УДК 517.9

О. В. Капустян, М. О. Перестюк, І. В. Романюк (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

СТІЙКІСТЬ ГЛОБАЛЬНИХ АТРАКТОРІВ ІМПУЛЬСНИХ НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ СИСТЕМ

The stability of global attractor is proved for an impulsive infinite-dimensional dynamical system. The obtained abstract results are applied to a weakly nonlinear parabolic equation whose solutions are subjected to impulsive perturbations at the times of intersection with a certain surface of the phase space.

Доказана устойчивость глобального аттрактора для импульсной бесконечномерной динамической системы. Полученные абстрактные результаты применены к слабонелинейному параболическому уравнению, решения которого подвергаются импульсному возмущению при достижении фиксированного подмножества фазового пространства.

Вступ. Одним із найбільш популярних математичних підходів до опису еволюційних процесів з миттєвими змінами є теорія імпульсних диференціальних рівнянь, що була започаткована в піонерських роботах А. М. Самойленка [1, 2]. На сьогодні завдяки роботам А. М. Самойленка, М. О. Перестюка [3 – 7], Р. Лакшмікантама, Д. Байнова [8] та багатьох інших математиків теорія імпульсних систем є окремим напрямком загальної теорії диференціальних рівнянь. Важливим класом систем з імпульсним збуренням є імпульсні (або розривні) динамічні системи, що описуються автономною еволюційною системою, траєкторії якої зазнають імпульсного впливу при досягненні фіксованої підмножини фазового простору (імпульсної множини). На відміну від систем з імпульсним збуренням у фіксовані моменти часу побудова якісної теорії для імпульсних динамічних систем ще далека від остаточного завершення. Різним її аспектам у скінченновимірному випадку присвячено роботи [5 – 17]. Для нескінченновимірних дисипативних динамічних систем одним із найефективніших інструментів дослідження якісної поведінки розв'язків є теорія глобальних атракторів [18 – 20]. Важливі узагальнення цієї теорії на випадок можливої неєдиності розв'язку задачі Коші одержано в роботах [21 – 25], на неавтономні задачі — в [26], зокрема, на системи з фіксованими моментами імпульсного збурення — в [27 – 32]. Проте перенесення основних конструкцій цієї теорії на імпульсні динамічні системи наштовхується на принципову проблему — відсутність у таких системах неперервної залежності розв'язку від початкових даних. Це вимагає нової концепції і для глобального атрактора, і для його основних характеристик (інваріантність, стійкість, робастність). У роботі [33] було запропоновано означення глобального атрактора як компактної, інваріантної, притягуючої множини, що не перетинається з імпульсною множиною. Очевидно, так введене поняття атрактора не є прийнятним у задачах, що допускають необмежену кількість стрибків уздовж траєкторій. У роботах [34, 35] в якості глобального атрактора пропонується розглядати передкомпактну, інваріантну, притягуючу множину $A = \bar{A} \setminus M$, де M — імпульсна множина. Недоліком цього підходу є дуже жорсткі умови на характер поведінки траєкторій в околі множини M ("tube condition") і відсутність скільки-небудь ефективних достатніх умов для їх перевірки. В роботах [36, 37] було запропоновано інший підхід, що ґрунтувався на понятті рівномірного атрактора для неавтономних систем — компактної мінімальної рівномірно притягуючої множини. Відсутність в такому означенні умови інваріантності дозволила не використовувати "tube condition" і одержати змістовні результати щодо існування та властивості атрактора для класів слабконелінійних імпульсно-збурених рівнянь. Пізніше в роботі [38] цей підхід було поширено на інші класи імпульсних систем, зокрема на ті, для яких не виконується умова єдиності розв'язку задач Коші. Крім того, за природних умов на імпульсні параметри було досліджено властивості інваріантності та робастності. Метою даної роботи є дослідження концепції стійкості глобального атрактора в сенсі [36, 37] імпульсної динамічної системи та застосування одержаних результатів до слабконелінійної імпульсно-збуреної системи.

Постановка задачі. Нехай $G : \mathbb{R} \times X \to X$ — напівгрупа, задана на нормованому просторі X (не обов'язково неперервна), $\beta(X)$ — сукупність обмежених підмножин X.

Означення 1 [37]. *Компакт $\Theta \subset X$ будемо називати глобальним атрактором G, якщо*:

1) Θ — *рівномірно притягуюча множина, тобто*

$$\forall B \in \beta(X): \quad \operatorname{dist}(G(t,B),\Theta) \to 0, \quad t \to \infty;$$

2) Θ — *мінімальна замкнена множина, що задовольняє умову* 1.

