УДК 517.9

С. М. Чуйко, О. В. Нєсмєлова, М. В. Дзюба (Донбас. держ. пед. ун-т, Слов'янськ)

МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ У ТЕОРІЇ МАТРИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-АЛГЕБРАЇЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ*

We use the scheme of the classical least-squares method for the construction of approximate pseudosolutions of a linear matrix boundary-value problem for a system of differential-algebraic equations.

Найдены условия существования, а также конструкция наилучшего (в смысле наименьших квадратов) псевдорешения матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи.

1. Постановка задачі. Розглянемо задачу про побудову розв'язків [1 – 3]

$$Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b] := \mathbb{C}^1[a;b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

матричного диференціально-алгебраїчного рівняння

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + F(t), \tag{1}$$

підпорядкованих крайовій умові

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{2}$$

Тут [5, 6]

$$\mathcal{A}Z'(t) \colon \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b] \to \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[a,b]$$

— матричний диференціально-алгебраїчний оператор, який, за визначенням, для будь-яких скалярних функцій

$$\zeta(t), \xi(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$$

та сталих матриць $\Xi_1, \Xi_2 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ забезпечує рівність

$$\mathcal{A}\left(\zeta'(t)\Xi_1 + \xi'(t)\Xi_2\right)(t) = \zeta'(t)\mathcal{A}(\Xi_1)(t) + \xi'(t)\mathcal{A}(\Xi_2)(t).$$

Аналогічно матричний оператор

$$\mathcal{B}Z(t) \colon \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b] \to \mathbb{C}^1_{\gamma\times\delta}[a,b]$$

будемо далі називати алгебраїчним, якщо для будь-яких

$$\zeta(t), \xi(t) \in \mathbb{C}^1[a,b] \quad \Xi_1, \Xi_2 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

має місце рівність

$$\mathcal{B}(\zeta(t)\Xi_1 + \xi(t)\Xi_2)(t) = \zeta(t)\mathcal{B}(\Xi_1)(t) + \xi(t)\mathcal{B}(\Xi_2)(t).$$

Тут також $F(t) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[a,b]$ — неперервна матриця та $\mathcal{L}Z(\cdot)$ — лінійний обмежений матричний функціонал:

* Виконано за фінансової підтримки Міністерства освіти і науки України (реєстраційний номер 0115U003182) та гранта Президента України докторам наук для здійснення наукових досліджень у 2017 р. (реєстраційний номер 8117U006052).

$$\mathcal{L}Z(\cdot)\mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b] \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}.$$

Взагалі кажучи, припускаємо, що

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \mu,\ \nu \in \mathbb{N}$$

— довільні натуральні числа. Тут і далі $\mathbb{C}_{m\times n}[a,b]$ — лінійний нормований простір дійсних $(m\times n)$-матриць $B(t)$, неперервних на відрізку $[a,b]$ з нормою

$$\|B(t)\|_{\mathbb{C}_{m\times n}} := \max_{[a;b]} \|B(t)\|_{\mathbb{R}^{m\times n}}, \quad B(t)\in\mathbb{C}_{m\times n}[a,b],$$

а $\mathbb{C}^1_{m\times n}[a,b]$ — лінійний нормований простір дійсних матриць $B(t)$, неперервно диференційовних на відрізку $[a,b]$ з нормою

$$\|B(t)\|_{\mathbb{C}^1_{m\times n}} := \max_{[a;b]} \sum_{k=0}^{1} \left\|B^{(k)}(t)\right\|_{\mathbb{R}^{m\times n}}, \quad B(t)\in\mathbb{C}^1_{m\times n}[a,b].$$

Матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (1) узагальнює традиційні постановки задач як для матричних диференціальних рівнянь [1 – 3], так і для диференціально-алгебраїчних рівнянь [4, 7 – 9]. З іншого боку, матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача (1), (2) узагальнює нетерові крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь [10 – 12].

