УДК 517.9

М. Г. Махмудова (Бакин. гос. ун-т, Азербайджан),
А. Х. Ханмамедов (Бакин. гос. ун-т; Ин-т математики и механики НАН Азербайджана; Ун-т Азербайджан, Баку)

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШТАРКА НА ПОЛУОСИ

We consider a one-dimensional Stark operator on a half-line with the Dirichlet boundary condition at zero. The asymptotic behavior of the eigenvalues at infinity is found.

Розглянуто одновимірний оператор Штарка на півосі з крайовою умовою Діріхле в нулі. Знайдено асимптотику власних значень на нескінченності.

1. Введение и основные результаты. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L_2\,(0,\infty)$ самосопряженный оператор T_q, порожденный дифференциальным выражением

$$l_q(y) = -y'' + \big(x + q(x)\big)y, \quad x \in (0,\infty),$$

и краевым условием $y(0) = 0$. Мы предполагаем, что вещественная функция $q\,(x)$ удовлетворяет условиям

$$q(x) = o(x), \quad x \to \infty, \qquad \int\limits_0^\infty \big|x^4 q(x)\big| dx < \infty. \tag{1}$$

Такой оператор описывает (см. [1, 2]) влияние потенциала электрического поля и называется оператором Штарка. Отметим, что в контексте различных спектральных задач одномерные операторы Штарка изучались в работах многих авторов (см. [1 – 5] и приведенную там библиографию). Отметим также работы [6 – 8], в которых получены важные результаты о резонансах одномерных операторов Штарка. Прямые и обратные спектральные задачи для одномерного уравнения Шредингера с растущим потенциалом изучались в работах [9 – 13].

При условиях (1) оператор T_q имеет (см., например, [14]) чисто дискретный спектр, состоящий из простых собственных значений $\lambda_n,\ n = 1, 2, \ldots,$ где $\lambda_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. В работе [5] для дважды дифференцируемых финитных потенциалов изучена асимптотика собственных значений оператора T_q. Однако предложенный в [5] метод не позволяет исследовать асимптотику спектра оператора T_q для потенциалов из класса (1). Данная работа посвящена этому вопросу.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. *При выполнении условий* (1) *спектр оператора* T_q *состоит из последовательности простых вещественных собственных значений* $\lambda_n, n \geq 1,$ *причем справедлива следующая асимптотическая формула*

$$\lambda_n = \left(\frac{3\pi(4n-1)}{8}\right)^{\frac{2}{3}} + O\big(n^{-\frac{2}{3}}\big), \quad n \to \infty. \tag{2}$$

2. Доказательство теоремы. Вначале сформулируем некоторые вспомогательные факты, относящиеся к функции Эйри. Рассмотрим невозмущенное уравнение

© М. Г. МАХМУДОВА, А. Х. ХАНМАМЕДОВ, 2019

$$-y'' + xy = \lambda y, \qquad 0 < x < \infty, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Заметим, что уравнение (3) имеет [15] решение $f_0(x,\lambda)$ вида

$$f_0(x,\lambda) = Ai(x-\lambda), \tag{4}$$

где $Ai(z)$ — функция Эйри первого рода. Известно [15], что $Ai(z)$ является целой функцией порядка $3/2$ и типа $2/3$. Имеют место (см. [15]) следующие асимптотические равенства при $|z| \to \infty$:

$$\mathrm{A}i(z) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} e^{-\zeta}\left[1 + O(\zeta^{-1})\right],$$

$$Ai'(z) \sim -\pi^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{4}} e^{-\zeta}\left[1 + O(\zeta^{-1})\right], \quad |\arg z| < \pi, \tag{5}$$

$$\mathrm{A}i(-z) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} \sin\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right)\left[1 + O(\zeta^{-1})\right],$$

$$Ai'(-z) \sim -\pi^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{4}} \cos\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right)\left[1 + O(\zeta^{-1})\right], \quad |\arg z| < \frac{2\pi}{3}, \tag{6}$$

