УДК 517.956.223

А. В. Аноп, Т. М. Касіренко, О. О. Мурач (Ін-т математики НАН України, Київ)

НЕРЕГУЛЯРНІ ЕЛІПТИЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ТА ПРОСТОРИ ХЕРМАНДЕРА

We study nonregular elliptic problems with boundary conditions of higher orders and prove that these problems are Fredholm on appropriate pairs of the inner-product Hörmander spaces that form a two-sided refined Sobolev scale. We prove a theorem on the regularity of generalized solutions to the problems in these spaces.

Исследованы нерегулярные эллиптические задачи с краевыми операторами высших порядков. Доказано, что эти задачи являются нетеровыми в подходящих парах гильбертовых пространств Хермандера, которые образуют двустороннюю уточненную соболевскую шкалу. Доказана теорема о регулярности обобщенных решений исследуемых задач в этих пространствах.

1. Вступ. Цю роботу присвячено дослідженню у класах просторів Хермандера еліптичних задач, для яких максимум порядків крайових операторів більший за порядок еліптичного рівняння, або рівний йому. Такі задачі є нерегулярними еліптичними; для них не виконується класична формула Гріна, що ускладнює їх дослідження. Змістовні приклади цих задач зустрічаються в акустиці, гідродинаміці, теорії випадкових процесів [1 – 3].

Зазначені задачі досить повно досліджено у двобічній шкалі просторів Соболєва, модифікованих за Ройтбергом (див. монографії [4] (розд. 4, 7) і [5] (п. 4.1)). Доведено теореми про нетеровість цих задач і регулярність їх розв'язків у просторах Соболєва – Ройтберга. Останні збігаються з соболєвськими просторами, якщо їх порядок регулярності є достатньо великим числом; у противному разі вони містять елементи, які не є розподілами. Втім соболєвська шкала, градуйована за допомогою числового показника регулярності, є занадто грубою для низки задач теорії диференціальних рівнянь і математичного аналізу. На це вказував Л. Хермандер [6, 7] ще у 1963 р., який увів і дослідив широкі класи нормованих просторів, для яких показником регулярності є досить загальна функція, та застосував їх до дослідження рівнянь з частинними похідними. В останні двадцять років простори Хермандера та їх різні узагальнення широко застосовуються у різних розділах математики [8 – 13].

Недавно В. А. Михайлець і О. О. Мурач [14 – 19] побудували загальну теорію розв'язності еліптичних крайових задач у гільбертових просторах Хермандера $H^{s,\varphi}$, які утворюють уточнену соболєвську шкалу (їх результати підсумовано в [9, 20]). Показниками регулярності для цих просторів є дійсне число s і функція $\varphi\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, повільно змінна на нескінченності за Караматою. Функціональний параметр φ уточнює основну регулярність s. У випадку $\varphi(\cdot) \equiv 1$ простір $H^{s,\varphi}$ стає гільбертовим простором Соболєва H^s порядку s. Нещодавно цю теорію було доповнено у статтях [21 – 23], де застосовано більш широкі класи гільбертових просторів Хермандера [24, 25]. Відмітимо також роботу [26], в якій досліджено еліптичні з параметром крайові задачі у нормованих просторах із функціональним показником регулярності.

Проте еліптичні задачі, яким присвячено цю роботу, не були охоплені згаданою теорією. Мета даної роботи — довести теореми про нетеровість досліджуваних задач і регулярність їх узагальнених розв'язків у двобічній уточненій соболєвській шкалі. У випадку, коли числовий показник $s > m + 1/2$, де m — максимум порядків крайових операторів, відповідні версії цих теорем доведено у [27]. Випадок $s \leq m + 1/2$ істотно більш складний для дослідження, оскільки у ньому ліві частини крайових умов не можна коректно означити на класі $H^{s,\varphi}(\Omega)$ розв'язків еліптичного рівняння, заданого в обмеженій евклідовій області Ω з гладкою межею. На відміну від монографій [4, 5] ми дотримуємося в ідейному плані підходу Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса [28 – 30], розробленого для регулярних еліптичних крайових задач у двобічній соболєвській шкалі. При цьому ми обмежуємося розглядом розв'язків $u \in H^{s,\varphi}(\Omega)$ еліптичного рівняння, права частина якого достатньо регулярна — належить простору Соболєва $H^{\lambda}(\Omega)$, де $\lambda > m+1/2-2q$, а $2q$ — порядок цього рівняння. Як буде показано, крайові умови допускають коректне означення на класі усіх таких розв'язків, а відповідна еліптична крайова задача має властивості, подібні до її властивостей у випадку $s > m+1/2$. Наскільки нам відомо, отримані у цій роботі результати є новими і для соболєвських просторів.

Зауважимо, що у випадку, коли порядки крайових умов менші за порядок еліптичного рівняння, різні версії теорем Ліонса – Мадженеса про нетеровість еліптичних крайових задач доведено у [31 – 33] для просторів Соболєва і в [34, 35] для уточненої соболєвської шкали (частина цих результатів викладена у монографії [9] (пп. 4.4, 4.5)).

2. Постановка задачі. Нехай Ω — довільна обмежена область в $\mathbb{R}^n$, де ціле $n \geq 2$. Припускаємо, що її межа Γ є нескінченно гладким компактним многовидом вимірності $n-1$, причому C^∞-структура на Γ породжена простором $\mathbb{R}^n$.

Розглянемо в області Ω таку крайову задачу:

$$Au = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$B_j u = g_j \quad \text{на} \quad \Gamma, \qquad j = 1, \ldots, q. \tag{2}$$

Тут $A := A(x, D)$ — лінійний диференціальний оператор на $\overline{\Omega} := \Omega \cup \Gamma$ довільного парного порядку $2q \geq 2$, а кожне $B_j := B_j(x, D)$ — крайовий лінійний диференціальний оператор на Γ довільного порядку $m_j \geq 0$. Усі коефіцієнти цих диференціальних операторів є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, заданими на $\overline{\Omega}$ і Γ відповідно. Взагалі в роботі розподіли та функції вважаємо комплекснозначними і тому розглядаємо комплексні функціональні простори.

Припускаємо, що крайова задача (1), (2) еліптична в області Ω, тобто диференціальний оператор A є правильно еліптичним на $\overline{\Omega}$, а набір $B := (B_1, \ldots, B_q)$ крайових диференціальних операторів задовольняє умову Лопатинського щодо A на Γ (див., наприклад, огляд [36] (п. 1.2) або довідник [37] (розд. III, § 6, пп. 1, 2)). Окрім того, припускаємо, що

$$m := \max\{m_1, \ldots, m_q\} \geq 2q.$$

Отже, еліптична крайова задача (1), (2) є нерегулярною. Задля більшої лаконічності формул покладемо $r := m + 1$.