Нехай

$$\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, \quad j=1,2,\ldots,\alpha\cdot\beta,$$

— природний базис [13] простору $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, при цьому задача про побудову розв'язків узагальненого диференціально-алгебраїчного матричного рівняння (1) приводить до задачі про побудову вектора $z(t)$, компоненти якого $z_j(t)$ визначають розвинення матриці

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)} z_j(t), \quad z_j(t)\in\mathbb{C}^1[a,b], \quad j=1,2,\ldots,\alpha\cdot\beta.$$

Лінійний диференціально-алгебраїчний матричний оператор $\mathcal{A}Z'(t)$ за визначенням має вигляд

$$\mathcal{A}Z'(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \mathcal{A}\Xi^{(j)}(t) z'_j(t).$$

При цьому

$$\mathcal{M}\left[\mathcal{A}Z'(t)\right] = \Omega(t)\cdot z'(t), \quad \Omega(t) := [\Omega_j(t)]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{C}^1_{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta}[a,b],$$

де

$$\Omega_j(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{A}\Xi^{(j)}(t)\right], \quad j=1,2,\ldots,\alpha\cdot\beta.$$

Аналогічно

$$\mathcal{M}\left[\mathcal{B}Z(t)\right] = \Theta(t)\cdot z(t), \quad \Theta(t) := [\Theta_j(t)]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{C}^1_{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta}[a,b],$$

де

$$\Theta_j(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{B}\,\Xi^{(j)}(t)\right], \quad j = 1, 2, \ldots, \alpha \cdot \beta.$$

Таким чином, задачу про побудову розв'язків диференціально-алгебраїчного матричного рівняння (1) зведено до задачі про знаходження розв'язків

$$z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\cdot\beta}[a, b]$$

традиційного диференціально-алгебраїчного рівняння [4, 7 – 9]

$$\Omega(t) \cdot z'(t) = \Theta(t) \cdot z(t) + \mathcal{F}(t), \quad \mathcal{F}(t) := \mathcal{M}[F(t)]. \tag{3}$$

2. Випадок розв'язності системи (3) відносно похідної. За умови [5, 12]

$$P_{\Omega^*(t)}\Theta(t) = 0, \quad P_{\Omega^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0, \quad \Omega^+(t)\Theta(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta}[a, b] \tag{4}$$

у випадку

$$\Omega^+(t)\mathcal{F}(t), \quad P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\varrho}[a, b] \tag{5}$$

система (3) розв'язна відносно похідної

$$\frac{dz}{dt} = \Omega^+(t)\Theta(t)z + \mathfrak{F}(t, \varphi(t)),$$

де

$$\mathfrak{F}(t, \varphi(t)) := \Omega^+(t)\mathcal{F}(t) + P_{\Omega\varrho}(t)\varphi(t).$$

Тут $P_{\Omega^*}(t)$ — $(\gamma \cdot \delta \times \gamma \cdot \delta)$-матриця-ортопроектор:

$$P_{\Omega^*}(t) \colon \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta} \to \mathbb{N}\left(\Omega^*(t)\right),$$

$P_{\Omega_\varrho}(t)$ — $(\alpha \cdot \beta \times \varrho)$-матриця, утворена з ϱ лінійно незалежних стовпців $(\alpha \cdot \beta \times \alpha \cdot \beta)$-матриці-ортопроектора

$$P_{\Omega}(t) \colon \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{N}(\Omega(t)).$$

Позначимо через $X(t)$ нормальну фундаментальну матрицю [10]

$$\frac{dX(t)}{dt} = \Omega^+(t)\Theta(t)X(t), \quad X_0(a) = I_{\alpha\beta}$$

одержаної традиційної системи звичайних диференціальних рівнянь. За умов (4), (5) система (3) має розв'язок вигляду

$$z(t, c) = X_0(t)c + K\left[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\right](t), \quad c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta},$$

$$K\left[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\right](t) := X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)\mathfrak{F}(s, \varphi(s))ds,$$

який визначає розв'язок матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1)

$$Z(t, c) = W(t, c) + \mathcal{K}\left[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\right](t), \quad W(t, c) := \mathcal{M}^{-1}\left[X_0(t)c\right]. \tag{6}$$

Тут

$$\mathcal{K}\left[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\right](t) := \mathcal{M}^{-1}\left\{K\left[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\right](t)\right\}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $Z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1).

