}_3(0)}{\mu_2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}\left(\Delta_1-\frac{\overline{\Delta}(1)}{\mu_1(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}-\int\limits_0^1\frac{y'_{30}(1)\overline{\Delta}(s)}{y_{30}(s)A_1(s)}\,ds\right)\right]\times$$

$$\times\left[\int\limits_0^t\frac{y_{30}^{(q)}(t)\overline{\varphi}_2(s)}{y_{30}(s)\mu_1(s)\mu_2(s)}\,ds+\frac{(\mu_1^{q-2}(t)-\mu_2^{q-2}(t))\overline{\varphi}_2(t)}{\varepsilon^{q-1}(\mu_2(t)-\mu_1(t))}+\right.$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^{q-1}}\left(\frac{\mu_1^q(t)y_{10}(t)}{\mu_1(0)}-\frac{\mu_1^q(t)y_{10}(t)\overline{\varphi}_2(0)}{\mu_1^2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(x)\,dx}+$$

$$\left.+\frac{1}{\varepsilon^{q-1}}\frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)\overline{\varphi}_2(1)}{\mu_2^2(1)y_{20}(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t\mu_2(x)\,dx}\right]+$$

$$+\frac{1}{\overline{\omega}}\left[\left(\Delta_0+\frac{\overline{\Delta}(0)}{\mu_2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}\right)\left(\frac{\overline{\varphi}_2(1)}{\mu_1(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}+\int\limits_0^1\frac{y'_{30}(1)\overline{\varphi}_2(s)}{y_{30}(s)A_1(s)}\,ds\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\Delta_1-\frac{\overline{\Delta}(1)}{\mu_1(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}-\int\limits_0^1\frac{y'_{30}(1)\overline{\Delta}(s)}{y_{30}(s)A_1(s)}\,ds\right)\left(1-\frac{\overline{\varphi}_2(0)}{\mu_2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}\right)\right]\times$$

$$\times\left[\int\limits_0^t\frac{y_{30}^{(q)}(t)\overline{\varphi}_3(s)\,ds}{y_{30}(s)\mu_1(s)\mu_2(s)}-\frac{(\mu_1^{q-2}(t)-\mu_2^{q-2}(t))\overline{\varphi}_3(t)}{\varepsilon^{q-1}(\mu_2(t)-\mu_1(t))}-\frac{\mu_1^q(t)y_{10}(t)\overline{\varphi}_3(0)}{\varepsilon^{q-1}\mu_1^2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}\times\right.$$

$$\left.\times e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(x)\,dx}+\frac{1}{\varepsilon^{q-1}}\left(\frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)\overline{\varphi}_3(1)}{\mu_2^2(1)y_{20}(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}+\frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)}{\mu_2(1)y_{20}(1)}\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t\mu_2(x)\,dx}\right]-$$

$$-\int\limits_0^t\frac{y_{30}^{(q)}(t)\overline{\Delta}(s)}{y_{30}(s)\mu_1(s)\mu_2(s)}\,ds+\frac{(\mu_1^{q-2}(t)-\mu_2^{q-2}(t))\overline{\Delta}(t)}{\varepsilon^{q-1}(\mu_2(t)-\mu_1(t))}+$$

$$+\frac{\mu_1^q(t)y_{10}(t)\overline{\Delta}(0)}{\varepsilon^{q-1}\mu_1^2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(x)\,dx}-\frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)\overline{\Delta}(1)}{\varepsilon^{q-1}\mu_2^2(1)y_{20}(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))}\times$$

$$\times e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t \mu_2(x)\,dx} + O\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^{q-2}} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_1(x)\,dx} + \frac{1}{\varepsilon^{q-2}} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t \mu_2(x)\,dx}\right), \quad q = \overline{0,2}, \qquad (34)$$

где $\overline{\Delta}(t)$ — не зависящая от ε главная часть разложений $\overline{\Delta}(t,\varepsilon) = \Delta(t) + \int_0^1 R(t,s,\varepsilon)\Delta(s)\,ds$.

