УДК 517.9

В. І. Кравець (Таврій. держ. агротехнол. ун-т, Мелітополь),
Т. В. Ковальчук (Київ. нац. торг.-економ. ун-т),
В. В. Могильова (Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”),
О. М. Станжицький (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ ДО ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ

We study the application of the method of averaging to the problems of optimal control over functional-differential equations. The procedure of averaging allows us to replace the original problem with the problem of optimal control by a system of ordinary differential equations. It is proved that the optimal control over the averaged problem is almost optimal for the exact problem. The optimal control problems are investigated on finite and infinite horizons.

Метод усреднения применен к исследованию задач оптимального управления функционально-дифференциальными уравнениями. Усреднение дает возможность заменить исходную задачу задачей оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Доказано, что оптимальное управление усредненной задачи является почти оптимальным для точной. Рассмотрены задачи с конечным и бесконечным горизонтами.

1. Вступ. Нехай $h > 0$. Позначимо через $C = C([-h, 0]; \mathbb{R}^d)$ банахів простір неперервних векторних функцій, визначених на $[-h, 0]$, що діють в $\mathbb{R}^d$ із рівномірною нормою $\|\varphi\|_C = \max_{\theta\in[-h,0]} |\varphi(\theta)|$. Через $|\cdot|$ будемо позначати евклідову норму вектора в евклідових просторах, а через $\|\cdot\|$ — норму матриці, узгоджену з нормою вектора.

В даній роботі для системи функціонально-диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t) = \varepsilon X(t, x_t, u) \quad \left(\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\right),$$
$$x(t) = \varphi_0(t), \quad t \in [-h, 0], \tag{1}$$

розглянуто дві задачі оптимального керування:

1) на скінченному проміжку із критерієм якості

$$J_\varepsilon^1(u) = \Phi\left(x\left(\frac{T}{\varepsilon}\right), u\right) \to \inf, \tag{2}$$

2) на нескінченному проміжку із критерієм якості

$$J_\varepsilon^2(u) = \int\limits_0^\infty e^{-\gamma t} L(t, x(t))dt \to \inf. \tag{3}$$

Тут $\varphi \in C$ — початкова функція, $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $x \in \mathbb{R}^d$ — фазовий вектор в $\mathbb{R}^d$, $x_t = x(t+\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$, $u(t)$ — вектор керування, $u(t) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, $T > 0$, $\gamma > 0$ — фіксовані сталі.

Керування $u(t)$ вважається допустимим для задачі (1) – (3), якщо:

a$_1$) функція $u(t)$ є вимірною і локально інтегровною при $t \geq 0$;

a$_2$) $u(t) \in \mathcal{U}$ для $t \geq 0$;

а$_3$) для кожного $u(t)$ існує така стала $u_0 \in \mathcal{U}$, що $u(t) \to u_0$ при $t \to \infty$ рівномірно для всіх керувань, тобто для довільного $\delta > 0$ існує стала $T_0 > 0$, незалежна від $u(t)$, u_0 і така, що для кожного $t \geq T_0$ виконується нерівність $|u(t) - u_0| < \delta$;

а$_4$) для функціонала (3) виконано умову $|J_\varepsilon(u)| < \infty$.

Зазначимо, що умову а$_3$), очевидно, виконано, якщо існує незалежна від $u \in F$ функція $\varphi(t) \to 0$, $t \to 0$, така, що $|u(t) - u_0| < \varphi(t)$.

Множину допустимих керувань задач (1) – (3) позначимо через F, при цьому $J_\varepsilon^1 = \inf_{u \in F} J_\varepsilon^1(u)$ та $J_\varepsilon^2 = \inf_{u\in F} J_\varepsilon^2(u)$.

Пара $(x_\varepsilon^*(t), u_\varepsilon^*(t))$ є оптимальною для задачі (1) – (3), якщо u_ε^* — допустиме керування і $J_\varepsilon^1(u_\varepsilon^*) = J_\varepsilon^1$ для функціонала (2), або $J_\varepsilon^2(u_\varepsilon^*) = J_\varepsilon^2$ для функціонала (3).