Таким чином, доведено наступну достатню умову розв'язності задачі Коші для системи (1).

Лема. *За умов* (4), (5) *матрична задача Коші* $Z(a) = \mathfrak{A}$ *для диференціально-алгебраїчної системи* (1) *однозначно розв'язна для будь-якого початкового значення* $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}$. *За умов* (4), (5) *загальний розв'язок* (6) *задачі Коші* $Z(a) = \mathfrak{A}$ *для диференціально-алгебраїчної системи* (1) *визначає узагальнений оператор Гріна задачі Коші* $Z(a) = 0$ *для диференціально-алгебраїчної системи* (1) *та загальний розв'язок* $W(t, c)$ *задачі Коші* $Z(a) = \mathfrak{A}$ *для однорідної частини рівняння* (1).

Доведена лема узагальнює відповідні результати як для матричних диференціальних рівнянь [1 – 3], так і для диференціально-алгебраїчних рівнянь [4, 5, 7 – 9]. З іншого боку, доведена лема узагальнює відповідні результати, отримані у випадку нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь [10 – 12]. Зазначимо, що для розв'язання диференціально-алгебраїчного рівняння (3) можна також скористатися більш традиційною центральною канонічною формою [4, 7 – 9].

***Приклад* 1.** Умови леми задовольняє традиційна диференціально-алгебраїчна система

$$Q(t)z'(t) = \Omega(t)z(t) + f(t), \quad f(t) := \begin{pmatrix} \sin t & \cos t & \sin t & \cos t \end{pmatrix}^*, \tag{7}$$

де

$$Q(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \\ \cos t & \sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \end{pmatrix}, \quad \Omega(t) := \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix}.$$

Оскільки справджуються рівності

$$P_{Q^*(t)}\Omega(t) = 0, \quad P_{Q^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0,$$

то умови (4), (5) виконано. Добуток

$$Q^+(t)\Omega(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

визначає загальний розв'язок

$$W(t, c) = X(t)c, \quad X(t) = \begin{pmatrix} \cos^2 \dfrac{t}{2} & \dfrac{\sin t}{2} & -\sin^2 \dfrac{t}{2} \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\sin^2 \dfrac{t}{2} & \dfrac{\sin t}{2} & \cos^2 \dfrac{t}{2} \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}^3,$$

задачі Коші $Z(a) = c,\ c \in \mathbb{R}^3$, для однорідної частини рівняння (7), а також узагальнений оператор Гріна задачі Коші $Z(0) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (7). Покладемо $\varphi(t) := \sin t$, при цьому

$$\mathcal{K}\left[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\right](t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3(\cos t - 1) \\ 3\sin t \\ \cos t - 1 \end{pmatrix}.$$

Підставляючи розв'язок матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1) у крайову умову (2), приходимо до задачі про знаходження розв'язків

$$c = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)} c_j \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}, \quad c_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \ldots, \alpha\cdot\beta,$$

матричного рівняння [14]

$$\mathcal{L}W(\cdot, c) + \mathcal{L}\mathcal{K}\left[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\right](\cdot) = \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{8}$$

У критичному випадку $(P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0)$ за умов (4), (5) та

$$P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\left\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K}\left[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\right](\cdot)\right\} = 0 \tag{9}$$