Очевидно, що якщо глобальний атрактор існує, то він єдиний. Якщо G має глобальний атрактор у класичному сенсі [20], тобто існує компакт $A \subset X$, який задовольняє умову 1 і є інваріантним $(G(t,A) = A \ \forall t \geq 0)$, то A задовольняє означення 1. Навпаки правильно за додаткової умови неперервності $G(t,\cdot)$, тобто якщо Θ — глобальний атрактор напівгрупи G і виконується умова

$$\text{для будь-якого} \quad t \geq 0 \quad \text{відображення} \quad x \to G(t,x) \quad \text{є неперервним}, \tag{1}$$

то Θ — глобальний атрактор напівгрупи G у класичному сенсі, зокрема

$$\Theta = G(t,\Theta) \quad \forall t \geq 0. \tag{2}$$

Саме тому в імпульсних (розривних) динамічних системах, де напівгрупа G, як правило, не задовольняє умову (1), природним є саме означення 1.

Іншою перевагою цього означення є наступний критерій.

Твердження 1 [30]. *Нехай G — дисипативна напівгрупа, тобто*

$$\exists B_0 \in \beta(X) \quad \forall B \in \beta(X) \quad \exists T = T(B) \quad \forall t \geq T: \qquad G(t,B) \subset B_0.$$

G має глобальний атрактор Θ тоді і тільки тоді, коли G є асимптотично компактною, тобто для будь-яких$\{x_n\} \in \beta(X)$ і $\{t_n \nearrow \infty\}$ послідовність $\{G(t_n,x_n)\}$ передкомпактна. При цьому

$$\Theta = \omega(B_0) := \bigcap_{\tau>0} \overline{\bigcup_{t\geq\tau} G(t,B_0)}.$$

За допомогою цього критерію в роботі [37] було виділено класи імпульсних нескінченновимірних дисипативних задач, що мають глобальний атрактор. Зокрема, було показано, що для достатньо малих $\varepsilon > 0$ розв'язки імпульсної задачі

$$\begin{gathered} \frac{\partial y}{\partial t} = \Delta y - \varepsilon f(y), \qquad t > 0, \quad x \in \Omega, \\ y\,|_{\partial\Omega} = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

де $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ — обмежена область, f — неперервно диференційовна функція, $f'(y) \geq -C$, $|f(y)| \leq C \;\; \forall\, y \in R,$ у фазовому просторі $X = L^2(\Omega)$ з імпульсною множиною

$$M = \{y \in X \mid (y, \psi_1) = a\} \tag{4}$$

та імпульсним відображенням $I\colon M \mapsto X$

$$y = a\psi_1 + \sum_{i=2}^{\infty} c_i\psi_i \;\; Iy = (1+\mu)a\psi_1 + \sum_{i=2}^{\infty} c_i\psi_i \tag{5}$$

породжують напігрупу G_ε, яка має глобальний атрактор Θ_ε, причому

$$\operatorname{dist}(\Theta_\varepsilon, \Theta_0) \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{6}$$

Тут

$$\Theta_0 = \bigcup_{t \in [0, \ln(1+\mu)]} \left\{(1+\mu)ae^{-t}\psi_1\right\} \cup \{0\} \tag{7}$$

— глобальний атрактор напівгрупи G_0, що породжується задачею (3)–(5) при $\varepsilon = 0$.

Аналіз стійкості почнемо з властивості інваріантності. Легко бачити, що множина Θ_0 має непорожній перетин з імпульсною множиною M і не є інваріантною відносно G_0. Натомість для $\Theta_0 \setminus M$ маємо

$$G_0(t, \Theta_0 \setminus M) = \Theta_0 \setminus M \quad \forall t \geq 0. \tag{8}$$

Рівність (8) зберігається і для збуреної задачі (3)–(5) для достатньо малих $\varepsilon > 0$

$$\Theta_\varepsilon \setminus M = G_\varepsilon(t, \Theta_\varepsilon \setminus M) \quad \forall t \geq 0. \tag{9}$$

Це дає підстави для імпульсної динамічної системи G з глобальним атрактором Θ аналізувати стійкість множини $\Theta \setminus M$. Наступне твердження випливає з [39] і встановлює зв'язок між різними означеннями стійкості компактних множин відносно напівгрупи G.

Твердження 2. *Якщо $A \subset X$ — компакт і виконується умова*

$$\forall x_n \to x \in A \quad \forall t_n \geq 0\colon \quad \{G(t_n, x_n)\} - \textit{передкомпакт}, \tag{10}$$

то наступні властивості є еквівалентними:

1) $\forall \varepsilon > 0\; \forall x \in A\; \exists \delta > 0\; \forall t \geq 0\; : G(t, O_\delta(x)) \subset O_\varepsilon(A)$;
2) $\forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0\; \forall t \geq 0\; : G(t, O_\delta(A)) \subset O_\varepsilon(A)$;
3) $\forall x \in A\; \forall y \notin A\; \exists \delta > 0\; \forall t \geq 0 : G(t, O_\delta(x)) \cap O_\delta(y) = \varnothing$;
4) $A = D^+(A) := \bigcup\limits_{x \in A} \{y \mid y = \lim G(t_n, x_n),\; x_n \to x,\; t_n \geq 0\}$.