Для кожного елемента $\varphi \in C$ нехай $\hat{\varphi} \in C$ такий, що $\hat{\varphi}(t) = \varphi(0)$ при $t \in [-h, 0]$. За відображенням $X(t, \varphi, u)\colon [0,\infty) \times C \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^d$ побудуємо відображення $Y(t,x,u)\colon [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^d$ таким чином. Для кожного $x \in \mathbb{R}^d$ розглянемо таке $\varphi \in C$, що $\varphi(0) = x$. Тоді $Y(t,x,u) = X(t, \hat{\varphi}, u)$. Очевидно, Y є вже скінченновимірним відображенням.

Нехай виконано таку умову усереднення:

а$_5$) рівномірно по $x \in \mathbb{R}^d$ і $u \in \mathcal{U}$ існує границя

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \int_0^s Y(t,x,u)dt = Y_0(x,u). \tag{4}$$

Задачам оптимального керування (1) – (3) поставимо у відповідність усереднені задачі

$$\begin{gathered} \dot{y}(t) = \varepsilon Y_0(y, u_0), \\ y(0) = \varphi_0(0), \end{gathered} \tag{5}$$

$$\bar{J}_\varepsilon^1(u_0) = \Phi\left(y\left(\frac{T}{\varepsilon}, u_0\right)\right) \to \inf, \tag{6}$$

$$\bar{J}_\varepsilon^2(u_0) = \int_0^\infty e^{-\gamma t} L(t, y(t))dt \to \inf. \tag{7}$$

Ці задачі є вже задачами оптимального керування для систем звичайних диференціальних рівнянь і значно простіші, ніж початкові задачі (1) – (3). Зазначимо також, що в задачах (5) – (7) розглядаються сталі керування, що робить їх скінченновимірними. Аналогічно до початкової задачі позначимо $\bar{J}_\varepsilon^1 = \inf_{u\in F} \bar{J}_\varepsilon^1(u)$, а $\bar{J}_\varepsilon^2 = \inf_{u \in F} \bar{J}_\varepsilon^2(u)$.

Основним результатом роботи є встановлення того факту, що оптимальне керування $u_0^*(\varepsilon)$ усереднених задач є η-оптимальним для початкових задач, а саме, для довільного $\eta > 0$ існує таке $\varepsilon_0 > 0$, що при всіх $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ виконуються нерівності

$$\left|J_\varepsilon^1(u_0^*(\varepsilon)) - J_\varepsilon^1\right| < \eta, \quad \left|J_\varepsilon^2(u_0^*(\varepsilon)) - J_\varepsilon^2\right| < \eta$$

відповідно. Тут, звичайно, ε_0 і $u_0^*(\varepsilon)$ різні для (2) та (3).

Відомо, що метод усереднення є одним із найбільш поширених методів аналізу нелінійних динамічних систем. Для звичайних диференціальних рівнянь він був обґрунтований М. М. Боголюбовим [1].

У подальшому цей метод узагальнювався на різні класи диференціальних рівнянь, наприклад імпульсні [2], функціонально-диференціальні [3 – 6] та інші.

Метод усереднення виявився також ефективним і для розв'язування задач оптимального керування. Даним питанням присвячено низку робіт (див., наприклад, [7] і наведену там бібліографію).

В роботі [8] розвинено відмінний від раніше відомих підходів щодо застосування методу усереднення до задач оптимального керування, а саме, здійснювалось усереднення за часом, що явно входить у праві частини системи. Вважаючи функцію керування u параметром, далі при дослідженні усередненої задачі розглядали ті ж керування, що і для початкової. В роботі [9] такий підхід застосовано до функціонально-диференціальних рівнянь.

Дана робота узагальнює результати роботи [9] у двох напрямках: по-перше, усереднена задача розглядається лише на сталих керуваннях, а по-друге, розглянуто також задачу керування на півосі.