розв'язок матричного рівняння (8) визначає вектор [14]

$$c = \mathcal{Q}^+\mathcal{M}\left\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K}\left[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\right](\cdot)\right\} + P_{\mathcal{Q}_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $P_{\mathcal{Q}^*}$ — $(\mu\cdot\nu \times \mu\cdot\nu)$-матриця-ортопроектор $P_{\mathcal{Q}^*} : \mathbb{R}^{\mu\cdot\nu} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$, де

$$\mathcal{Q} := [\mathcal{Q}_i]_{i=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\mu\cdot\nu\times\alpha\cdot\beta}, \quad \mathcal{Q}_i := \mathcal{M}\left\{\mathcal{L}\mathcal{M}^{-1}\left[X(\cdot)\Xi^{(i)}\right]\right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, \alpha\cdot\beta;$$

матриця $P_{\mathcal{Q}_r}$ утворена з r лінійно незалежних стовпців $(\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta)$-матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}} : \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q})$. Матриця $P_{\mathcal{Q}_d^*}$ утворена з d лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}^*}$.

3. Псевдорозв'язки крайової задачі (1), (2). Припустимо, що задачу про побудову розв'язків

$$Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a; b] := \mathbb{C}^1[a; b] \otimes \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$$

матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1), підпорядкованих крайовій умові (2), некоректно поставлено, а саме, що виконуються умови (4), (5). При цьому матрична задача Коші $Z(a) = \mathfrak{A}$ для диференціально-алгебраїчної системи (1) однозначно розв'язна для будь-якого початкового значення $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}$. Водночас припустимо, що має місце критичний випадок $(P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0)$ та не виконується умова (9) розв'язності матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2). За умов (4), (5) система (3) розв'язна відносно похідної. Отже, за умов (4), (5) матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача (1), (2) рівнозначна такій:

$$\frac{dz}{dt} = \Omega^+(t)\Theta(t)z + \mathfrak{F}(t, \varphi(t)), \quad \ell z(\cdot) := \mathcal{M}\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathcal{M}\mathfrak{A}. \tag{10}$$

Нехай $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_k(t), \ldots$ — система лінійно незалежних неперервно диференційовних $\alpha\beta$-вимірних вектор-функцій,

$$\psi(t) = [\psi_1(t)\ \psi_2(t)\ \ldots\ \psi_k(t)]$$

— $(\alpha\beta\times k)$-вимірна матриця. Наближення до розв'язку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) шукатимемо у вигляді

$$z(t) := \mathcal{M}\left[Z(t)\right] = \psi(t)\cdot c, \quad c \in \mathbb{R}^k.$$

Будемо вимагати [15], щоб

$$F(c) := \left\| \frac{dz}{dt} - \Omega^+(t)\Theta(t)z - \mathfrak{F}(t,\varphi(t)) \right\|^2_{\mathbb{L}^2[a,b]} + \|\mathcal{M}\left[\mathcal{L}Z(\cdot) - \mathcal{A}\right]\|^2_{\mathbb{R}^{\lambda\cdot\mu}} \to \min$$

для фіксованої матриці $\psi(t)$; при цьому

$$F(c) = \left\|\psi'(t)\cdot c - \Omega^+(t)\Theta(t)\psi(t)\cdot c - \mathfrak{F}(t,\varphi(t))\right\|^2_{\mathbb{L}^2[a,b]} +$$
$$+ \left\|\mathcal{M}\left[\mathcal{L}\mathcal{M}^{-1}\left[\psi(\cdot)c\right] - \mathcal{A}\right]\right\|^2_{\mathbb{R}^{\lambda\cdot\mu}} \to \min .$$

Позначимо через $\check{\Xi}^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$, $j = 1, 2, \ldots, \alpha\cdot\beta$, базис простору $\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$ та через c_j, $j = 1, 2, \ldots, \alpha\cdot\beta$, сталі, які визначають розвинення вектора

$$c = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \check{\Xi}^{(j)} c_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \ldots, \alpha\cdot\beta,$$