***Зауваження* 1.** Оскільки $A \subset D^+(A)$ за побудовою, то властивість 4 еквівалентна вкладенню $D^+(A) \subset A$.

Наступний результат легко одержується від супротивного.

Твердження 3. *Якщо Θ — глобальний атрактор G і виконано умову*

$$\forall\, x_n \to x \in \Theta \quad \forall\, t_n \to t \geq 0\colon G(t_n, x_n) \to G(t, x), \tag{11}$$

то Θ є стійким у сенсі $1-4$.

Умова (11) є вирішальною. Її невиконання призводить до того, що атрактор Θ може не бути стійким у жодному з сенсів 1 – 4. Наприклад, для напівгрупи G_0 атрактор Θ_0, що задається (7), не задовольняє властивості 1 – 4. На жаль, те саме має місце і для інваріантної множини $\Theta_0 \setminus M$. Проте легко бачити, що для G_0

$$D^+(\Theta_0 \setminus M) \subset \overline{\Theta_0 \setminus M}. \tag{12}$$

Основною метою даної роботи є доведення того, що властивість (12) при певних додаткових умовах зберігається для широкого класу імпульсних динамічних систем, зокрема буде встановлено, що вона виконується для імпульсної задачі (3) – (5) при достатньо малих $\varepsilon > 0$.

Основні абстрактні результати. Далі під імпульсною динамічною системою $G = (V, M, I)$ будемо розуміти відображення $G\colon R_+ \times X \to X$, що будується за допомогою неперервної напівгрупи $V : R_+ \times X \to X$, імпульсної множини $M \subset X$ та імпульсного відображення $I : M \to X$ згідно з таким правилом [10]: якщо $V(t,x) \notin M$ для $x \in X$ і для всіх $t > 0$, то $G(t,x) = V(t,x)$; у іншому випадку

$$G(t,x) = \begin{cases} V(t - t_n), & t \in [t_n, t_{n+1}), \\ x_{n+1}^+, & t = t_{n+1}, \end{cases} \tag{13}$$

де $t_0 = 0$, $t_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} s_k$, $x_{n+1}^+ = IV(s_n, x_n^+)$, $x_0^+ = x$, s_n — моменти імпульсного збурення, що характеризуються умовою $V(s_n, x_n^+) \in M$.

За умов

$$\begin{gathered} M \text{ — замкнена}, \qquad M \cap IM = \varnothing, \\ \forall x \in M \quad \exists \tau = \tau(x) > 0 \quad \forall t \in (0, \tau)\colon \quad V(t,x) \notin M, \\ t \mapsto G(t,x) \quad \text{визначена на} \quad [0, +\infty) \quad \forall\, x \in X \end{gathered} \tag{14}$$

формула (13) визначає напівгрупу $G\colon R_+ \times X \to X$ [14, 37].

Зауваження 2. Остання умова в (14) означає, що вздовж кожної траєкторії динамічної системи G або кількість імпульсних точок не більш ніж скінченна, або $\sum_{n=0}^{\infty} s_n = \infty$.

Зауваження 3. За побудовою $G(t,x) \notin M$ $\forall x \in X$ $\forall t > 0$.

Будемо вважати виконаними такі умови неперервності:

$$\begin{gathered} I\colon M \to X \text{ є неперервним}, \\ \forall t_n \to t_0 \geq 0 \quad \forall x_n \to x_0\colon V(t_n, x_n) \to V(t_0, x_0). \end{gathered} \tag{15}$$

Враховуючи умови (14) і неперервність напівгрупи V, легко показати [14], що для довільного $x \in X$ або існує момент часу $s := s(x) > 0$ такий, що $V(t,x) \notin M$ $\forall t \in (0, s)$, $V(s,x) \in M$, або $V(t,x) \cap M = \varnothing$ $\forall t > 0$ (в цьому випадку покладемо $s(x) = \infty$).

Теорема 1. *Нехай імпульсна динамічна система $G = (V, M, I)$ задовольняє умови* (14), (15) *і для довільної послідовності $x_n \to x \notin M$*

$$\begin{gathered} s(x) = \infty, \quad \textit{якщо} \quad s(x_n) = \infty \quad \textit{для нескінченно багатьох} \quad n, \\ s(x_n) \to s(x) \quad \textit{— у протилежному випадку.} \end{gathered} \tag{16}$$

Нехай Θ *— глобальний атрактор напівгрупи* G. *Тоді* Θ *є додатно інваріантним у тому сенсі, що*

$$G(t, \Theta \setminus M) \subset \Theta \setminus M \quad \forall t > 0, \tag{17}$$

і стійким у тому сенсі, що

$$D^+(\Theta \setminus M) \subset \Theta. \tag{18}$$

***Зауваження* 4.** Умови (14), (16) нічого не вимагають щодо поведінки напівгрупи V при перетині множини M (на відміну від умов типу “tube condition” із робіт [33 – 35]).