2. Постановка задачі та формулювання основних результатів. У подальшому для задач (1) – (3) та відповідних їм усереднених задач (5) – (7) будемо вважати виконаними такі умови:

2.1) відображення $X(t,\varphi,u)\colon [0,\infty]\times C\times\mathcal{U}\to\mathbb{R}^d$ неперервне за сукупністю змінних, причому функція X рівномірно неперервна по $u\in\mathcal{U}$, рівномірно відносно $t\geq 0,\ \varphi\in C$;

2.2) X задовольняє за змінною φ умову Ліпшиця, тобто існує така стала $L>0$, що

$$|X(t,\varphi,u)-X(t,\psi,u)|\leq\|\varphi-\psi\|_C\,;$$

2.3) існує $M>0$ таке, що $|X(t,0,u)|\leq M$ для $t\geq 0,\ u\in\mathcal{U}$;

2.4) виконано умову a_5);

2.5) функція $\Phi\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^1$ є рівномірно неперервною при $x\in\mathbb{R}^d$;

2.6) функція $L\colon[0,\infty)\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^1$ рівномірно неперервна за сукупністю аргументів.

Наступна теорема стосується зв'язку між задачами (1), (2) та (5), (6).

Теорема 1. *Нехай виконано умови* 2.1) – 2.5) *та існує оптимальне керування* $u_0^*(\varepsilon)$ *при* $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$ *усередненої задачі. Тоді для довільного* $\eta>0$ *існує таке* $\varepsilon_1=\varepsilon_1(\varepsilon_0,\eta)>0$, *що*:

1) $J_\varepsilon^1>-\infty$ *для довільного* $0<\varepsilon\leq\varepsilon_1$;

2) *виконується нерівність*

$$\left|J_\varepsilon^1(u_0^*(\varepsilon))-J_\varepsilon^1\right|\leq\eta, \tag{8}$$

тобто оптимальне керування усередненої задачі є η*-оптимальним для точної задачі* (1), (2).

***Зауваження* 1.** Якщо в умовах теореми 1 множина значень допустимих керувань $\mathcal{U}$ є компактом в $\mathbb{R}^m$, то оптимальне керування $u_0^*(\varepsilon)$ існує.

Дійсно, з умов 2.1) – 2.4) випливає, що функція $Y_0(y,u_0)$ неперервна за сукупністю змінних та ліпшицева по y, тому функція $\Phi\left(y\left(\dfrac{T}{\varepsilon},u_0\right)\right)$ є неперервною по u_0. Тоді існування оптимального керування випливає з теореми Вейєрштрасса.

***Зауваження* 2.** Якщо функція $Y_0(y,u_0)$ є неперервно диференційовною по y і u_0, а функція $\Phi(z)$ — неперервно диференційовною за змінною z, то задача (5), (6) є гладкою скінченновимірною екстремальною задачею.

Останнє випливає з теореми про гладку залежність розв'язку задачі Коші від параметра. Отже, оптимальне керування задачі (5), (6) лежить або на межі $\mathcal{U}$, або у внутрішніх точках, де

$$\frac{d\Phi\left(y\left(\dfrac{T}{\varepsilon},u_0\right)\right)}{du_0}=0.$$

Останнє рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial y\left(\dfrac{T}{\varepsilon},u_0\right)}{\partial u_0}=0.$$

Більш того, $\dfrac{\partial y\left(\dfrac{T}{\varepsilon},u_0\right)}{\partial u_0}$ задовольняє рівняння у варіаціях

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial y\left(\dfrac{T}{\varepsilon},u_0\right)}{\partial u_0}=\varepsilon\frac{\partial Y_0\left(y(t,u_0),u_0\right)}{\partial y}\frac{\partial y(t,u_0)}{\partial u_0}+\frac{\partial Y_0\left(y(t,u_0),u_0\right)}{\partial u_0}$$

з початковою умовою $\dfrac{\partial y\left(0,u_0\right)}{\partial u_0}=0.$

Наступна теорема стосується задач оптимального керування на півосі. Для цього систему (5) запишемо у „повільному” часі $\tau=\varepsilon t$:

$$\frac{dy}{d\tau}=Y_0(y,u_0),\quad y(0)=\varphi_0(0), \tag{9}$$

а умову a$_5$) посилимо до такої умови:

a$_6$) рівномірно по $t\geq 0,\ x\in\mathbb{R}^d$ і $u\in\mathcal{U}$ існує границя