где $\zeta = \dfrac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}$. Очевидно, что спектр оператора T_0 дискретен и состоит из нулей функции $f_0(0,\lambda) = Ai(-\lambda)$. Функция $Ai(-\lambda)$ имеет [15] нули λ_n^0, $n = 1, 2, \ldots$, только на положительной полуоси и справедливо асимптотическое равенство

$$\lambda_n^0 = g\left(\frac{3\pi(4n-1)}{8}\right), \tag{7}$$

где

$$g(z) \sim z^{\frac{2}{3}}\left(1 + \frac{5}{48} z^{-2} - \frac{5}{36} z^{-4} + \frac{77125}{82944} z^{-6} - \frac{108056875}{6967296} z^{-8} + \ldots\right), \quad z \to \infty. \tag{8}$$

Рассмотрим возмущенное уравнение

$$-y'' + xy + q(x)y = \lambda y, \qquad 0 < x < \infty, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{9}$$

Известно [3, 4], что уравнение (9) при выполнении условий (1) имеет решение $f(x,\lambda)$ с асимптотикой $f(x,\lambda) = f_0(x,\lambda)(1 + o(1))$, $x \to \infty$. Справедливо [3, 4] следующее представление решения $f(x,\lambda)$ с помощью оператора преобразования:

$$f(x,\lambda) = f_0(x,\lambda) + \int\limits_x^\infty K(x,t) f_0(t,\lambda)\, dt, \tag{10}$$

причем ядро $K(x,t)$ является непрерывной функцией и удовлетворяет соотношениям

$$K(x,t) = O\left(\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\right), \quad x + t \to \infty, \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} K(x_1, x_2) + \frac{1}{2} q\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) =$$

$$= O\left((x_1 + x_2)^2 \, \sigma\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right), \qquad x_1 + x_2 \to \infty, \quad i = 1, 2, \tag{12}$$

где $\sigma(x) = \displaystyle\int_x^\infty \big|q(t)\big| dt$.

Перейдем к доказательству теоремы. В силу (5), (10), (11) функция $f(x, \lambda)$ при каждом λ принадлежит пространству $L_2(0, \infty)$. Отсюда следует, что спектр оператора T_q совпадает с множеством нулей функции $f(0, \lambda)$, т. е. справедливы равенства $f(0, \lambda_n) = 0, \ n = 1, 2, \ldots$. В самом деле, пусть $y_0(x)$ — собственная функция оператора T_q, соответствующая собственному значению λ_k. Тогда решения $f(x, \lambda_k)$ и $y_0(x)$ линейно зависимы, поскольку в противном случае при $\lambda = \lambda_k$ все решения уравнения (9) имели бы интегрируемый квадрат. Однако решением уравнения (9) является также $z_0(x) = f(x, \lambda_k) \displaystyle\int_a^x f^{-2}(t, \lambda_k)\, dt$, где a настолько велико, что $f(x, \lambda_k) \neq 0$ для $x > a$. В силу (10), (11) такое a всегда существует. Легко видеть, что $z_0(x)$ на $+\infty$ экспоненциально растет, а это противоречит изложенному выше.

Пусть теперь $\lambda_n = \lambda_n^0 + \varepsilon_n$. Из условия $q(x) = o(x), \ x \to \infty$, следует, что $\varepsilon_n = o(\lambda_n^0)$, $n \to \infty$. Действительно, пусть ε — произвольное положительное число. Тогда существует такое $M > 0$, что

$$(1 - \varepsilon)x - M < x + q(x) < (1 + \varepsilon)x + M. \tag{13}$$

Легко проверить, что собственные значения $\hat{\lambda}_n^{\pm}, n = 1, 2, \ldots$, граничной задачи, порожденной дифференциальным выражением

$$\hat{l}(y) = -y'' + \big[(1 \pm \varepsilon)x \pm M\big]y, \quad 0 < x < \infty,$$