Доведення. Використаємо результат, який за умови “tube condition” доведено в [34], а в загальному випадку багатозначної імпульсної динамічної системи — в [39].

Твердження 4. *За умов* (14) – (16) *для* $x_n \to x \notin M$ *і* $t \geq 0$ *існує* $\eta_n \to 0+$ *таке, що*

$$G(t + \eta_n, x_n) \to G(t, x).$$

Крім того, $\quad G(\alpha_n, x_n) \to x \quad \forall \alpha_n \to 0+$.

Доведемо (17). Нехай $x \in \Theta \setminus M$. Згідно з твердженням 1, $\exists t_n \to \infty : \exists \{z_n\} \subset \overline{O_\varepsilon(\Theta)} := B_0 :$ $\xi_n = G(t_n, z_n) \to x$. Тоді для будь-якого $t \geq 0$ існує $\eta_n \to 0+$ таке, що $G(t + \eta_n, \xi_n) \to G(t, x)$. Але $G(t + \eta_n, \xi_n) = G(t_n + t + \eta_n, z_n)$, отже, $G(t, x) \in \Theta \setminus M$.

Доведемо (18). Будемо міркувати від супротивного. Нехай для деяких $x_n \to x \in \Theta \setminus M$ та $\tau_n \geq 0$ виконується

$$y_n = G(\tau_n, x_n) \to y \notin \Theta. \tag{19}$$

Випадок $\tau_n \to \infty$ призводить до суперечності з твердженням 1, отже, будемо вважати, що $\tau_n \to \tau \geq 0$. Позначимо $s_0^{(n)} = s(x_n)$, $s_0 = s(x)$.

Якщо $s(x_n) = \infty$ для нескінченно багатьох $n \geq 1$, то $s(x) = \infty$, отже,

$$y_n = V(\tau_n, x_n) \to V(\tau, x) = G(\tau, x) \in \Theta \setminus M,$$

що суперечить умові (19).

В іншому випадку $s_0^{(n)} \to s_0 > 0$. Якщо $\tau < s_0$, то $\tau_n < s_0^{(n)}$, отже,

$$y_n = V(\tau_n, x_n) \to V(\tau, x) = G(\tau, x) \in \Theta \setminus M,$$

що теж суперечить умові (19).

Якщо $\tau = s_0$ і $\tau_n < s_0^n$, то

$$y_n = V(\tau_n, x_n) \to V(\tau, x) = V(s_0, x) \in M.$$

Оскільки для $\eta_n \searrow 0$ $\tau - \eta_n < s_0$, то, з одного боку,

$$V(\tau - \eta_n, x) \to V(\tau, x),$$

а з іншого —

$$V(\tau - \eta_n, x) = G(\tau - \eta_n, x) \in \Theta \setminus M.$$

Звідси $y = V(\tau, x) \in \overline{\Theta \setminus M} \subset \Theta$, що суперечить умові (19).

Якщо $\tau = s_0$ і $\tau_n \geq s_0^n$, то $\tau_n = s_0^n + \alpha_n,\ \alpha_n \to 0+$. Позначимо $x_1^{(n)+} = IV(s_0^{(n)}, x_n)$. Внаслідок умов неперервності (15) $x_1^{(n)+} \to IV(s_0, x) = x_1^+$, отже,

$$y_n = V(\alpha_n, x_1^{(n)+}) \to x_1^+ = G(s_0, x) \in \Theta \setminus M,$$

що суперечить умові (19).

Нехай $\tau > s_0$. Тоді $\tau_n > s_0^{(n)}$. Позначимо $s_1^{(n)} = s(x_1^{(n)+}),\ s_1 = s(x_1^+)$.

Якщо $s_1^{(n)} = \infty$, то $s_1 = \infty$, отже, з формули (13)

$$y_n = V(\tau_n - s_0^{(n)}, x_1^{(n)+}) \to V(\tau - s_0, x_1^+) = G(\tau, x) \in \Theta \setminus M,$$

що теж суперечить умові (19).

В іншому випадку $s_1^{(n)} \to s_1 > 0$ і, використовуючи формулу (13), можемо повторити попередні міркування для $s_0 < \tau \leq s_0 + s_1$ і т. д. Кожного разу будемо приходити до суперечності з (19).

Теорему 1 доведено.