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\int\limits_t^{t+s}Y_0(\xi,x,u)d\xi=Y_0(x,u). \tag{10}$$

Теорема 2. *Нехай виконано умови* 2.1) – 2.3), 2.6), a$_6$), *а розв'язок задачі Коші* (9) *рівномірно асимптотично стійкий по* τ_0 *і* u_0. *Тоді якщо існує оптимальне керування* $u_0^*(\varepsilon)$ *при* $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$ *усередненої задачі* (5) – (7), *то для довільного* $\eta>0$ *існує* $\varepsilon_1=\varepsilon_1(\varepsilon_0,\eta)>0$ *таке, що*:

1) $J_\varepsilon^2>-\infty$ *для довільного* $0<\varepsilon<\varepsilon_1$;

2) *виконується нерівність*

$$\left|J_\varepsilon^2(u_0^*(\varepsilon))-J_\varepsilon^2\right|\leq\eta. \tag{11}$$

***Зауваження* 3.** Якщо в умовах теореми 2 множина значень допустимих керувань $\mathcal{U}$ є компактом в $\mathbb{R}^m$, то оптимальне керування $u_0^*(\varepsilon)$ задачі (5) – (7) існує. Дійсно, з умов 2.1) – 2.3) та a$_6$) випливає, що $Y_0(y,u_0)$ неперервна за сукупністю змінних, ліпшицева по y і задовольняє умову лінійного зростання. А тому розв'язок задачі Коші (9) необмежено продовжуваний вправо і на кожному скінченному інтервалі неперервно залежить від u_0. Тоді і функціонал $J_\varepsilon^2(u_0)$ неперервно залежить від u_0 за умовою 2.6) і теоремою Лебега про мажоровану збіжність.

3. Леми про усереднення. При доведенні теорем 1 та 2 ключову роль відіграють дві леми, що є узагальненнями принципу усереднення для функціонально-диференціальних рівнянь на випадок залежності правих частин від функціональних параметрів. Перша лема стосується скінченного часового інтервалу.

Лема 1. *Нехай виконано умови* 2.1) – 2.4). *Тоді для довільних* $\eta > 0$ *і* $T > 0$ *існує* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta, T) > 0$ *таке, що для довільного* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *та* $t \in \left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$ *виконується нерівність*

$$|x(t,u) - y(t,u_0)| \le \eta \tag{12}$$

для кожного керування $u \in F$, *а* u_0 *вибрано з умови* a$_3$).

***Зауваження* 4.** Оцінка (12) рівномірна за всіма $u \in F$ та $\varphi_0(0)$, тобто ε_0 не залежить від u та φ_0.

Доведення. По-перше, зауважимо, що з умов 2.1) – 2.3) випливає існування, єдиність і необмежувана продовжуваність вправо розв'язку $x(t,u)$ початкової задачі (1). З умови 2.4) випливає також, що $Y_0(y,u_0)$ є глобально ліпшицевою по y і задовольняє умову лінійного зростання. Також очевидно, що $Y_0(y,u_0)$ є неперервною за сукупністю змінних. Отже, і розв'язок задачі (9) існує, єдиний і необмежено продовжуваний вправо.

Візьмемо тепер довільне $T > 0$ і $\eta > 0$ та зафіксуємо їх. Для $\varepsilon > 0$ і довільного $u \in F$ оцінимо норму різниці між розв'язком задачі (1) та системи

$$\dot{z} = \varepsilon X(t, z_t, u_0), \quad z(t) = \varphi_0(t), \quad t \in [-h, 0]. \tag{13}$$

Тут u_0 вибрано для $u(t) \in F$ із умови a$_3$). Маємо

$$x(t) - z(t) = \varepsilon \int_0^t \left[X(s, x_s, u(s)) - X(s, z_s, u(s))\right] ds +$$

$$+ \varepsilon \int_0^t \left[X(s, x_s, u(s)) - X(s, z_s, u_0)\right] ds. \tag{14}$$

З умови (8) випливає існування такого $\delta > 0$, що при $|u - u_0| < \delta$

$$|X(t, \varphi, u) - X(t, \varphi, u_0)| < \frac{\eta}{2T \exp\{TL\}} \tag{15}$$