по векторах $\check{\Xi}^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$ базису простору $\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$. Зазначимо, що

$$\psi'(t)\cdot c - \Omega^+(t)\Theta(t)\psi(t)\cdot c = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \left\{\psi'(t)\cdot\check{\Xi}^{(j)} - \Omega^+(t)\Theta(t)\psi(t)\cdot\check{\Xi}^{(j)}\right\} c_j = \Phi(t)\, c,$$

де

$$\Phi(t) := [\Phi_1(t)\ \Phi_2(t)\ \ldots\ \Phi_k(t)]$$

— $(\alpha\cdot\beta\times k)$-вимірна матриця,

$$\Phi_j(t) := \psi'(t)\cdot\check{\Xi}^{(j)} - \Omega^+(t)\Theta(t)\psi(t)\cdot\check{\Xi}^{(j)}, \quad c \in \mathbb{R}^k.$$

Аналогічно

$$\mathcal{M}\left\{\mathcal{L}\mathcal{M}^{-1}\left[\psi(\cdot)c\right]\right\} = \Psi\gamma, \quad \Psi := [\Psi_1\ \Psi_2\ \ldots\ \Psi_k] \in \mathbb{R}^{\lambda\cdot\mu\times k},$$

де

$$\Psi_j := \mathcal{M}\left\{\mathcal{L}\mathcal{M}^{-1}\left[\psi(\cdot)\check{\Xi}^{(j)}\right]\right\}, \quad j = 1, 2, \ldots, \alpha\cdot\beta.$$

Функція $F(c)$ має вигляд

$$F(c) = \int_a^b \left\{\Phi(t)c - \mathfrak{F}(t,\varphi(t))\right\}^* \times$$
$$\times \left\{\Phi(t)c - \mathfrak{F}(t,\varphi(t)\right\} dt + \left\{\Psi c - \mathcal{M}\left[\mathcal{A}\right]\right\}^* \cdot \left\{\Psi c - \mathcal{M}\left[\mathcal{A}\right]\right\}.$$

Для фіксованої матриці $\psi(t)$ мінімум функції $F(c)$ існує, оскільки неперервна невід'ємна функція досягає мінімуму. Необхідною умовою мінімізації функції $F(c)$ є рівність $F'(c) = 0$, тотожна рівнянню

$$\left[\Gamma\left(\psi(\cdot)\right) + \Gamma\left(\mathcal{L}\psi(\cdot)\right)\right]\cdot c = \int_a^b \Phi^*(t)\,\mathfrak{F}(t,\varphi(t))\,dt + \Psi^*\mathcal{M}\left[\mathcal{A}\right],$$

розв'язному відносно вектора

$$c = [\Gamma(\psi(\cdot)) + \Gamma(\mathcal{L}\psi(\cdot))]^{+} \left\{ \int_a^b \Phi^*(t)\, \mathfrak{F}(t, \varphi(t))\, dt + \Psi^* \mathcal{M}\,[\mathcal{A}] \right\}$$

за умови

$$\mathcal{P}_{\psi} \left\{ \int_a^b \Phi^*(t)\, \mathfrak{F}(t, \varphi(t))\, dt + \Psi^* \mathcal{M}\,[\mathcal{A}] \right\} = 0. \tag{11}$$

Зокрема, у випадку невиродженості суми $(k \times k)$-матриць Грама [16, 17]

$$\Gamma(\psi(\cdot)) := \int_a^b \Phi^*(t)\Phi(t)dt, \quad \Gamma(\mathcal{L}\psi(\cdot)) := \Psi^*\Psi.$$

Тут

$$\mathcal{P}_{\psi} := P_{[\Gamma(\psi(\cdot))+\Gamma(\mathcal{L}\psi(\cdot))]^*} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{N}\,[\Gamma(\psi(\cdot)) + \Gamma(\mathcal{L}\psi(\cdot))]^*$$