и краевым условием

$$y(0) = 0,$$

совпадают с нулями функции $Ai\left(-(1 \pm \varepsilon)^{-\frac{1}{3}}(\lambda \mp M)\right)$. Следовательно,

$$\hat{\lambda}_n^{\pm} = (1 \pm \varepsilon)^{\frac{1}{3}} \lambda_n^0 \pm M.$$

В силу (13) и принципа минимакса (см. [16, 17]) получаем

$$(1 - \varepsilon)^{\frac{1}{3}} \lambda_n^0 - M \leq \lambda_n \leq (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{3}} \lambda_n^0 + M.$$

Из последнего неравенства с учетом соотношения (7) находим

$$(1 - \varepsilon)^{\frac{1}{3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1 - \varepsilon)^{\frac{1}{3}} \lambda_n^0 - M}{\lambda_n^0} \ \varliminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n^0} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n^0} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{3}} \lambda_n^0 + M}{\lambda_n^0} = (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{3}}.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n^0} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь равенство $f(0, \lambda_n) = 0$. В силу (10) получаем

$$f_0(0,\lambda_n^0+\varepsilon_n)+\int\limits_0^{\infty}K(0,t)f_0(t,\lambda_n^0+\varepsilon_n)\,dt=0.$$

Поскольку $f_0(0,\lambda_n^0)=0$, то имеем

$$f_0(0,\lambda_n^0+\varepsilon_n)=f_0(0,\lambda_n^0+\varepsilon_n)-f_0(0,\lambda_n^0)=\dot f_0(0,\lambda_n^0+\theta_n\varepsilon_n)\varepsilon_n,$$

т. е.

$$\varepsilon_n=-\frac{\displaystyle\int_0^{\infty}K(0,t)\,f_0\left(t,\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)dt}{\dot f_0\left(0,\lambda_n^0+\theta_n\varepsilon_n\right)},\quad 0<\theta_n<1. \tag{14}$$

Далее, для положительных значений λ рассмотрим интеграл $\displaystyle\int_0^{\infty}K(0,t)f_0(t,\lambda)\,dt$ и запишем его в виде

$$\int\limits_0^{\infty}K(0,t)f_0(t,\lambda)\,dt=\int\limits_0^{\infty}K(0,t)\,Ai(t-\lambda)\,dt=\int\limits_0^{\infty}K(0,t)d\left(\frac{2}{3}+\int\limits_{\lambda}^{t}Ai(u-\lambda)\,du\right).$$

Отсюда, интегрируя по частям и учитывая (5), (11), находим

$$\int\limits_0^{\infty}K(0,t)f_0(t,\lambda)\,dt=\int\limits_0^{\infty}K(0,t)d\left(\frac{2}{3}+\int\limits_{\lambda}^{t}Ai(u-\lambda)\,du\right)=$$

$$=-K(0,0)\left(\frac{2}{3}-\int\limits_0^{\lambda}Ai(u-\lambda)\,du\right)-\int\limits_0^{\infty}K_t'(0,t)\left(\frac{2}{3}+\int\limits_{\lambda}^{t}Ai(u-\lambda)\,du\right)dt=$$

$$=-K(0,0)\left(\frac{2}{3}-\int\limits_0^{\lambda}Ai(u-\lambda)\,du\right)-\int\limits_0^{\frac{\lambda}{2}}K_t'(0,t)\left(\frac{2}{3}-\int\limits_0^{\lambda-t}Ai(-u)\,du\right)dt-$$

$$-\int\limits_{\frac{\lambda}{2}}^{\infty}K_t'(0,t)\left(\frac{2}{3}+\int\limits_{\lambda}^{t}Ai(u-\lambda)\,du\right)dt=I_1+I_2+I_3. \tag{15}$$