Заметим, что выражение

$$-\left[\left(\Delta_0 + \frac{\overline{\Delta}(0)}{\mu_2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}\right)\left(1 + \frac{\overline{\varphi}_3(1)}{\mu_1(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))} + \int\limits_0^1 \frac{y'_{30}(1)\overline{\varphi}_3(s)}{y_{30}(s)A_1(s)}\,ds\right) + \right.$$

$$+\left(\Delta_1 - \frac{\overline{\Delta}(1)}{\mu_1(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))} - \int\limits_0^1 \frac{y'_{30}(1)\overline{\Delta}(s)}{y_{30}(s)A_1(s)}\,ds\right) \left.\frac{\overline{\varphi}_3(0)}{\mu_2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}\right]\overline{\varphi}_2(t) +$$

$$+\left[\left(\Delta_0 + \frac{\overline{\Delta}(0)}{\mu_2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}\right)\left(\frac{\overline{\varphi}_2(1)}{\mu_1(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))} + \int\limits_0^1 \frac{y'_{30}(1)\overline{\varphi}_2(s)}{y_{30}(s)A_1(s)}\,ds\right) - \right.$$

$$-\left(\Delta_1 - \frac{\overline{\Delta}(1)}{\mu_1(1)(\mu_2(1)-\mu_1(1))} - \int\limits_0^1 \frac{y'_{30}(1)\overline{\Delta}(s)}{y_{30}(s)A_1(s)}\,ds\right)\left.\left(1 - \frac{\overline{\varphi}_2(0)}{\mu_2(0)(\mu_2(0)-\mu_1(0))}\right)\right]\overline{\varphi}_3(t)$$

тождественно равно $\overline{\Delta}(t)$, если определить $\overline{\Delta}(t)$ в виде $\overline{\Delta}(t) = -\Delta_0\overline{\varphi}_2(t) - \Delta_1\overline{\varphi}_3(t)$ или с учетом (21) в виде $\overline{\Delta}(t) = \Delta_0\overline{H}_2(t,0) - \Delta_1\overline{H}_2(t,1)$. Отсюда для определения скачка интегрального члена с учетом (19), (20) окончательно получаем формулу

$$\Delta(t) = \Delta_0 H_2(t,0) - \Delta_1 H_2(t,1). \qquad (35)$$

Тогда при выполнении равенства (35) из (34) получаем, что $u(t,\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тем самым, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* I – IV *и равенство* (35). *Тогда для решения* $y(t,\varepsilon)$ *сингулярно возмущенной интегро-дифференциальной краевой задачи* (1), (2) *справедливы предельные равенства*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y(t,\varepsilon) = \overline{y}(t), \quad 0 \le t \le 1, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} y^{(i)}(t,\varepsilon) = \overline{y}^{(i)}(t), \qquad i = 1,2, \quad 0 < t < 1,$$

где $\overline{y}(t)$ *является решением модифицированной вырожденной краевой задачи* (30), (31), *содержащей скачки производных* Δ_0, Δ_1, *а также скачок интегрального члена* $\Delta(t)$, *определяемого в виде* (35).

5. Заключение. Наличие интегральных членов существенно изменит вырожденное уравнение: решение исходного сингулярно возмущенного интегро-дифференциального уравнения не стремится к решению обычного вырожденного уравнения, получаемого из исходного уравнения при нулевом значении малого параметра, а будет стремиться к решению модифицированного вырожденного интегро-дифференциального уравнения с дополнительным слагаемым $\Delta(t)$, называемым скачком интегрального члена. Кроме того, в краевых условиях также происходят изменения: появляются скачки первых производных Δ_0 и Δ_1. Заметим, что эта модификация вырожденной краевой задачи связана с бесконечно большими, при стремлении малого параметра к нулю, значениями производных второго порядка на обоих концах заданного отрезка. При этом, в отличие от аналогичных работ [26, 27], величина скачка интегрального члена впервые определена в виде (35), что обусловлено одинаковыми порядками роста вторых производных решения на концах данного промежутка.