— $(k \times k)$-матриця-ортопроектор. Отриманий псевдорозв'язок

$$z^{\dagger}(\psi(t)) = \psi(t) \cdot [\Gamma(\psi(\cdot)) + \Gamma(\mathcal{L}\psi(\cdot))]^{+} \times$$

$$\times \left\{ \int_a^b \Phi^*(t)\, \mathfrak{F}(t, \varphi(t))\, dt + \Psi^* \mathcal{M}\,[\mathcal{A}] \right\}$$

забезпечує мінімум функції $F(c)$ і залежить від вибору матриці $\psi(t)$.

Теорема. *Для фіксованого числа k та фіксованої $(\alpha\beta \times k)$-вимірної матриці $\psi(t)$ за умов* (4), (5) *та* (11) *отриманий псевдорозв'язок найкращим чином (у сенсі найменших квадратів) мінімізує нев'язку $F(c)$ псевдорозв'язку*

$$Z^{\dagger}(\psi(t)) = \mathcal{M}^{-1} \Bigg\{ \psi(t) \cdot [\Gamma(\psi(\cdot)) + \Gamma(\mathcal{L}\psi(\cdot))]^{+} \times$$

$$\times \left\{ \int_a^b \Phi^*(t)\, \mathfrak{F}(t, \varphi(t))\, dt + \Psi^* \mathcal{M}\,[\mathcal{A}] \right\} \Bigg\} \tag{12}$$

матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1), *підпорядкованого крайовій умові* (2), *серед функцій вигляду*

$$Z^{\dagger}(\psi(t)) = \mathcal{M}^{-1}\{\psi(t) \cdot c\}.$$

Наслідок. *Для фіксованого числа k та фіксованої $(\alpha\beta \times k)$-вимірної матриці $\psi(t)$ за умов* (4), (5) *та* [19]

$$\det[\Gamma(\psi(\cdot)) + \Gamma(\mathcal{L}\psi(\cdot))] \neq 0$$

псевдорозв'язок (12) *найкращим чином (у сенсі найменших квадратів) мінімізує нев'язку $F(c)$ псевдорозв'язку $Z^{\dagger}(\psi(t))$ матричного диференціально-алгебраїчного рівняння* (1), *підпорядкованого крайовій умові* (2), *серед функцій вигляду*

$$Z^{\dagger}(\psi(t)) = \mathcal{M}^{-1}\{\psi(t) \cdot c\}.$$

У частинному випадку, коли $\ell\psi(\cdot) = 0$, значно спрощуються умова (11)

$$\mathcal{P}_\psi \int\limits_a^b \Phi^*(t)\,\mathfrak{F}(t, \varphi(t))\,dt = 0 \tag{13}$$

та формула (12)

$$Z^\dagger(\psi(t)) = \psi(t) \cdot [\Gamma\,(\psi(\cdot))]^+ \int\limits_a^b \Phi^*(t)\,\mathfrak{F}(t, \varphi(t))\,dt. \tag{14}$$

У випадку розв'язності матричної крайової задачі (1), (2) за умов (4), (5) та (11) для відповідного вибору матриці $\psi(t)$ найкращий (у сенсі найменших квадратів) псевдорозв'язок (12) матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) є точним розв'язком. Доведена теорема та наслідок узагальнюють відповідні твердження [19] на випадок матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2).