С другой стороны, известно [14], что

$$\frac{1}{3}-\int\limits_0^{\lambda}Ai(t)\,dt=O\Big(\lambda^{-\frac{3}{4}}e^{-\frac{2}{3}\lambda^{\frac{3}{2}}}\Big),\quad \lambda\to\infty. \tag{16}$$

$$\frac{2}{3}-\int\limits_0^{\lambda}Ai(-t)\,dt=O\big(\lambda^{-\frac{3}{4}}\big),\quad \lambda\to\infty. \tag{17}$$

Поскольку

$$I_1 = -K(0,0)\left(\frac{2}{3} - \int\limits_0^{\lambda} Ai(u-\lambda)\,du\right) = -K(0,0)\left(\frac{2}{3} - \int\limits_{-\lambda}^{0} Ai(u)\,du\right) =$$

$$= -K(0,0)\left(\frac{2}{3} - \int\limits_0^{\lambda} Ai(-u)\,du\right),$$

то из (17) непосредственно следует, что

$$I_1 = O\big(\lambda^{-\frac{3}{4}}\big), \quad \lambda \to +\infty. \tag{18}$$

Далее, в силу (17) для некоторой постоянной $C > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при всех $s > \delta$ имеет место соотношение

$$\left|\frac{2}{3} - \int\limits_0^{s} Ai(-t)\,dt\right| \le Cs^{-\frac{3}{4}}.$$

Пусть $\lambda > 2\delta$. Учитывая, что $\lambda - t \ge \dfrac{\lambda}{2}$ при $0 \le t \le \dfrac{\lambda}{2}$, из (11) заключаем, что

$$|I_2| = \left|\int\limits_0^{\frac{\lambda}{2}} K_t'(0,t)\left(\frac{2}{3} - \int\limits_0^{\lambda-t} Ai(-u)\,du\right)dt\right| \le C\int\limits_0^{\frac{\lambda}{2}} \big|K_t'(0,t)\big|\,(\lambda-t)^{-\frac{3}{4}}\,dt \le$$

$$\le C\int\limits_0^{\frac{\lambda}{2}} \big|K_t'(0,t)\big|\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-\frac{3}{4}} dt \le C\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-\frac{3}{4}} \int\limits_0^{\infty} \big|K_t'(0,t)\big|\,dt = C_1\lambda^{-\frac{3}{4}}.$$

Следовательно,

$$I_2 = O\big(\lambda^{-\frac{3}{4}}\big), \quad \lambda \to +\infty. \tag{19}$$

С другой стороны, из (16), (17) следует, что функция $\displaystyle\int_0^s Ai\,(t)\,dt$ ограничена на всей числовой оси. Тогда в силу (12) имеем

$$|I_3| = \left|\int\limits_{\frac{\lambda}{2}}^{\infty} K_t'(0,t)\left(\frac{2}{3} - \int\limits_0^{\lambda-t} Ai(-u)\,du\right)dt\right| \le C_2\int\limits_{\frac{\lambda}{2}}^{\infty} \big|K_t'(0,t)\big|\,dt \le$$

$$\le C_2\left[\int\limits_{\frac{\lambda}{2}}^{\infty} \left|q\left(\frac{t}{2}\right)\right| dt + C_3\int\limits_{\frac{\lambda}{2}}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^2 \sigma\left(\frac{t}{2}\right) dt\right] \le$$

$$\le C_2\left[\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-1}\int\limits_{\frac{\lambda}{2}}^{\infty} \frac{t}{2}\left|q\left(\frac{t}{2}\right)\right| dt + C_3\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-1}\int\limits_{\frac{\lambda}{2}}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^3 \sigma\left(\frac{t}{2}\right) dt\right] \le C_4\lambda^{-1}.$$

Из последнего соотношения следует, что

$$I_3 = O(\lambda^{-1}), \quad \lambda \to +\infty. \tag{20}$$

Используя теперь (7), (8), (15), (18) – (20), а также соотношение $\varepsilon_n = o(\lambda_n^0)$, $n \to \infty$, получаем

$$\int_0^\infty K(0,t) f_0(t, \lambda_n^0 + \varepsilon_n)\, dt = O\big(n^{-\frac{1}{2}}\big), \quad n \to \infty.$$