Пов'яжемо із цією задачею лінійне відображення

$$u \mapsto (Au, Bu) = (Au, B_1 u, \ldots, B_q u), \qquad \text{де} \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}). \tag{3}$$

Будемо досліджувати властивості продовження за неперервністю цього відображення у відповідних парах функціональних просторів Хермандера.

Для опису області значень цього продовження нам знадобиться така спеціальна формула Гріна [5] (формула (4.1.10)):

$$(Au,v)_\Omega+\sum_{j=1}^{r-2q}(D_\nu^{j-1}Au,w_j)_\Gamma+\sum_{j=1}^{q}(B_ju,h_j)_\Gamma=$$

$$=(u,A^+v)_\Omega+\sum_{k=1}^{r}\left(D_\nu^{k-1}u,K_kv+\sum_{j=1}^{r-2q}R_{j,k}^+w_j+\sum_{j=1}^{q}Q_{j,k}^+h_j\right)_\Gamma$$

для довільних $u,v\in C^\infty(\overline{\Omega})$ і $w_1,\dots,w_{r-2q},h_1,\dots,h_q\in C^\infty(\Gamma)$. Тут і далі через $(\cdot,\cdot)_\Omega$ і $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ позначено скалярні добутки у гільбертових просторах $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma)$ функцій, квадратично інтегровних відповідно на Ω і Γ за мірою Лебега, а також продовження за неперервністю цих скалярних добутків. Окрім того, $D_\nu:=i\partial/\partial\nu$, де i — уявна одиниця, а ν — поле ортів внутрішніх нормалей до межі Γ. Як звичайно, A^+ — диференціальний оператор, формально спряжений до A відносно $(\cdot,\cdot)_\Omega$. Окрім того, всі $R_{j,k}^+$ і $Q_{j,k}^+$ є дотичними диференціальними операторами, формально спряженими відповідно до $R_{j,k}$ і $Q_{j,k}$ відносно $(\cdot,\cdot)_\Gamma$. Тут дотичні лінійні диференціальні оператори $R_{j,k}:=R_{j,k}(x,D_\tau)$ і $Q_{j,k}:=Q_{j,k}(x,D_\tau)$ взято із зображення крайових диференціальних операторів $D_\nu^{j-1}A$ і B_j у вигляді

$$D_\nu^{j-1}A(x,D)=\sum_{k=1}^{r}R_{j,k}(x,D_\tau)D_\nu^{k-1},\quad j=1,\dots,r-2q,$$

$$B_j(x,D)=\sum_{k=1}^{r}Q_{j,k}(x,D_\tau)D_\nu^{k-1},\quad j=1,\dots,q.$$

Зауважимо, що $\operatorname{ord}R_{j,k}\le 2q+j-k$ і $\operatorname{ord}Q_{j,k}\le m_j-k+1$, причому $R_{j,k}=0$ при $k\ge 2q+j+1$ і $Q_{j,k}=0$ при $k\ge m_j+2$. Нарешті, кожне $K_k:=K_k(x,D)$ є деяким крайовим лінійним диференціальним оператором на Γ порядку $\operatorname{ord}K_k\le 2q-k$ з коефіцієнтами класу $C^\infty(\overline{\Omega})$; при цьому $K_k=0$, якщо $k\ge 2q+1$.

Взявши до уваги спеціальну формулу Гріна, розглянемо таку крайову задачу в області Ω з $r-q$ додатковими невідомими функціями на межі Γ:

$$A^+v=\omega\quad \text{в}\quad \Omega, \tag{4}$$

$$K_kv+\sum_{j=1}^{r-2q}R_{j,k}^+w_j+\sum_{j=1}^{q}Q_{j,k}^+h_j=\psi_k\quad \text{на}\quad \Gamma,\quad k=1,\dots,r. \tag{5}$$

Тут функція v на Ω і $r-q$ функцій $w_1,\dots,w_{r-2q},h_1,\dots,h_q$ на Γ є невідомими. Ця задача називається формально спряженою до задачі (1), (2) відносно розглянутої спеціальної формули Гріна. Як відомо [5] (теорема 4.1.1), крайова задача (1), (2) еліптична в області Ω тоді і лише тоді, коли формально спряжена задача (4), (5) еліптична в Ω як крайова задача з додатковими невідомими функціями на межі області.

Позначимо через N лінійний простір усіх розв'язків $u\in C^\infty(\overline{\Omega})$ крайової задачі (1), (2) у випадку, коли $f=0$ в Ω і кожне $g_j=0$ на Γ. Окрім того, позначимо через $N_\star$ лінійний простір усіх розв'язків

$$(v, w_1, \ldots, w_{r-2q}, h_1, \ldots, h_q) \in C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^{r-q}$$

формально спряженої крайової задачі (4), (5) у випадку, коли $\omega = 0$ в Ω і кожне $\psi_k = 0$ на Γ. Оскільки обидві ці задачі еліптичні в Ω, то простори N і $N_\star$ скінченновимірні [5] (наслідок 4.1.1).

3. Простори Хермандера. Еліптичну крайову задачу (1), (2) досліджуємо у відповідних парах гільбертових просторів Хермандера $H^{s,\varphi}$, для яких показниками регулярності (або гладкості) є довільні число $s \in \mathbb{R}$ і функція $\varphi \in \mathcal{M}$. Ці простори утворюють уточнену соболєвську шкалу, введену і досліджену в [14, 15]. Тут і далі $\mathcal{M}$ — множина всіх вимірних за Борелем функцій $\varphi\colon [1, \infty) \to (0, \infty)$, які обмежені і відокремлені від нуля на кожному компакті та повільно змінюються на нескінченності за Й. Караматою, тобто $\varphi(\lambda t)/\varphi(t) \to 1$ при $t \to \infty$ для кожного $\lambda > 0$. Повільно змінні функції добре вивчені і мають різноманітні застосування [38, 39]. Їх характерним прикладом є функція

$$\varphi(t) := (\log t)^{r_1} (\log\log t)^{r_2} \ldots \Big(\underbrace{\log \ldots \log}_{k \text{ разів}} t\Big)^{r_k}, \quad t \gg 1,$$

де довільно вибрано ціле число $k \geq 1$ і дійсні числа $r_1, \ldots, r_k$.

Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Наведемо означення просторів $H^{s,\varphi}$ спочатку для $\mathbb{R}^n$, а потім для Ω і Γ та зазначимо деякі їх властивості, потрібні нам. При цьому будемо слідувати монографії [9] (пп. 1.3, 2.1, 3.2).

За означенням лінійний простір $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, де ціле $n \geq 1$, складається з усіх розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, що їх перетворення Фур'є $\widehat{w}$ є функцією, яка локально інтегровна на $\mathbb{R}^n$ за Лебегом і задовольняє умову

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2s} \varphi^2(\langle\xi\rangle) |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Тут, як звичайно, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — лінійний топологічний простір усіх повільно зростаючих розподілів на $\mathbb{R}^n$, а $\langle\xi\rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$. У просторі $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ уведено скалярний добуток розподілів w_1 і w_2 за формулою

$$(w_1, w_2)_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2s} \varphi^2(\langle\xi\rangle) \widehat{w_1}(\xi) \overline{\widehat{w_2}(\xi)}\, d\xi.$$

Він породжує норму

$$\|w\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)} := (w, w)^{1/2}_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)}.$$

Простір $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ — ізотропний гільбертів випадок простору $\mathcal{B}_{p,k}$, введеного і дослідженого Л. Хермандером [6] (п. 2.2). А саме, $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}_{2,k}$, якщо $k(\xi) = \langle\xi\rangle^s \varphi(\langle\xi\rangle)$ для довільного $\xi \in \mathbb{R}^n$.

У важливому окремому випадку, коли $\varphi(\cdot) \equiv 1$, простір $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ стає гільбертовим простором Соболєва $H^s(\mathbb{R}^n)$ порядку s. У загальному випадку виконуються неперервні та щільні вкладення

$$H^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \qquad \text{для кожного} \quad \varepsilon > 0. \tag{6}$$

З них випливає, що у класі функціональних просторів $\{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)\colon s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M}\}$ числовий параметр s задає основну регулярність (або гладкість) розподілів, а функціональний параметр

φ — додаткову регулярність, яка уточнює основну. Тому цей клас природно називати уточненою соболєвською шкалою на $\mathbb{R}^n$.

Її аналоги для евклідової області Ω і замкненого компактного многовиду Γ вводяться у стандартний спосіб. Наведемо відповідні означення.

За означенням лінійний простір $H^{s,\varphi}(\Omega)$ складається зі звужень в область Ω усіх розподілів $w \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. Норму у ньому означено за формулою

$$\|u\|_{H^{s,\varphi}(\Omega)} := \inf\bigl\{\, \|w\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)} : w \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n),\ w = u \text{ в } \Omega \,\bigr\},$$

де $u \in H^{s,\varphi}(\Omega)$. Цей простір гільбертів і сепарабельний відносно вказаної норми та неперервно вкладений у топологічний простір $\mathcal{D}'(\Omega)$ усіх розподілів в Ω. Множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ щільна у просторі $H^{s,\varphi}(\Omega)$. Він є окремим випадком гільбертових просторів, уведених і досліджених Л. Р. Волевичем і Б. П. Панеяхом [40] (§ 2).

Коротко кажучи, простір $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ складається з усіх розподілів на Γ, які в локальних координатах дають елементи простору $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})$. Наведемо докладне означення. Нехай довільним чином вибрано скінченний атлас із C^∞-структури на многовиді Γ, утворений локальними картами $\pi_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$, де $j = 1, \ldots, p$. Тут відкриті множини $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$ складають скінченне покриття многовиду Γ. Нехай, окрім того, вибрано функції $\chi_j \in C^\infty(\Gamma)$, де $j = 1, \ldots, p$, які утворюють розбиття одиниці на Γ, що задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi_j \subset \Gamma_j$.

Тоді, за означенням, лінійний простір $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ складається з усіх розподілів $h \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ таких, що $(\chi_j h) \circ \pi_j \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})$ для кожного номера $j \in \{1, \ldots, p\}$. Тут, звісно, $\mathcal{D}'(\Gamma)$ — лінійний топологічний простір усіх розподілів на Γ, а $(\chi_j h) \circ \pi_j$ є зображенням розподілу h у локальній карті π_j. У просторі $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ введено норму за формулою

$$\|h\|_{H^{s,\varphi}(\Gamma)} := \left(\sum_{j=1}^{p} \|(\chi_j h) \circ \pi_j\|^2_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})} \right)^{1/2}.$$

Цей простір гільбертів і сепарабельний відносно цієї норми та неперервно вкладений у $\mathcal{D}'(\Gamma)$. Важливо, що простір $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ з точністю до еквівалентності норм не залежить від зазначеного вибору атласу і розбиття одиниці (див. [9] (теорема 2.3)). Множина $C^\infty(\Gamma)$ щільна у $H^{s,\varphi}(\Gamma)$.

Введені гільбертові функціональні простори утворюють уточнені соболєвські шкали

$$\{H^{s,\varphi}(\Omega) :\ s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M}\} \qquad \text{і} \qquad \{H^{s,\varphi}(\Gamma) :\ s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M}\} \tag{7}$$

на Ω і Γ відповідно. Ці шкали є двобічними за числовим параметром s. Вони містять двобічні гільбертові соболєвські шкали: якщо $\varphi(\cdot) \equiv 1$, то $H^{s,\varphi}(\Omega) =: H^s(\Omega)$ і $H^{s,\varphi}(\Gamma) =: H^s(\Gamma)$ — простори Соболєва порядку $s \in \mathbb{R}$. Для шкал (7) виконуються компактні і щільні вкладення (6), якщо у формулі (6) замінити $\mathbb{R}^n$ на Ω або Γ відповідно.

Обговоримо зв'язок між шкалами (7). Нехай $s > 1/2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$; тоді відображення сліду $u \mapsto u \restriction \Gamma$, де $u \in C^\infty(\Gamma)$, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора $R_\Gamma : H^{s,\varphi}(\Omega) \to H^{s-1/2,\varphi}(\Gamma)$. Отже, для кожного розподілу $u \in H^{s,\varphi}(\Omega)$ його слід $R_\Gamma u$ на Γ означений коректно. Більше того,

$$H^{s-1/2,\varphi}(\Gamma) = \bigl\{R_\Gamma u : u \in H^{s,\varphi}(\Omega)\bigr\}$$

та виконується еквівалентність норм

$$\|h\|_{H^{s-1/2,\varphi}(\Gamma)} \asymp \inf\bigl\{\|u\|_{H^{s,\varphi}(\Omega)}:\ u \in H^{s,\varphi}(\Omega),\ \ h = R_\Gamma u\bigr\}$$

на класі всіх функцій $h \in H^{s-1/2,\varphi}(\Gamma)$ (див. [9], теорема 3.5 і наслідок 3.1). Проте якщо $s < 1/2$, то не можна коректно означити слід на Γ довільного розподілу $u \in H^{s,\varphi}(\Omega)$. А саме, відображення $u \mapsto u \restriction \Gamma$, де $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, не можна продовжити до неперервного лінійного оператора $R_\Gamma : H^{s,\varphi}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Gamma)$ (див. [9], зауваження 3.5). Це застереження зберігає силу і для $s = 1/2$ у соболєвському випадку $\varphi(\cdot) \equiv 1$.