***Приклад* 2.** Побудуємо псевдорозв'язок $Z^\dagger(\psi(t))$ коректно поставленої 2π-періодичної диференціально-алгебраїчної крайової задачі для системи

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + F(t), \quad \mathcal{A}Z'(t) := \sum_{i=1}^{2} S_i Z'(t) R_i, \tag{15}$$

де

$$S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_1 := R_2, \quad \Psi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}Z(t) := \sum_{j=1}^{2} \Phi_j Z(t) \Psi_j,$$

$$\Phi_1 := \Phi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ \cos t & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай

$$\Xi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Xi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \Xi_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– природний базис простору $\mathbb{R}^{3\times 2}$. Оскільки справджуються рівності $P_{\Omega^*(t)}\Theta(t) = 0$, $P_{\Omega^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0$, то умови (4), (5) виконано; тут

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Добуток

$$\Omega^+(t)\Theta(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

визначає матрицю

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для її знаходження використано жорданову форму:

$$\Omega^+(t)\Theta(t) = S\,J\,S^{-1},$$

де

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Крім того,

$$X(t) = S\,U(t)\,S^{-1}.$$

Тут

$$U(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, знаходимо розв'язок

$$W(t,c)=\begin{pmatrix}c_1 & c_4\\ c_2 & t\,c_3+c_5+2t\,c_6\\ c_3 & c_6\end{pmatrix}$$

задачі Коші

$$Z(0)=\mathcal{M}^{-1}(c):=\begin{pmatrix}c_1 & c_4\\ c_2 & c_5\\ c_3 & c_6\end{pmatrix},\quad c:=\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_6\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^6,$$

для однорідної частини диференціально-алгебраїчної системи (15). Традиційний оператор Гріна задачі Коші $K[f(s)](t)$ визначає узагальнений оператор Гріна задачі Коші для системи (15)

$$\mathcal{K}\left[F(s)(t):=\mathcal{M}^{-1}\left\{K\left[Q^+(s)\mathcal{F}(s)\right](t)\right\}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \sin t & 3+t-3\cos t-\sin t\\ 1-\cos t & \sin t\end{pmatrix},$$

де

$$Q^+(t)\mathcal{F}(t)=(0\ \cos t\ \sin t\ 0\ \sin t\ \cos t)^*.$$

Оскільки $P_{\mathcal{Q}^*}\neq 0$, то в задачі про побудову 2π-періодичних розв'язків матричної диференціально-алгебраїчної системи (15) має місце критичний випадок; тут

$$\mathcal{Q}=-2\pi\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&2\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad P_{\mathcal{Q}^*}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок

$$W(t,c_r)=\begin{pmatrix}c_1 & c_3\\ c_2 & c_4\\ -2c_5 & c_5\end{pmatrix},\quad c_r\in\mathbb{R}^5,$$

однорідної частини 2π-періодичної матричної задачі для диференціально-алгебраїчної системи (15) визначають матриці

$$P_{\mathcal{Q}}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5&0&0&0&0&0\\0&5&0&0&0&0\\0&0&4&0&0&-2\\0&0&0&5&0&0\\0&0&0&0&5&0\\0&0&-2&0&0&1\end{pmatrix},\quad P_{\mathcal{Q}_r}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5&0&0&0&0\\0&5&0&0&0\\0&0&0&0&-2\\0&0&5&0&0\\0&0&0&5&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_\Omega(t)\neq 0:$

$$P_{\Omega_\varrho}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

то розв'язок матричної диференціально-алгебраїчної системи (15) залежатиме від довільної функції $\varphi(t) \in \mathbb{C}[0; 2\pi]$. Покладемо

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо функцію

$$\mathfrak{F}(t, \varphi(t)) := \Omega^+(t)\mathcal{F}(t) + P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t \\ \cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

причому умову (9) виконано. Позначимо через

$$\psi(t) := I_6 \otimes (1 \ \cos t \ \sin t)$$

(6×18)-вимірну матрицю. Оскільки $\ell\psi(\cdot) = 0$, то для знаходження псевдорозв'язку коректно поставленої 2π-періодичної диференціально-алгебраїчної крайової задачі для системи (15) використовуємо формулу (11). Тут

$$\Gamma\left(\psi(\cdot)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 5
\end{pmatrix}.$$

При цьому умова (13) виконується і

$$\mathfrak{F}(t,\varphi(t)) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t & \sin t & \cos t & \sin t & \cos t \end{pmatrix}^*.$$