для $t \ge 0$, $\varphi \in C$, при цьому δ не залежить від t і φ. Виберемо тепер T_0 з умови a$_3$) так, щоб при $t \ge T_0$ виконувалась нерівність

$$|u(t) - u_0| < \delta. \tag{16}$$

Очевидно, що $\dfrac{T}{\varepsilon} \ge T_0$ при малих $\varepsilon > 0$. Далі зазначимо, що стандартними оцінками з умов 2.2) і 2.3) з використанням леми Гронуолла – Беллмана можна отримати нерівність

$$|x(t,u)| + |z(t,u)| + |y(t,u_0)| \le C \tag{17}$$

при $t \in \left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$, де стала C залежить лише від T, L, M і φ_0. Тоді

$$|x(t)-z(t)| \leq \varepsilon L \int\limits_0^t \|x_s - z_s\|_C \, ds + \varepsilon \int\limits_0^{T_0} |X(s,x_s,u(s)) - X(s,x_s,u_0)| \, ds +$$

$$+\varepsilon \int\limits_{T_0}^t |X(s,x_s,u(s)) - X(s,x_s,u_0)| \, ds \leq \varepsilon L \int\limits_0^t \|x_s - z_s\|_C \, ds + \varepsilon T_0 C_1 + \frac{\eta}{2\exp\{TL\}} \tag{18}$$

для деякої сталої C_1, незалежної від ε і η. Остання оцінка випливає з (15), (16) та умов 2.2) і 2.3).

Позначимо $m(t) = \max_{s\in[-h,t]} |x(t)-z(t)|$. Тоді з (18) отримуємо

$$m(t) \leq \varepsilon L \int\limits_0^t m(s)ds + \varepsilon T_0 C_1 + \frac{\eta}{2\exp\{TL\}},$$

звідки випливає, що

$$|x(t)-z(t)| \leq \varepsilon T_0 C_1 e^{LT} + \frac{\eta}{2}. \tag{19}$$

Для розв'язків задач (13) і (9) з урахуванням результатів [6] (п. 4.2.1) при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ справджується на $\left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$ оцінка

$$|z(t)-y(t)| \leq \frac{\eta}{2}. \tag{20}$$

Тоді з (19) і (20) випливає твердження леми 1.

Наступна лема обґрунтовує схему усереднення на півосі.

Лема 2. *Нехай виконано умови* 2.1)–2.3) *та умову* a$_6$), *а розв'язок* $y(\tau,u_0)$ *задачі* (9) *рівномірно асимптотично стійкий по* τ_0 *та* u_0. *Тоді для довільного* $\eta > 0$ *існує* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta) > 0$ *таке, що при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *для розв'язків* $x(t,u)$ *та* $y(t,u_0)$ *задач* (1) *і* (5) *справджується оцінка*

$$|x(t,u) - y(t,u_0)| \leq \eta \tag{21}$$

для кожного керування $u \in F$ *і* u_0, *вибраного з умови* a$_3$).

***Зауваження* 5.** Як і в лемі 1, оцінка (21) рівномірна по $u \in F$ та $\varphi_0(0)$.

Доведення. Оскільки розв'язок $y(\tau,u_0)$ усередненої системи (9) рівномірно асимптотично стійкий, то для η існують такі $\delta(\eta) < \dfrac{\eta}{2}$ і $T(\delta) > 0$, що для довільного іншого розв'язку $y_1(\tau,u_0)$ системи (9) із нерівності

$$|y(\tau_0,u_0) - y_1(\tau_0,u_0)| < \delta$$

випливає виконання нерівностей

$$|y(\tau,u_0) - y_1(\tau,u_0)| < \frac{\eta}{2} \quad \text{при} \quad \tau \geq \tau_0,$$

$$|y(\tau,u_0) - y_1(\tau,u_0)| < \frac{\delta}{2} \quad \text{при} \quad \tau \geq \tau_0 + T,$$

де δ не залежить від δ_0 і u_0.