4. Основні результати роботи стосуються характеру розв'язності еліптичної крайової задачі (1), (2) і регулярності її узагальнених розв'язків у просторах Хермандера, які утворюють двобічні шкали (7). З огляду на зазначений вище зв'язок між цими шкалами розглянемо окремо випадки $s > m + 1/2$ і $s \le m + 1/2$. У першому з них нами доведено такий результат [27] (теорема 1).

Твердження 1. *Нехай $s > m + 1/2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді відображення* (3) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора*

$$(A,B)\colon H^{s,\varphi}(\Omega) \to H^{s-2q,\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma) =: \mathcal{H}_{s-2q,s,\varphi}(\Omega,\Gamma). \tag{8}$$

Цей оператор нетерів. Його ядро дорівнює N, а область значень складається з усіх векторів $(f, g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{H}_{s-2q,s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ таких, що

$$\begin{gathered}(f,v)_\Omega + \sum_{j=1}^{r-2q} (D_\nu^{j-1} f, w_j)_\Gamma + \sum_{j=1}^{q} (g_j, h_j)_\Gamma = 0 \\ \text{для всіх} \quad (v, w_1, \ldots, w_{r-2q}, h_1, \ldots, h_q) \in N_\star.\end{gathered} \tag{9}$$

Індекс оператора (8) *дорівнює* $\dim N - \dim N_\star$ *та не залежить від s і φ.*

У зв'язку з цим твердженням нагадаємо, що лінійний обмежений оператор $T\colon E_1 \to E_2$, де E_1 і E_2 — банахові простори, називають нетеровим, якщо його ядро $\ker T$ і коядро $E_2/T(E_1)$ скінченновимірні. Якщо цей оператор нетерів, то його область значень замкнена в E_2 і він має скінченний індекс

$$\operatorname{ind} T := \dim\ker T - \dim(E_2/T(E_1)).$$

Із викладеного наприкінці п. 3 випливає, що умову $s > m + 1/2$ у твердженні 1 не можна відкинути чи послабити. Зокрема, якщо $s \le m + 1/2$ і $\varphi(\cdot) \equiv 1$, то відображення $u \mapsto B_j u$, де $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, не можна продовжити до неперервного лінійного оператора $B_j\colon H^s(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Gamma)$ у випадку, коли $m_j = m$.

Щоб отримати версію твердження 1 для довільного $s \le m + 1/2$, обмежимося розглядом розв'язків $u \in H^{s,\varphi}(\Omega)$ еліптичного рівняння $Au = f$, права частина якого належить простору

$$H^{m+1/2-2q+}(\Omega) := \bigcup_{\lambda > m+1/2-2q} H^\lambda(\Omega) = \bigcup_{\substack{\lambda > m+1/2-2q,\\ \eta \in \mathcal{M}}} H^{\lambda,\eta}(\Omega)$$

(тут друга рівність виконується з огляду на вкладення (6)).

Нехай $s \le m + 1/2$, $\varphi \in \mathcal{M}$ і $\lambda > m + 1/2 - 2q$. Розглянемо лінійний простір

$$H^{s,\varphi}_{A,\lambda}(\Omega) := \bigl\{u \in H^{s,\varphi}(\Omega)\colon Au \in H^\lambda(\Omega)\bigr\},$$

наділений нормою графіка

$$\|u\|_{H^{s,\varphi}_{A,\lambda}(\Omega)} := \big(\|u\|^2_{H^{s,\varphi}(\Omega)} + \|Au\|^2_{H^{\lambda}(\Omega)}\big)^{1/2}. \tag{10}$$

Тут Au розуміємо в сенсі теорії розподілів в області Ω. У соболєвському випадку $\varphi(\cdot)\equiv 1$ будемо пропускати індекс φ у позначеннях цього та інших просторів, введених на основі просторів Хермандера $H^{s,\varphi}$.

Цей простір гільбертів відносно норми (10). Справді, ця норма породжена скалярним добутком, оскільки такими є норми у правій частині рівності (10). Окрім того, простір $H^{s,\varphi}_{A,\lambda}(\Omega)$ повний відносно цієї норми. Справді, якщо послідовність (u_k) фундаментальна в цьому просторі, то існують границі $u:=\lim u_k$ в $H^{s,\varphi}(\Omega)$ і $f:=\lim Au_k$ в $H^{\lambda}(\Omega)$, оскільки останні два простори повні. Диференціальний оператор A неперервний у $\mathcal{D}'(\Omega)$, тому $Au=\lim Au_k=f$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$. Тут, нагадаємо, $u\in H^{s,\varphi}(\Omega)$ і $f\in H^{\lambda}(\Omega)$. Тому $u\in H^{s,\varphi}_{A,\lambda}(\Omega)$ і $\lim u_k = u$ у просторі $H^{s,\varphi}_{A,\lambda}(\Omega)$. Отже, цей простір є повним.

Теорема 1. *Нехай $s\le m+1/2$, $\varphi\in\mathcal{M}$ і $\lambda>m+1/2-2q$. Тоді множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ щільна у просторі $H^{s,\varphi}_{A,\lambda}(\Omega)$, а відображення* (3) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора*

$$(A,B)\colon H^{s,\varphi}_{A,\lambda}(\Omega)\to H^{\lambda}(\Omega)\oplus\bigoplus_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma) =: \mathcal{H}_{\lambda,s,\varphi}(\Omega,\Gamma). \tag{11}$$

Цей оператор нетерів. Його ядро дорівнює N, а область значень складається з усіх векторів $(f,g_1,\ldots,g_q)\in\mathcal{H}_{\lambda,s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$, які задовольняють умову (9)*. Індекс оператора* (11) *дорівнює $\dim N-\dim N_\star$ та не залежить від s, φ і λ.*