Литература

1. *Тихонов А. Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Мат. сб. – 1948. – **22 (64)**, № 2. – С. 193 – 204.
2. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Мат. сб. – 1952. – **31 (73)**, № 3. – С. 575 – 586.
3. *Понтрягин Л. С.* Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1957. – **21**, № 3. – С. 605 – 626.
4. *Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. – М.: Наука, 1975. – 248 с.
5. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. – М.: Изд-во АН СССР, 1937. – 112 с.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
7. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. – 1957. – **12**, № 5. – С. 3 – 122.
8. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* О начальном скачке для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр // Докл. АН СССР. – 1960. – **132**, № 6. – С. 1242 – 1245.
9. *Треногин В. А.* Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника – Вишика // Успехи мат. наук. – 1970. – **25**, № 4. – С. 121 – 156.
10. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с.
11. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высш. шк., 1990. – 208 с.
12. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
13. *Иманалиев М. И.* Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем. – Фрунзе: Илим, 1972. – 356 с.
14. *Касымов К. А.* Об асимптотике решения задачи Коши с большими начальными условиями для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр // Успехи мат. наук. – 1962. – **17**, № 5. – С. 187 – 188.
15. *Касымов К. А.* О задаче с начальным скачком для нелинейных систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной // Докл. АН СССР. – 1968. – **179**, № 2. – С. 275 – 278.
16. *Касымов К. А.* Асимптотика решения задачи Коши с начальным скачком для нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр при старшей производной // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1968. – № 5. – С. 69 – 72.
17. *Касымов К. А.* Асимптотика решения задачи с начальными скачками для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа с малым параметром при производной // Докл. АН СССР. – 1971. – **196**, № 2. – С. 274 – 277.
18. *Абильдаев Е. А., Касымов К. А.* Асимптотические оценки решений сингулярно возмущенных краевых задач с начальными скачками для линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1992. – **28**, № 10. – С. 1659 – 1668.
19. *Kassymov K. A., Nurgabyl D. N.* Asymptotic behavior of solutions of linear singularly perturbed general separated boundary-value problems with initial jump // Ukr. Math. J. – 2003. – **55**, № 11. – P. 1777 – 1792.
20. *Kassymov K., Nurgabyl D.* Asymptotic estimates of solution of a singularly perturbed boundary value problem with an initial jump for linear differential equations // Different. Equat. – 2004. – **40**, № 5. – P. 641 – 651.

21. *Касымов К. А., Дауылбаев М. К.* Об оценке решений задачи Коши с начальным скачком любого порядка для линейных сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1999. – **35**, № 6. – С. 822 – 830.
22. *Dauylbaev M. K.* The asymptotic behavior of solutions to singularly perturbed nonlinear integro-differential equations // Sib. Math. J. – 2000. – **41**, № 1. – P. 49 – 60.
23. *Dauylbayev M. K., Atakhan N.* The initial jumps of solutions and integral terms in singular BVP of linear higher order integro-differential equations // Miskolc Math. Notes. – 2015. – **16**, № 2. – P. 747 – 761.
24. *Касымов К. А., Жакипбекова Д. А., Нургабыл Д. Н.* Представление решения краевой задачи для линейного дифференциального уравнения с малым параметром при старших производных // Вестн. Казах. нац. ун-та им. аль-Фараби. Сер. мат., мех., информ. – 2001. – № 3. – С. 73 – 78.
25. *Kassymov K. A., Nurgabyl D. N., Uaissov A. B.* Asymptotic estimates for the solutions of boundary-value problems with initial jump for linear differential equations with small parameter in the coefficients of derivatives // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 5. – P. 694 – 708.
26. *Dauylbaev M. K., Mirzakulova A. E.* Asymptotic behavior of solutions of singular integro-differential equations // J. Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity. – 2016. – **5**, Issue 2. – P. 147 – 154.
27. *Dauylbaev M. K., Mirzakulova A. E.* Boundary-value problems with initial jumps for singularly perturbed integro-differential equations // J. Math. Sci. – 2017. – **222**, Issue 3. – P. 214 – 225.
28. *Dauylbayev M., Uaissov A.* Initial value problem for singularly perturbed higher-order integro-differential equation // Int. Conf. 80th Anniversary of Academician A. M. Samoilenko “Mathematical Analysis, Differential Equations & Applications” (MADEA-8): Abstracts. – Bishkek, Cholpon-Ata, 2018. – 54 p.

Получено 12.10.18