Враховуючи рівномірність границі (10) відносно $t \geq 0$, із леми 1 отримуємо, що за вказаними δ і T можна вибрати таке $\varepsilon_1(\delta, T)$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ на відрізку $[\tau_0, \tau_0 + T]$ справедливою є оцінка

$$\left| x\left(\frac{T}{\varepsilon}, u\right) - y\left(\tau, u_0\right) \right| < \frac{\delta}{2}.$$

Розглянемо тепер розв'язок $y_T(\tau, u_0)$ системи (9) такий, що $y_T(T, u_0) = x\left(\frac{T}{\varepsilon}, u\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right)$. Тоді виконується нерівність $|y(T, u_0) - y_T(T, u_0)| < \delta$, з якої випливають нерівності

$$|y(\tau, u_0) - y_T(\tau, u_0)| \leq \frac{\eta}{2} \quad \text{при} \quad \tau \geq T,$$

$$|y(\tau, u_0) - y_T(\tau, u_0)| \leq \frac{\delta}{2} \quad \text{при} \quad \tau \geq 2T.$$

Для розв'язків $x\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u\right)$ і $y_T(\tau, u_0)$ згідно з лемою 1 виконується нерівність

$$\left| x\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u\right) - y_T(\tau, u_0) \right| < \frac{\delta}{2} \quad \text{при} \quad \tau \in [T, 2T],$$

отже,

$$\left| x\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u\right) - y(\tau, u_0) \right| \leq \left| x\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, u\right) - y_T(\tau, u_0) \right| + \left| y_T\left(\tau, u_0\right) - y(\tau, u_0) \right| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\eta}{2} < \eta,$$

а при $\tau = 2T$ отримуємо

$$\left| x\left(\frac{2T}{\varepsilon}, u\right) - y(2T, u_0) \right| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Розглядаючи тепер розв'язок $y_{2T}(2T, u_0) = x\left(\frac{2T}{\varepsilon}, u\left(\frac{2T}{\varepsilon}\right)\right)$ і продовжуючи дану процедуру, завершуємо доведення леми.

4. Доведення теорем. ***4.1. Доведення теореми* 1.** Перше твердження теореми доведемо від супротивного. Якщо це твердження не виконується, то існує послідовність $\varepsilon_n > 0$ така, що $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$,

$$J^1_{\varepsilon_n} = -\infty. \tag{22}$$

Тоді для кожного ε_n існує така послідовність керувань $u^n_m \in F$, що

$$J^1_{\varepsilon_n}(u^n_m) \to -\infty \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{23}$$

Нехай $x^n_m(t, u^n_m)$ та $y^n_m(t, u^n_{0m})$ — розв'язки задач (1) і (5), що відповідають керуванням $u^n_m(t)$ та u^n_{0m}. Тут u^n_{0m} вибрано з умови a$_3$).

Оскільки для задачі (5), (6) існує оптимальне керування, то

$$\bar{J}^1_{\varepsilon}(u^n_{0m}) \geq \bar{J}_{\varepsilon_n} > -\infty.$$

Зафіксуємо деяке $\eta_0 > 0$. Тоді з умови 2.4) і леми 1 випливає існування такого натурального n_0, що при $\varepsilon_n \leq \varepsilon_{n_0}$ справджуються оцінки

$$\left|J^1_{\varepsilon_n}(u^n_m) - \bar{J}^1_{\varepsilon_n}(u^n_{0m})\right| = \left|\Phi\left(x^n_m\left(\frac{T}{\varepsilon_n}, u^n_m\right)\right) - \Phi\left(y^n_m\left(\frac{T}{\varepsilon_n}, u^n_{0m}\right)\right)\right| < \eta_0.$$

Звідси отримуємо

$$J^1_{\varepsilon_n}(u^n_m) = \bar{J}^1_{\varepsilon_n}(u^n_{0m}) + J^1_{\varepsilon_n}(u^n_m) - \bar{J}^1_{\varepsilon_n}(u^n_{0m}) \geq \bar{J}^1_{\varepsilon_n} - \eta_0,$$

що призводить до суперечності з (23), а отже, і з (22). Перше твердження теореми доведено.