Перейдемо до питання про регулярність узагальнених розв'язків крайової задачі (1), (2) у двобічній уточненій соболєвській шкалі. Спочатку дамо означення цих розв'язків. Позначимо через $\mathcal{S}'(\Omega)$ лінійний простір звужень в область Ω усіх розподілів $w\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Покладемо

$$\mathcal{S}'_{A,m+1/2-2q+}(\Omega) := \big\{u\in\mathcal{S}'(\Omega)\colon Au\in H^{m+1/2-2q+}(\Omega)\big\}.$$

Нехай розподіл $u\in\mathcal{S}'_{A,m+1/2-2q+}(\Omega)$, тоді $u\in H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)$ для деяких чисел $s\le m+1/2$ і $\lambda>m+1/2-2q$. Розподіл u називаємо (сильним) узагальненим розв'язком крайової задачі (1), (2) з правою частиною

$$(f,g_1,\ldots,g_q)\in\mathcal{S}'(\Omega)\times(\mathcal{D}'(\Gamma))^q,$$

якщо $(A,B)u=(f,g_1,\ldots,g_q)$, де (A,B) — оператор (11). Звісно, це означення не залежить від вибору чисел s і λ.

Нехай V — відкрита множина в $\mathbb{R}^n$, яка задовольняє умову $\Omega_0:=\Omega\cap V\neq\varnothing$. Покладемо $\Gamma_0:=\Gamma\cap V$ (можливий випадок, коли $\Gamma_0=\varnothing$). Уведемо для множин Ω_0 і Γ_0 локальні аналоги просторів $H^{\sigma,\varphi}(\Omega)$ і $H^{\sigma,\varphi}(\Gamma)$, де $\sigma\in\mathbb{R}$ і $\varphi\in\mathcal{M}$. За означенням лінійний простір $H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$ складається з усіх розподілів $u\in\mathcal{S}'(\Omega)$ таких, що $\chi u\in H^{\sigma,\varphi}(\Omega)$ для довільної функції $\chi\in C^\infty(\overline{\Omega})$, носій якої задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi\subset\Omega_0\cup\Gamma_0$. Аналогічно, лінійний простір $H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ складається, за означенням, з усіх розподілів $h\in\mathcal{D}'(\Gamma)$ таких, що $\chi h\in H^{\sigma,\varphi}(\Gamma)$ для довільної функції $\chi\in C^\infty(\Gamma)$, носій якої задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi\subset\Gamma_0$.

Теорема 2. *Нехай* $s \in \mathbb{R}$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Припустимо, що розподіл* $u \in \mathcal{S}'_{A,m+1/2-2q+}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (1), (2), *праві частини якої задовольняють умови* $f \in H^{s-2q,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$ *і* $g_j \in H^{s-m_j-1/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ *для кожного* $j \in \{1, \ldots, q\}$. *Тоді* $u \in$ $\in H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$.

Як бачимо, уточнена регулярність $\varphi \in \mathcal{M}$ правих частин досліджуваної задачі успадковується її узагальненим розв'язком. Відмітимо важливі окремі випадки теореми 2. Якщо $\Omega_0 = \Omega$ і $\Gamma_0 = \Gamma$, то простори $H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$ і $H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ збігаються з просторами $H^{\sigma,\varphi}(\Omega)$ і $H^{\sigma,\varphi}(\Gamma)$ відповідно. У цьому випадку теорема 2 стверджує, що регулярність узагальненого розв'язку u підвищується глобально, тобто в усій області Ω аж до її межі Γ. Якщо $\Gamma_0 = \varnothing$, то регулярність розв'язку u підвищується в околах усіх точок $x \in \Omega_0$ за умови, що ці околи не перетинають межу підобласті Ω_0. У випадку $\Gamma_0 = \varnothing$ простір $H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ збігається з $\mathcal{D}'(\Gamma)$, і тому умова на g_j у теоремі 2 стає тривіальною. У цьому випадку висновок теореми 2 випливає з [9] (теорема 4.19). Отже,

$$\mathcal{S}'_{A,m+1/2-2q+}(\Omega) \subset \bigcup_{\sigma > m+1/2} H^{\sigma}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing).$$

Теореми 1 і 2 є новими навіть у соболєвському випадку, коли $\varphi(\cdot) \equiv 1$.

5. Доведення основних результатів. Обґрунтуємо основні результати роботи — теореми 1 і 2.

***Доведення теореми* 1.** Спочатку обґрунтуємо її у соболєвському випадку, коли $\varphi(\cdot) \equiv 1$ і ціле $s < 2q$. У цьому випадку щільність множини $C^\infty(\overline{\Omega})$ у просторі $H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)$ випливає з теорем 4.25(i) та 4.26 з монографії [9] (див. також [33], теореми 1(i) та 2). Справді, за другою з них простір $H^{\lambda}(\Omega)$ задовольняє умову I_{s-2q}, сформульовану в п. 4.4.2 цієї монографії. Тому за першою з цих теорем множина

$$\big\{u \in C^\infty(\overline{\Omega}) \colon Au \in H^{\lambda}(\Omega)\big\} = C^\infty(\overline{\Omega})$$

щільна у просторі $H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)$.

Для доведення інших тверджень теореми 1 у розглянутому випадку скористаємося таким результатом про розв'язність досліджуваної задачі (1), (2) у просторах Соболєва – Ройтберга: відображення (3) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до нетерового обмеженого лінійного оператора

$$(A, B) \colon H^{s,(r)}(\Omega) \to H^{s-2q,(r-2q)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2}(\Gamma) =: \mathcal{H}^{(r-2q)}_{s-2q,s}(\Omega, \Gamma). \tag{12}$$

Тут через $H^{\sigma,(k)}(\Omega)$, де $\sigma \in \mathbb{R}$ і $1 \le k \in \mathbb{Z}$, позначено гільбертів функціональний простір, введений Я. А. Ройтбергом [41] на основі соболєвських просторів (див. також його монографію [4] (п. 2.1)). За означенням простір Соболєва – Ройтберга $H^{\sigma,(k)}(\Omega)$, де $\sigma \notin \{1/2, \ldots, k-1/2\}$, є поповненням лінійного многовиду $C^\infty(\overline{\Omega})$ за гільбертовою нормою

$$\|u\|_{H^{\sigma,(k)}(\Omega)} := \left(\|u\|^2_{H^{\sigma,(0)}(\Omega)} + \sum_{j=1}^{k} \|(D^{j-1}_{\nu} u) \restriction \Gamma\|^2_{H^{\sigma-j+1/2}(\Gamma)} \right)^{1/2}.$$

Тут $H^{\sigma,(0)}(\Omega) := H^{\sigma}(\Omega)$, якщо $\sigma \ge 0$, та $H^{\sigma,(0)}(\Omega)$ — поповнення $C^\infty(\overline{\Omega})$ за гільбертовою нормою

$$\|u\|_{H^{\sigma,(0)}(\Omega)} := \sup\bigl\{ |(u,v)_\Omega| :\ v \in H^{-\sigma}(\Omega),\ \|v\|_{H^{-\sigma}(\Omega)} = 1 \bigr\},$$

якщо $\sigma < 0$. У випадку, коли $\sigma \in \{1/2, \ldots, k-1/2\}$, простір $H^{\sigma,(k)}(\Omega)$ означається шляхом інтерполяції з параметром $1/2$ пари гільбертових просторів $H^{\sigma\mp\varepsilon,(k)}(\Omega)$, де $0 < \varepsilon < 1$.