***Зауваження* 5.** З доведення теореми 1 випливає виконання такої властивості:

$$\text{якщо} \quad x_n \to x \in \Theta \setminus M, \quad \tau_n \to \tau \geq 0, \quad y_n = G(\tau_n, x_n) \to y, \quad \text{то} \quad y \in \overline{\Theta \setminus M}. \tag{20}$$

Теорема 2. *Нехай імпульсна динамічна система $G = (V, M, I)$ задовольняє умови теореми* 1 *і, крім того, виконується умова*: *для $x_n \to x \in M$*

$$\textit{або} \quad s(x_n) = \infty \quad \textit{для нескінченно багатьох} \quad n, \quad \textit{або} \quad s(x_n) \to 0. \tag{21}$$

Нехай Θ — глобальний атрактор напівгрупи G. Тоді справджується рівність

$$\Theta = \overline{\Theta \setminus M}. \tag{22}$$

Крім того, Θ інваріантний у тому сенсі, що

$$G(t, \Theta \setminus M) = \Theta \setminus M \quad \forall t \geq 0, \tag{23}$$

і стійкий у тому сенсі, що

$$D^+(\Theta \setminus M) \subset \overline{\Theta \setminus M}. \tag{24}$$

***Зауваження* 6.** Рівність (22) означає, що $A = \Theta \setminus M$ — атрактор імпульсної динамічної системи G в сенсі роботи [34].

Доведення. Спочатку доведемо (22). Вкладення $\overline{\Theta \setminus M} \subset \Theta$ є очевидним. Нехай $\xi \in \Theta \cap M$. Тоді $\xi = \lim y_n,\ y_n = G(t_n, z_n)$, де $\{z_n\}$ обмежена, $t_n \to \infty$. Крім того,

$$y_n = G(t_n, z_n) = G(t, G(t_n - t, z_n)) = G(t, \eta_n),$$

де $\eta_n = G(t_n - t, z_n) \to \eta \in \Theta,\ t > 0,$ — довільне фіксоване число.

Якщо $\eta \notin M$, то з (20) виводимо $\xi \in \overline{\Theta \setminus M}$.

Нехай $\eta \in M$. Якщо $s(\eta_n) = \infty$ для нескінченно багатьох n, то, оскільки існує $\tau \in (0, t)$ таке, що для будь-якого $s \in (0, \tau]$ $V(s, \eta) \notin M$, можемо вважати, що

$$y_n = G(t,\eta_n) = V(t,\eta_n) = V(t-\tau, V(\tau,\eta_n)) = G(t-\tau, x_n),$$

де $x_n = V(\tau,\eta_n) \to V(\tau,\eta) \notin M$. Водночас

$$x_n = V(\tau,\eta_n) = G(\tau,\eta_n) = G(\tau + t_n - t, z_n),$$

отже, $V(\tau,\eta) \in \Theta\backslash M$ і згідно з (20) $\xi \in \overline{\Theta \setminus M}$. З огляду на умову (21) залишилось розглянути випадок $s(\eta_n) = s_n \to 0$. Маємо

$$y_n = G(t,\eta_n) = G(t - s_n, G(s_n,\eta_n)) = G(t - s_n, \eta_n^+),$$

де $\eta_n^+ = IV(s_n,\eta_n) \to I\eta \notin M$. З іншого боку, $\eta_n^+ = G(s_n + t_n - t, z_n)$, отже, $I\eta \in \Theta \setminus M$ і згідно з (20) $\xi \in \overline{\Theta \setminus M}$. Таким чином, ми довели рівність $\Theta = \overline{\Theta \setminus M}$, з якої і з попередньої теореми випливає (24).

Доведемо (23). Нехай $\xi \in \Theta\backslash M$, $t > 0$ фіксоване. Тоді, аналогічно попереднім міркуванням, $\xi = \lim \xi_n$, де $\xi_n = G(t, y_n)$, $y_n = G(t_n - t, z_n) \to y \in \Theta$. Якщо $y \notin M$, то на підставі твердження 4 існує $\eta_n \to 0+$ таке, що

$$G(t + \eta_n, y_n) \to G(t, y) \in G(t, \Theta \setminus M).$$

З іншого боку,

$$G(t + \eta_n, y_n) = G(\eta_n, G(t, y_n)) = G(\eta_n, \xi_n) \to \xi,$$

отже, $\xi \in G(t, \Theta \setminus M)$. Тепер нехай $y \in M$. Тоді $\exists \tau < t \ \forall p \in (0,\tau] : V(p, y) \notin M$.

Якщо $s(y_n) = \infty$, то

$$\xi_n = G(t, y_n) = V(t, y_n) = G(t - p, G(p, y_n)),$$
$$G(p, y_n) = V(p, y_n) \to V(p, y) \in \Theta \setminus M.$$

Тепер із попередніх міркувань випливає, що

$$\xi \in G(t - p, \Theta \setminus M).$$

Виберемо $p < \dfrac{t}{2}$. Тоді на підставі (17) $\xi \in G\Big(t - \dfrac{t}{2}, G\Big(\dfrac{t}{2} - p, \Theta \setminus M\Big) \subset G\Big(\dfrac{t}{2}, \Theta \setminus M\Big)$. В іншому випадку $s(y_n) \to 0$. Отже, для $s_n = s(y_n)$

$$\xi_n = G(t, y_n) = G(t - s_n, G(s_n, y_n)) = G(t - s_n, y_n^+),$$

де $y_n^+ = IV(s_n, y_n) \to Iy \in \Theta \setminus M$.