Доведемо друге твердження теореми. Маємо

$$J^1_\varepsilon \leq J^1_\varepsilon(u^*_0(\varepsilon)) = \bar{J}^1_\varepsilon + J^1_\varepsilon(u^*_0(\varepsilon)) - \bar{J}^1_\varepsilon(u^*_0(\varepsilon)).$$

Згідно з умовою 2.5) і лемою 1, для довільного $\eta_1 > 0$ при достатньо малих $\varepsilon > 0$ отримуємо оцінку

$$J^1_\varepsilon \leq \bar{J}^1_\varepsilon + \eta_1. \tag{24}$$

З означення інфімуму також випливає, що для вибраного η_1 існує керування $u_{\eta_1}(t,\varepsilon) \in F$ з виконанням нерівності

$$J^1_\varepsilon(u_{\eta_1}) < J^1_\varepsilon + \eta_1.$$

Для керування $u_{\eta_1}(t,\varepsilon)$ позначимо стале керування $u^{\eta_1}_0(\varepsilon)$ з умови a_3). Тоді

$$\bar{J}^1_\varepsilon = \bar{J}^1_\varepsilon(u^*_0(\varepsilon)) \leq \bar{J}^1_\varepsilon(u^{\eta_1}_0(\varepsilon)) + J^1_\varepsilon - J^1_\varepsilon(u_{\eta_1}) + \eta_1.$$

Але з умови 2.4) і леми 1 випливає, що при малих $\varepsilon > 0$

$$\left|\bar{J}^1_\varepsilon(u^{\eta_1}_0(\varepsilon)) - J^1_\varepsilon(u_{\eta_1})\right| < \eta.$$

Отже,

$$\bar{J}^1_\varepsilon \leq J^1_\varepsilon + 2\eta_1.$$

З останньої нерівності та (24) отримуємо

$$|\bar{J}^1_\varepsilon - J^1_\varepsilon| \leq 2\eta_1. \tag{25}$$

Розглянемо тепер різницю

$$\left|J^1_\varepsilon(u^{*\varepsilon}_0(\varepsilon)) - J^1_\varepsilon\right| \leq \left|J^1_\varepsilon(u^{*\varepsilon}_0(\varepsilon)) - \bar{J}^1_\varepsilon\right| + |\bar{J}^1_\varepsilon - J^1_\varepsilon|. \tag{26}$$

Знову, згідно з умовою 2.4) і лемою 1, при достатньо малих $\varepsilon > 0$ перший доданок у (26) не перевищує η_1. Отже, внаслідок довільності η_1 і (25), (26) отримуємо друге твердження теореми.

Теорему 1 доведено.

***4.2. Доведення теореми* 2.** Покажемо, що множина допустимих керувань точної задачі (1)–(3) непорожня. Дійсно, нехай $u^*_0(\varepsilon)$ — оптимальне керування усередненої задачі (5)–(7). Покажемо, що воно допустиме для задачі (1)–(3). Для цього достатньо перевірити виконання умови a_4).

Нехай $x(t, u_0^*(\varepsilon))$ — розв'язок задачі (1), що відповідає керуванню $u_0^*(\varepsilon)$. Тоді з леми 2 випливає, що для довільного $\eta > 0$ існує таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$|x(t, u_0^*(\varepsilon)) - y(t, u_0^*(\varepsilon))| \leq \eta \quad \text{при} \quad t \geq 0.$$

Внаслідок умови 2.6) величину $|L(t, x(t, u_0^*(\varepsilon))) - L(t, y(t, u_0^*(\varepsilon)))|$ можна зробити обмеженою при всіх достатньо малих ε. Звідси випливає виконання умови a$_4$).