Простір $H^{\sigma,(k)}(\Omega)$, де $\sigma \notin \{1/2, \ldots, k-1/2\}$, допускає такий опис [4] (лема 2.2.1): лінійне відображення

$$T_k : u \mapsto \bigl(u, u\restriction\Gamma, \ldots, (D_\nu^{k-1}u)\restriction\Gamma\bigr), \qquad \text{де} \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізометричного оператора

$$T_k :\ H^{\sigma,(k)}(\Omega) \to H^{\sigma,(0)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{k} H^{\sigma-j+1/2}(\Gamma) =: \Pi_{\sigma,(k)}(\Omega,\Gamma),$$

область значень якого складається з усіх векторів $(u_0, u_1, \ldots, u_k) \in \Pi_{\sigma,(k)}(\Omega,\Gamma)$ таких, що $u_j = R_\Gamma D_\nu^{j-1} u_0$ для кожного $j \in \{1, \ldots, k\}$, що задовольняє умову $\sigma > j - 1/2$.

Зауважимо [4] (п. 2.1), що при $\sigma > k-1/2$ простори $H^{\sigma,(k)}(\Omega)$ і $H^\sigma(\Omega)$ рівні як поповнення лінійного многовиду $C^\infty(\overline{\Omega})$ за еквівалентними нормами. Окрім того, виконується неперервне вкладення $H^{\sigma,(k)}(\Omega) \hookrightarrow H^{\theta,(k)}(\Omega)$, якщо $\theta < \sigma$.

Обмеженість і нетеровість оператора (12) доведена Ю. В. Костарчуком і Я. А. Ройтбергом в [32] (теорема 5) для довільного дійсного s. Там же показано, що N — ядро цього оператора. Згідно з [4] (теорема 4.1.3), область значень оператора (12) складається з усіх векторів $(f, g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{H}^{(r-2q)}_{s-2q,s}(\Omega,\Gamma)$ таких, що

$$(f_0, v)_\Omega + \sum_{j=1}^{r-2q} (f_j, w_j)_\Gamma + \sum_{j=1}^{q} (g_j, h_j)_\Gamma = 0 \qquad (13)$$
$$\text{для всіх} \quad (v, w_1, \ldots, w_{r-2q}, h_1, \ldots, h_q) \in \mathcal{N}_\star,$$

а індекс дорівнює $\dim N - \dim \mathcal{N}_\star$. Тут $(f_0, f_1, \ldots, f_{r-2q}) := T_{r-2q} f$, а $\mathcal{N}_\star$ є деяким скінченновимірним простором, який лежить в $C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^{r-q}$ та не залежить від s. Згідно з [5] (теорема 4.1.4), можна покласти $\mathcal{N}_\star := N_\star$ в описі (13) області значень оператора (12) для цілих s. Покажемо, що те саме можна зробити і у формулі індексу цього оператора. Це достатньо показати для $s = 0$ з огляду на незалежність індексу від s. Оскільки $N_\star \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^{r-q}$, то $N_\star$ можна розглядати як скінченновимірний підпростір простору

$$H^{2q}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{r-2q} H^{2q+j-1/2}(\Gamma) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{m_j+1/2}(\Gamma).$$

Останній є взаємно спряженим до простору

$$\Pi_{-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{-m_j-1/2}(\Gamma) \qquad (14)$$

відносно розширення за неперервністю скалярного добутку в $L_2(\Omega) \oplus (L_2(\Gamma))^{r-q}$. За такого розгляду простір, спряжений до $N_\star$, збігається з фактор-простором простору (14) за підпростором усіх векторів

$$(f_0, f_1, \ldots, f_{r-2q}, g_1, \ldots, g_q) \in \Pi_{-2q,(r-2q)}(\Omega, \Gamma) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{-m_j-1/2}(\Gamma),$$

які задовольняють умову (13), де беремо $\mathcal{N}_\star := N_\star$. Звідси, оскільки оператор T_{r-2q} здійснює ізоморфізм простору $H^{-2q,(r-2q)}(\Omega)$ на простір $\Pi_{-2q,(r-2q)}(\Omega, \Gamma)$, випливає, що ковимірність області значень оператора (12), де $s = 0$, дорівнює вимірності цього фактор-простору, тобто становить $\dim N_\star$. Отже, індекс цього оператора дорівнює $\dim N - \dim N_\star$.

Покладемо

$$H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega) := \bigl\{ u \in H^{s,(r)}(\Omega) \colon Au \in H^{\lambda}(\Omega) \bigr\}.$$

Тут для кожного $u \in H^{s,(r)}(\Omega)$ елемент $Au \in H^{s-2q,(r-2q)}(\Omega)$ означено за допомогою оператора (12). Для цього елемента умова $Au \in H^{\lambda}(\Omega)$ має сенс, оскільки, як зазначалося вище,

$$H^{\lambda}(\Omega) = H^{\lambda,(r-2q)}(\Omega) \hookrightarrow H^{s-2q,(r-2q)}(\Omega), \tag{15}$$

причому вкладення є неперервним. Наділимо лінійний простір $H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ нормою графіка

$$\|u\|_{H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)} := \bigl(\|u\|^2_{H^{s,(r)}(\Omega)} + \|Au\|^2_{H^{\lambda}(\Omega)} \bigr)^{1/2}. \tag{16}$$

Цей простір гільбертів відносно норми (16). Справді, ця норма, звісно, породжена деяким скалярним добутком. Окрім того, простір $H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ повний відносно неї. Дійсно, якщо послідовність (u_k) фундаментальна в цьому просторі, то існують границі $u := \lim u_k$ в $H^{s,(r)}(\Omega)$ і $f := \lim Au_k$ в $H^{\lambda}(\Omega)$, оскільки останні два простори повні. З першої границі випливає, що $Au = \lim Au_k$ в $H^{s-2q,(r-2q)}(\Omega)$. Звідси на підставі формули (15) і другої границі маємо рівність $Au = f$. Тому $u \in H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ і $\lim u_k = u$ у просторі $H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$. Отже, цей простір є повним.