Розглянемо $\overline{\xi}_n = G(s_n, \xi_n)$. Тоді $\overline{\xi}_n \to \xi$, і на підставі рівності $\overline{\xi}_n = G(t, y_n^+)$ з попередніх міркувань випливає, що $\xi \in G(t, \Theta \setminus M)$.

Теорему 2 доведено.

Застосування до задачі (3) – (5).

Теорема 3. *Для достатньо малих* $\varepsilon > 0$ *глобальний атрактор* Θ_ε *імпульсної динамічної системи* G_ε, *породженої задачею* (3) – (5), *інваріантний і стійкий у сенсі* (22) – (24).

Доведення. Умови (14), а також дисипативність та асимптотична компактність перевірені в роботі [37], умови неперервності (15) випливають з такої властивості розв'язків задачі (3) [25]:

$$\text{якщо} \quad y_0^{(n)} \to y_0 \quad \text{слабко в} \quad L^2(\Omega), \quad \text{то} \quad \forall t_n \to t_0 > 0: \quad y^{(n)}(t_n) \to y(t_0) \quad \text{в} \quad L^2(\Omega);$$

$$\text{якщо} \quad y_0^{(n)} \to y_0 \quad \text{в} \quad L^2(\Omega), \quad \text{то для довільного} \quad T > 0 \quad y^{(n)} \to y \quad \text{в} \quad C([0,T]; L^2(\Omega)).$$

Отже, для доведення достатньо перевірити умови (16) і (21). Для будь-якого розв'язку задачі (3) маємо

$$(y_\varepsilon(t), \psi_1) = e^{-\lambda_1 t}(y_0, \psi_1) - \varepsilon \int_0^t e^{-\lambda_1(t-p)}(f(y_\varepsilon(p)), \psi_1)dp. \tag{25}$$

Всі подальші міркування будуть проводитись „для достатньо малих $\varepsilon > 0$", тобто для всіх $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$, де $\bar{\varepsilon} > 0$ залежить лише від сталих задачі (3) – (5).

Нехай $y_0 \notin M$, тобто $(y_0, \psi_1) \neq a$, $y_0^{(n)} \to y_0$ і $s(y_0^n) = \infty$. Для $(y_0, \psi_1) \leq \dfrac{a}{2}$ $s(y_0) = \infty$, тому будемо розглядати $(y_0, \psi_1) > \dfrac{a}{2}$, $(y_0^{(n)}, \psi_1) > \dfrac{a}{2}$.

Від супротивного, нехай $s(y_0) = s_0 > 0$. Тоді з (25) отримуємо

$$a = e^{-\lambda_1 s_0}(y_0, \psi_1) - \varepsilon \int_0^{s_0} e^{-\lambda_1(s_0-p)}(f(y_\varepsilon(p)), \psi)dp. \tag{26}$$

З іншого боку, розглянемо функцію $F: L^2(\Omega) \times R \to R$:

$$F(y,t) = e^{-\lambda_1 t}(y, \psi_1) - \varepsilon \int_0^t e^{-\lambda_1(t-p)}(f(y_\varepsilon(p)), \psi)dp - a,$$

де $y_\varepsilon(\cdot)$ — розв'язок задачі (3) з $y_\varepsilon(0) = y$.

Оскільки

$$F(y_0, s_0) = 0,$$

$$F'_t|_{(y_0,s_0)} = -\lambda_1 e^{-\lambda_1 s_0}(y_0, \psi_1) + \varepsilon\lambda_1 e^{-\lambda_1 s_0} \int_0^{s_0} e^{\lambda_1 p}(f(y_\varepsilon(p)), \psi_1)dp -$$

$$-\varepsilon(f(y_\varepsilon(s_0)), \psi_1) = -\lambda_1 a + \varepsilon K, \qquad |K| \leq C|\Omega|^{1/2},$$

то для достатньо малих $\varepsilon > 0$ одержуємо $F'_t|_{(y_0,s_0)} \neq 0$. Тоді за теоремою про неявну функцію $\exists \delta > 0$ $\forall y: \|y - y_0\| < \delta$ і $\exists t(y) > 0:$

$$F(y, t(y)) = 0,$$

що суперечить тому, що $s(y_0^{(n)}) = \infty$. Тепер нехай $s_0^n = s(y_0^{(n)}) \in (0, +\infty)$. Тоді з (26) для достатньо малих $\varepsilon > 0$ отримуємо

$$s_0^n \leq \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{2(y_0^{(n)}, \psi_1)}{a}, \tag{27}$$

і оскільки $y_0^n \to y_0$, то послідовність $\{s_0^n\}$ обмежена. Тоді по підпослідовності $s_0^n \to s_0 \geq 0$. Переходячи до границі у формулі (26), записаній для $s_0^{(n)}$, одержуємо його для s_0, y_0 та $y_\varepsilon(\cdot)$ — розв'язку задачі (3) з $y_\varepsilon(0) = y_0$. Звідси, зокрема, $s_0 > 0$, оскільки $(y_0, \psi) \neq a$.