Перше твердження теореми доведемо від супротивного. Нехай існує послідовність додатних $\{\varepsilon_n\}$ така, що $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, а

$$J_{\varepsilon_n}^2 = -\infty. \tag{27}$$

Тоді для кожного ε_n існує послідовність допустимих керувань $\{u_m^n(t)\}$ така, що

$$J_{\varepsilon_n}^2(u_m^n) \to \infty \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{28}$$

Нехай u_{0m}^n — сталі керування, що відповідають керуванням u_m^n з умови a$_3$). Позначимо через $x_m^n = x(t, u_m^n)$ розв'язок системи (1) при керуваннях u_m^n, а через $y_m^n = y(t, u_{0m}^n)$ розв'язок задачі (5) при керуваннях u_{0m}^n. За умовами теореми для кожного ε_n існує оптимальне керування усередненої задачі (5) – (7). Отже,

$$\bar{J}_{\varepsilon_n}^2(u_{0m}^n) > \bar{J}_{\varepsilon_n}^2 > -\infty.$$

Тоді

$$\left|J_{\varepsilon_n}^2(u_m^n) - \bar{J}_{\varepsilon_n}^2(u_{0m}^n)\right| \leq \int_0^\infty e^{-\gamma t} \left|L(t, x_m^n) - L(t, y_m^n)\right| dt.$$

Дана величина обмежена незалежною від m сталою C_1, згідно з умовою 2.6) і лемою 2:

$$\left|J_{\varepsilon_n}^2(u_m^n) - \bar{J}_{\varepsilon_n}^2(u_{0m}^n)\right| \leq C_1.$$

Звідси отримуємо

$$J_{\varepsilon_n}^2(u_m^n) = \bar{J}_{\varepsilon_n}^2(u_{0m}^n) + J_{\varepsilon_n}^2(u_m^n) - \bar{J}_{\varepsilon_n}^2(u_{0m}^n) \geq \bar{J}_{\varepsilon_n}^2 - C_1 > -\infty,$$

що призводить до суперечності з (28), а отже, і з (27). Таким чином, перше твердження теореми доведено.

Доведемо друге твердження теореми. Нехай $u_0^*(\varepsilon)$ — оптимальне керування усередненої задачі. Позначимо через $x(t, u_0^*(\varepsilon))$ розв'язок точної системи (1) при керуванні $u_0^*(\varepsilon)$, а через $y^*(t, u_0^*(\varepsilon))$ розв'язок усередненої задачі. Тоді

$$J_\varepsilon^2 \leq J_\varepsilon^2(u_0^*(\varepsilon)) = \bar{J}_\varepsilon^2 + J_\varepsilon^2(u_0^*(\varepsilon)) - \bar{J}_\varepsilon^2(u_0^*(\varepsilon)).$$

Але

$$\left|J_\varepsilon^2(u_0^*(\varepsilon)) - \bar{J}_\varepsilon^2(u_0^*(\varepsilon))\right| \leq \int_0^\infty e^{-\gamma t} \left|L(t, x(t, u_0^*(\varepsilon))) - L(t, y^*(t, u_0^*(\varepsilon)))\right| dt.$$

З умови 2.6) і леми 2 випливає, що різниця в останньому інтегралі прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$ і при малих ε обмежена незалежною від ε сталою. Отже, згідно з теоремою Лебега про мажоровану збіжність, для довільного η_1 при достатньо малих $\varepsilon > 0$ справджується оцінка

$$J_\varepsilon^2 \leq \bar{J}_\varepsilon^2 + \eta_1.$$

Подальше доведення аналогічне доведенню теореми 1.

Література

1. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. – Киев: Изд-во АН УССР, 1945. – 150 с.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Вторая теорема Н. Н. Боголюбова для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 1974. – **10**, № 11. – С. 2001 – 2010.
3. *Фодчук В. И.* О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом от параметра // Укр. мат. журн. – 1964. – **16**, № 2. – С. 273 – 279.
4. *Халанай А.* Метод усреднения для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Rev. math. pures et appl. Acad. RPR. – 1959. – **43**. – P. 467 – 483.
5. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.
6. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.
7. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. – Киев; Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.
8. *Nosenko T., Stanzhytskyi O.* The averaging metod in some optimal control problems // Nonlinear Oscillations. – 2008. – **11**, № 4. – P. 512 – 519.
9. *Грисенко М. В., Кравець В. І.* Метод усереднення в деяких задачах оптимального керування диференціально-функціональними рівняннями // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. – 2011. – **23**, № 2. – С. 35 – 42.

Одержано 27.10.17