Звуження відображення (12) на простір $H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ є лінійним оператором

$$(A, B) \colon H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega) \to H^{\lambda}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2}(\Gamma) =: \mathcal{H}_{\lambda,s}(\Omega, \Gamma). \tag{17}$$

Із вказаних вище властивостей оператора (12) безпосередньо випливає, що оператор (17) обмежений, його ядро дорівнює N, а область значень

$$(A, B)\bigl(H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)\bigr) = \mathcal{H}_{\lambda,s}(\Omega, \Gamma) \cap (A, B)\bigl(H^{s,(r)}(\Omega)\bigr). \tag{18}$$

З цієї рівності та замкненості $(A, B)(H^{s,(r)}(\Omega))$ у просторі

$$\mathcal{H}^{(r-2q)}_{s-2q,s}(\Omega, \Gamma) \hookleftarrow \mathcal{H}_{\lambda,s}(\Omega, \Gamma)$$

випливає, що область значень оператора (17) замкнена у просторі $\mathcal{H}_{\lambda,s}(\Omega, \Gamma)$ і складається з усіх векторів $(f, g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{H}_{\lambda,s}(\Omega, \Gamma)$, які задовольняють умову (13), де $(f_0, f_1, \ldots, f_{r-2q}) :=$ $:= T_{r-2q} f$ і $\mathcal{N}_\star := N_\star$. Оскільки $f \in H^{\lambda}(\Omega)$ і $\lambda > m + 1/2 - 2q$, то з означення оператора T_{r-2q} випливає, що $f_0 = f$ і $f_j = R_\Gamma D_\nu^{j-1} f$ для кожного $j \in \{1, \ldots, r - 2q\}$. Тому умова (13) набирає вигляду (9).

Для обґрунтування нетеровості оператора (17) залишається показати, що його область значень має скінченну ковимірність. Нагадаємо, що ковимірність області значень оператора (12) дорівнює $\dim N_{\star} < \infty$. Окрім того, множина $C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times (C^{\infty}(\Gamma))^{q}$ щільна у просторі $\mathcal{H}^{(r-2q)}_{s-2q,s}(\Omega,\Gamma)$. Тому за лемою Гохберга – Крейна [42] (лема 2.1) існує скінченновимірний простір $N_{1} \subset C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times (C^{\infty}(\Gamma))^{q}$ такий, що

$$\mathcal{H}^{(r-2q)}_{s-2q,s}(\Omega,\Gamma) = (A,B)\bigl(H^{s,(r)}(\Omega)\bigr) \dotplus N_{1}$$

(як звичайно, знак $\dotplus$ використовується для позначення прямої суми підпросторів). При цьому $\dim N_{1} = \dim N_{\star}$. Звуження цієї суми на простір $\mathcal{H}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma)$ дає на підставі формул (18) і $N_{1} \subset \mathcal{H}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma)$ рівність

$$\mathcal{H}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma) = (A,B)\bigl(H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)\bigr) \dotplus N_{1}. \tag{19}$$

Отже, ковимірність області значень оператора (17) дорівнює $\dim N_{1} = \dim N_{\star} < \infty$. Таким чином, цей оператор нетерів.

Щоб завершити доведення теореми 1 у розглянутому випадку, достатньо показати, що множина $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ щільна у просторі $H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ та норми у просторах $H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)$ і $H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ еквівалентні на цій щільній множині. Справді, тоді нетерів оператор (17) стає оператором (11) з формулювання цієї теореми.

Доведемо спочатку, що множина $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ щільна в $H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$. Позначимо через $Q^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ ортогональне доповнення підпростору N у гільбертовому просторі $H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$. Звуження нетерового оператора (17) на підпростір $Q^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ є ізоморфізмом

$$(A,B)\colon Q^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega) \leftrightarrow (A,B)\bigl(H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)\bigr); \tag{20}$$

тут, звісно, $(A,B)(H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega))$ трактується як підпростір простору $\mathcal{H}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma)$. Позначимо через P оператор косого проектування простору $\mathcal{H}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma)$ на підпростір $(A,B)(H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega))$ паралельно підпростору N_{1} з прямої суми (19).

Запишемо довільний елемент $u \in H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ у вигляді $u = v + w$, де $v \in Q^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ і $w \in N$. Оскільки множина $C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times (C^{\infty}(\Gamma))^{q}$ щільна у просторі $\mathcal{H}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma)$, то для вектора $F := (A,B)v \in \mathcal{H}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma)$ існує послідовність $(F_{k}) \subset C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times (C^{\infty}(\Gamma))^{q}$ така, що $F_{k} \to F$ у просторі $\mathcal{H}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma)$. Тоді $PF_{k} \to PF = F$ у цьому просторі, причому $(PF_{k}) \subset C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times$ $\times\, (C^{\infty}(\Gamma))^{q}$. Отже,

$$v_{k} := (A,B)^{-1}PF_{k} \to (A,B)^{-1}F = v \qquad \text{в} \quad Q^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega);$$

тут через $(A,B)^{-1}$ позначено оператор, обернений до ізоморфізму (20). Оскільки

$$(A,B)v_{k} = PF_{k} \in \mathcal{H}^{(r-2q)}_{\sigma-2q,\sigma}(\Omega,\Gamma) \quad \text{для кожного} \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

то згідно з [4] (теорема 7.1.1) виконується включення

$$v_{k} \in \bigcap_{\sigma\in\mathbb{R}} H^{\sigma,(r)}(\Omega) = C^{\infty}(\overline{\Omega}).$$

Отже, $C^\infty(\overline{\Omega}) \ni v_k + w \to v + w = u$ у просторі $H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$. З огляду на довільність елемента $u \in H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ доведено щільність множини $C^\infty(\overline{\Omega})$ в $H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$.

Доведемо тепер, що норми у просторах $H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)$ і $H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ еквівалентні на $C^\infty(\overline{\Omega})$. Зауважимо спочатку, що

$$\|u\|_{H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)} \leq \|u\|_{H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)} \qquad \text{для довільного} \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}). \tag{21}$$

Це випливає з означення норми у просторі $H^{s,(r)}(\Omega)$: у випадку $s \geq 0$ — безпосередньо, а у випадку $s < 0$ — з огляду на те, що

$$\|u\|_{H^{s}(\Omega)} \leq \|\mathcal{O}u\|_{H^{s}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{H^{s,(0)}(\Omega)} \qquad \text{для довільного} \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Тут $\mathcal{O}u$ позначає продовження нулем на $\mathbb{R}^n$ функції $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, а рівність є правильною, як зазначено в [4, с. 52].