Крім того,

$$\mathcal{P}_\psi =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}
5&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&5&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&4&0&0&0&0&0&0&0&0&-2&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&5&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&5&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-2&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}.$$

Оскільки умову (13) виконано, отримуємо розв'язок 2π-періодичної матричної задачі для диференціально-алгебраїчної системи (15)

$$Z(t,\varphi(t)) = \begin{pmatrix} -\cos t & \sin t \\ \sin t & -3\cos t - \sin t \\ -\cos t & \sin t \end{pmatrix},$$

який відрізняється від розв'язку, який можна отримати за допомогою узагальненого оператора Гріна [5]

$$G\left[\mathfrak{F}(s,\varphi(s));\mathfrak{A}\right](t) = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{5} - \cos t & \sin t \\ \sin t & 3 - 3\cos t - \sin t \\ \dfrac{4}{5} - \cos t & -\dfrac{2}{5} + \sin t \end{pmatrix}.$$

У випадку нерозв'язності системи (3) відносно похідної дослідження матричної крайової задачі (1), (2) може бути проведено аналогічно [4, 7, 18, 19, 21].

На завершення вважаємо приємним обов'язком висловити вдячність академіку НАН України А. М. Самойленку за постійну увагу до роботи та привітати його з 80-річчям.

Література

1. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
2. *Деревенский В. П.* Матричные уравнения Бернулли. I // Изв. вузов. Математика. – 2008. – № 2. – Р. 14 – 23.
3. *Boichuk A. A., Krivosheya S. A.* A critical periodic boundary-value problem for a matrix Riccati equations // Different. Equat. – 2001. – **37**, № 4. – P. 464 – 471.
4. *Campbell S. L.* Singular systems of differential equations. — San Francisco etc.: Pitman Adv. Publ. Progr., 1980. — 178 p.
5. *Chuiko S. M.* The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem // Sib. Math. J. – 2015. – **56**, № 4. – P. 752 – 760.
6. *Chuiko S. M.* A generalized matrix differential-algebraic equation // J. Math. Sci. – 2015. – **210**, № 1. – P. 9 – 21.
7. *Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. – Новосибирск: Наука, 1996. – 280 с.
8. *Бояринцев Ю. Е., Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. – Новосибирск: Наука, 1998. – 224 с.
9. *Чистяков В. Ф., Щеглова А. А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. – Новосибирск: Наука, 2003. – 317 с.
10. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – xiv + 317 p.
11. *Бойчук А. А., Шегда Л. М.* Вироджені нетерові крайові задачі // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, № 3. – С. 303 – 312.
12. *Чуйко С. М.* Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциально-алгебраических систем // Компьют. исслед. и моделирование. – 2013. – **5**, № 5. – С. 769 – 783.
13. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. — 318 с.
14. *Чуйко С. М.* О решении линейных матричных уравнений // Наук. вісн. Харків. ун-ту ім. В. Н. Каразіна. Математика, прикл. математика і механіка. – 2015. – **81**. – С. 28 – 34.
15. *Chuiko S. M., Starkova O. V.* About an approximate solution of autonomous boundary-value problem with a least-squares methods // Nonlinear Oscillations. – 2009. – **12**, № 4. – P. 556 – 573.
16. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 408 с.
17. *Кравчук М.* Вибрані математичні праці. – Київ; Нью-Йорк: Задруга, 2002. – 792 с.
18. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. – Київ: Вища шк., 2000. – 296 с.
19. *Чуйко С. М.* Метод найменших квадратів в теорії некоректно поставлених крайових задач // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. – 2007. – № 7. – С. 51 – 53.
20. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 1999. – 686 с.
21. *Chuiko S. M.* To the issue of a generalization of the matrix differential-algebraic boundary-value problem // J. Math. Sci. – 2017. – **227**, № 1. – P. 13 – 25.

Одержано 08.10.17