Наконец, из (6) – (8) находим

$$\dot{f}_0\left(0, \lambda_n^0 + \theta_n \varepsilon_n\right) \sim -\pi^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{3\pi(4n-1)}{8}\right)^{\frac{1}{6}} \cos \pi n, \quad n \to \infty.$$

Сопоставляя два последних соотношения с (14), убеждаемся, что

$$\varepsilon_n = O\big(n^{-\frac{2}{3}}\big), \quad n \to \infty.$$

Тем самым доказательство теоремы завершено.

Литература

1. *Avron J., Herbst I.* Spectral and scattering theory of Schrödinger operators related to the Stark effect // Commun. Math. Phys. – 1977. – **52**. – P. 239 – 254.
2. *Lin Y., Qian M., Zhang Q.* Inverse scattering problem for one-dimensional Schrödinger operators related to the general Stark effect // Acta Math. Appl. Sinica. – 1989. – **5**, № 2. – P. 116 – 136.
3. *Yishen Li.* One special inverse problem of the second order differential equation on the whole real axis // Chin. Ann. Math. – 1981. – **2**, № 2. – P. 147 – 155.
4. *Kachalov A. P., Kurylev Ya. V.* The method of transformation operators in the inverse scattering problem. The one-dimensional Stark effect // J. Soviet Math. – 1991. – **5**, № 3. – P. 3111 – 3122.
5. *Муртазин Х. Х., Амангильдин Т. Г.* Асимптотика спектра оператора Штурма – Лиувилля // Мат. сб. – 1979. – **110 (152)**, № 1. – С. 135 – 149.
6. *Jensen A.* Perturbation results for Stark effect resonances //J. reine und angew. Math. – 1989. – **394**. – S. 168 – 179.
7. *Korotyaev E. L.* Resonances for 1D Stark operators // J. Spectral Theory. – 2017. – **7**, № 3. – P. 633 – 658.
8. *Korotyaev E. L.* Asymptotics of resonances for 1D Stark operators // Lett. Math. Phys. – 2018. – **118**, № 5. – P. 1307 – 1322.
9. *Chelkak D., Korotyaev E.* The inverse problem for perturbed harmonic oscillator on the half-line with Dirichlet boundary condition // Ann. H. Poincare. – 2017. – **8**, № 6. – P. 1115 – 1150.
10. *Chelkak D., Kargaev P., Korotyaev E.* Inverse problem for harmonic oscillator perturbed by potential, characterization // Commun. Math. Phys. – 2004. – **249**, № 4. – P. 133 – 196.
11. *Гусейнов И. М., Ханмамедов А. Х.* К обратной задаче рассеяния для одномерного уравнения Шредингера с растущим потенциалом // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 10. – С. 1390 – 1402.
12. *Bagirova S. M., Khanmamedov A. Kh.* The inverse spectral problem for the perturbed harmonic oscillator on the entire axis // Pro. Ins. Mat. and Mech. NAS Azerbaijan. – 2018. – **44**, № 2. – P. 1 – 10.
13. *Makhmudova M. G., Khanmamedov A. Kh.* The on an inverse spectral problem for a perturbed harmonic oscillator // Azerb. Math. J. – 2018. – **8**, № 2. – P. 181 – 191.
14. *Березин Ф. А., Шубин М. А.* Уравнение Шредингера. – М.: Наука, 1983. – 392 с.
15. *Абрамович М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 827 с.
16. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. – М.: Мир, 1982. – 428 с.
17. *Fournais S., Helffer B.* Spectral methods in surface superconductivit // Progr. Nonlinear Different. Equat. and Appl. – Birkhäuser, 2010.

Получено 20.12.18