Доведемо, що $s_0 = s(y_0)$. Розглянемо функцію

$$f(t) = e^{-\lambda_1 t}(y_0, \psi_1) - \varepsilon \int\limits_0^t e^{-\lambda_1(t-p)}(f(y_\varepsilon(p)), \psi_1)\, dp - a.$$

Якщо $(y_0, \psi_1) > a$, то $f(0) > 0$, $f(s_0) = 0$,

$$f'(t) = -\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}(y_0, \psi_1) + \varepsilon \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \int\limits_0^t e^{\lambda_1 p}(f(y_\varepsilon(p)), \psi_1) dp - \varepsilon(f(y_\varepsilon(t)), \psi_1).$$

Отже, при $t \in [0, s_0]$ з (26) для достатньо малих $\varepsilon > 0$ маємо

$$f'(t) < -\lambda_1 a + \varepsilon K(t), \quad \text{де} \quad |K(t)| \leq C|\Omega|^{1/2}.$$

Звідси виводимо, що $f(t) > 0$ $\forall t \in [0, s_0)$ і, таким чином, $s_0 = s(y_0)$. Якщо ж $(y_0, \psi_1) < a$, то $f(0) < 0$, і попередній аналіз показує, що це неможливо. Таким чином, властивість (16) доведено.

Доведемо властивість (21). Нехай $y_0^{(n)} \to y_0 \in M$, $s_0^n = s(y_0^{(n)}) < +\infty$. Покажемо, що тоді $s_0^n = s(y_0^{(n)}) \to 0$. З (27) випливає, що $\{s_0^n\}$ обмежена, отже, $s_0^n \to s_0 \geq 0$. Записавши (26) для s_0^n і перейшовши до границі, одержимо

$$a = e^{-\lambda_1 s_0} a - \varepsilon \int\limits_0^{s_0} e^{-\lambda_1(s_0-p)}(f(y_\varepsilon(p)), \psi_1)\, dp, \tag{28}$$

де $y_\varepsilon(\cdot)$ — розв'язок задачі (3) з $y_\varepsilon(0) = y_0$. Нехай $s_0 > 0$. Розглянемо функцію

$$f(t) = e^{-\lambda_1 t} a - \varepsilon \int\limits_0^t e^{-\lambda_1(t-p)}(f(y_\varepsilon(p)), \psi_1)\, dp - a.$$

Тоді $f(0) = 0$ і $f'(t) < -\lambda_1 a + \varepsilon K(t) < 0$ при $t \in [0, s_0]$ для достатньо малих $\varepsilon > 0$. Отже, $f(s_0) < f(0) = 0$, що суперечить (28). Звідси випливає, що $s_0 = 0$.

Теорему 3 доведено.

Література

1. *Самойленко А. М., Мышкис А. Д.* Системы с толчками в заданные моменты времени // Мат. сб. – 1967. – **74**, вып. 2. – С. 202 – 208.
2. *Самойленко А. М.* Метод усреднения в системах с толчками // Мат. физика. – 1971. – Вып. 9. – С. 101 – 117.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**. – С. 1981 – 1992.

4. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Изд-во Киев. гос. ун-та, 1980. – 80 с.
5. *Перестюк Н. А.* Инвариантные множества одного класса разрывных динамических систем // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 1. – С. 63 – 78.
6. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
7. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1995. – 462 p.
8. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1989.
9. *Rozko V.* Stability in terms of Lyapunov of discontinuous dynamic systems // Differents. Uravn. – 1975. – **11**, № 6. – P. 1005 – 1012.
10. *Kaul S. K.* Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems // J. Appl. Math. Stochast. Anal. – 1994. – **7**, № 4. – P. 509 – 523.
11. *Pavlidis T.* Stability of a class of discontinuous dynamical systems // Inform. and Contr. – 1996. – **9**. – P. 298 – 322.
12. *Ciesielski K.* On stability in impulsive dynamical systems // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. – 2004. – **52**. – P. 81 – 91.
13. *Akhmet M.* Principles of discontinuous dynamical systems. – New York: Springer, 2010.
14. *Bonotto E. M.* Flows of characteristic 0+ in impulsive semidynamical systems // J. Math. Anal. and Appl. – 2007. – **332**. – P. 81 – 96.
15. *Перестюк Ю. М.* Розривні коливання в одній імпульсній системі // Нелінійні коливання. – 2012. – **15**, № 4. – С. 494 – 503.
16. *Li K., Ding C., Wang F., Hu J.* Limit set maps in impulsive semidynamical systems // J. Dynam. and Control Syst. – 2014. – **20**, № 1. – P. 47 – 58.
17. *Фекета П. В., Перестюк Ю. М.* Теореми про збурення для багаточастотної системи з імпульсами // Нелінійні коливання. – 2015. – **18**, № 2. – С. 280 – 289.
18. *Hale J. K.* Asymptotic behavior of dissipative systems. – Providence: Amer. Math. Soc., 1988.
19. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. – New York: Springer, 1988. – 500 p.
20. *Чуешов И. Д.* Введение в теорию бесконечномерных диссипативных систем. – Харків: АСТА, 1999. – 418 с.
21. *Melnik V. S.* Multivalued dynamics of nonlinear infinite-dimensional systems. – Kyiv, 1994. – 41 p. – (Preprint / Nat. Acad. Sci. Ukraine, Inst. Cybernetics, № 94-17).
22. *Melnik V. S., Valero J.* On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions // Set-Valued Anal. – 1998. – № 6. – P. 83 – 111.
23. *Melnik V. S., Kapustyan O. V.* On global attractors of multivalued semidynamic systems and their approximations // Dokl. Akademii Nauk. – 1998. – **366**, № 2. – P. 445 – 448.
24. *Kapustyan O. V., Shkundin D. V.* Global attractor of one nonlinear parabolic equation // Ukr. Math. J. – 2003. – **55**, № 4. – P. 446 – 455.
25. *Kapustyan O. V., Kasyanov P. O., Valero J.* Regular solutions and global attractors for reaction-diffusion systems without uniqueness // Communs Pure and Appl. Anal. – 2014. – **13**, № 5. – P. 1891 – 1906.
26. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Attractors for equations of mathematical physics. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002.
27. *Капустян О. В., Перестюк М. О.* Глобальний атрактор еволюційного включення з імпульсним впливом у фіксовані моменти часу // Укр. мат. журн. — 2003. – **55**, № 8. – С. 1283 – 1294.
28. *Schmalfuss B.* Attractors for nonautonomous and random dynamical systems perturbed by impulses // Discrete and Contin. Dynam. Syst. – 2003. – **9**. – P. 727 – 744.
29. *Kapustyan O. V., Iovane G.* Global attractor for impulsive reaction-diffusion equation // Nonlinear Oscillations. – 2005. – **8**, № 3. – P. 318 – 328.
30. *Kapustyan O. V., Valero J., Iovane G.* Asymptotic behavior of reaction-diffusion equations with non-damped impulsive effects // Nonlinear Anal. – 2008. – **68**. – P. 2516 – 2530.
31. *Yan X., Wub Y., Zhong C.* Uniform attractors for impulsive reaction-diffusion equations // Appl. Math. and Comput. – 2010. – **216**. – P. 2534 – 2543.
32. *Perestyuk M. O., Kapustyan O. V.* Long-time behavior of evolution inclusion with non-damped impulsive effects // Mem. Different. Equat. and Math. Phys. – 2012. – **56**. – P. 89 – 113.

33. *Bonotto E. M., Demuner D. P.* Attractors of impulsive dissipative semidynamical systems // Bull. Sci. Math. – 2013. – **137**. – P. 617 – 642.
34. *Bonotto E. M., Bortolan M. C., Carvalho A. N., Czaja R.* Global attractors for impulsive dynamical systems – a precompact approach // J. Different. Equat. – 2015. – **259**. – P. 2602 – 2625.
35. *Bonotto E. M., Bortolan M. C., Collegary R., Czaja R.* Semicontinuity of attractors for impulsive dynamical systems // J. Different. Equat. – 2016. – **261**. – P. 4358 – 4367.
36. *Perestyuk M. O., Kapustyan O. V.* Existence of global attractors for impulsive dynamical systems // Repts Nat. Acad. Sci. Ukraine. Mathematics. – 2015. – **12**. – P. 13 – 18.
37. *Perestyuk M. O., Kapustyan O. V.* Global attractors of impulsive infinite-dimensional systems // Ukr. Math. J. – 2016. – **68**, № 4. – P. 517 – 528.
38. *Dashkovskiy S., Kapustyan O. V., Romaniuk. I. V.* Global attractors of impulsive parabolic inclusions // Discrete and Contin. Dynam. Syst. Ser. B. – 2017. – **22**, № 5. – P. 1875 – 1886.
39. *Bhatia N. P., Szegö G. P.* Stability theory of dynamical systems. – New York: Springer, 2002.

Одержано 09.10.17