Доведемо обернену оцінку до (21). Для цього розглянемо еліптичну крайову задачу, яка складається з рівняння (1) і крайових умов

$$D_\nu^{j-1} u = g_j \qquad \text{на} \quad \Gamma, \quad j = 1, \ldots, q. \tag{22}$$

Згідно з [4] (теорема 4.1.1), відображення

$$u \mapsto (Au, \mathrm{D}u) := \big(Au, u\restriction\Gamma, \ldots, (D_\nu^{q-1}u)\restriction\Gamma\big), \quad \text{де} \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}), \tag{23}$$

продовжується єдиним чином (за неперервністю) до нетерового обмеженого лінійного оператора

$$(A, \mathrm{D})\colon H^{s,(r)}(\Omega) \to H^{s-2q,(r-2q)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{s-j+1/2}(\Gamma), \tag{24}$$

до того ж ядро $\mathcal{N}$ цього оператора лежить в $C^\infty(\overline{\Omega})$. Звуження оператора (24) на простір $H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ є нетеровим обмеженим оператором

$$(A, \mathrm{D})\colon H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega) \to H^{\lambda}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{s-j+1/2}(\Gamma) =: \mathcal{H}^{\mathrm{D}}_{\lambda,s}(\Omega, \Gamma). \tag{25}$$

Це доводиться так само, як і нетеровість оператора (17).

Крім того, згідно з [9] (теорема 4.27), відображення (23) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до нетерового обмеженого лінійного оператора

$$(A, \mathrm{D})\colon H^{s}_{A,\lambda}(\Omega) \to \mathcal{H}^{\mathrm{D}}_{\lambda,s}(\Omega, \Gamma), \tag{26}$$

причому ядро цього оператора лежить в $C^\infty(\overline{\Omega})$ (див. також [33], наслідок 3). Зауважимо, що зазначену теорему доведено в [9] для регулярних еліптичних крайових задач, до яких і належить задача (1), (22). Оператори (25) і (26) мають спільне ядро $\mathcal{N} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ і спільну область значень, бо вона є замиканням множини $\big\{(A, \mathrm{D})u\colon u \in C^\infty(\overline{\Omega})\big\}$ у просторі $\mathcal{H}^{\mathrm{D}}_{\lambda,s}(\Omega, \Gamma)$. Позначимо цю спільну область значень через $\mathcal{R}_{\lambda,s}(\Omega, \Gamma)$.

Нетерові оператори (25) і (26) породжують у канонічний спосіб ізоморфізми

$$(A,\mathrm{D})\colon H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)/\mathcal{N}\leftrightarrow\mathcal{R}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma),$$
$$(A,\mathrm{D})\colon H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)/\mathcal{N}\leftrightarrow\mathcal{R}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma).$$

Тут, звісно, трактуємо $\mathcal{R}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma)$ як підпростір простору $\mathcal{H}^{\mathrm{D}}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma)$. Для довільної функції $u\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ розглянемо її клас суміжності $\widetilde{u}:=\{u+w\colon w\in\mathcal{N}\}$, який належить обом фактор-просторам $H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)/\mathcal{N}$ і $H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)/\mathcal{N}$. На підставі цих ізоморфізмів маємо еквівалентність норм

$$\|\widetilde{u}\|_{H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)/\mathcal{N}}\asymp\big\|(A,\mathrm{D})\widetilde{u}\big\|_{\mathcal{R}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma)}\asymp\|\widetilde{u}\|_{H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)/\mathcal{N}} \tag{27}$$

на функціях $u\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Використавши цей факт, доведемо оцінку, обернену до (21).

Для довільного $u\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ існує таке $w\in\mathcal{N}$, що

$$\|u+w\|_{H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)}\leq 2\,\|\widetilde{u}\|_{H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)/\mathcal{N}}. \tag{28}$$

Скориставшись еквівалентністю норм на скінченновимірному просторі $\mathcal{N}$ та послідовно формулами (21), (28) і (27), отримаємо такі нерівності:

$$\|u\|_{H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)}\leq\|u+w\|_{H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)}+\|w\|_{H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)}\leq\|u+w\|_{H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)}+c_1\|w\|_{H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)}\leq$$
$$\leq\|u+w\|_{H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)}+c_1\|u+w\|_{H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)}+c_1\|u\|_{H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)}\leq$$
$$\leq(1+c_1)\|u+w\|_{H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)}+c_1\|u\|_{H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)}\leq 2(1+c_1)\|\widetilde{u}\|_{H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)/\mathcal{N}}+c_1\|u\|_{H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)}\leq$$
$$\leq c_2\|\widetilde{u}\|_{H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)/\mathcal{N}}+c_1\|u\|_{H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)}\leq(c_2+c_1)\|u\|_{H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)};$$

тут c_1 і c_2 — деякі додатні числа, які не залежать від функцій u і w. Отже, доведено оцінку, обернену до (21).

Таким чином, теорему 1 доведено у розглянутому випадку, коли $\varphi(\cdot)\equiv 1,\ s\in\mathbb{Z}$ і $s<2q$.

У загальному випадку виведемо цю теорему з розглянутого випадку і твердження 1 за допомогою інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів (означення цієї інтерполяції та потрібні нам її властивості наведено, наприклад, в [9] (п. 1.1) або [43] (п. 2)).

Виберемо ціле число $l\geq 1$, яке задовольняє умови $s>-2q(l-1)$ і $\lambda<2ql$. Скористаємося нетеровим оператором (11) у випадку (вже розглянутому), коли $\varphi(\cdot)\equiv 1$ і число $-2q(l-1)$ узято замість s, та нетеровим оператором (8) у випадку, коли $\varphi(\cdot)\equiv 1$ і число $\lambda+2q$ взято замість s. Отже, отримаємо нетерові обмежені оператори

$$(A,B)\colon H^{-2q(l-1)}_{A,\lambda}(\Omega)\to H^{\lambda}(\Omega)\oplus\bigoplus_{j=1}^{q}H^{-2q(l-1)-m_j-1/2}(\Gamma)=\mathcal{H}_{\lambda,-2q(l-1)}(\Omega,\Gamma), \tag{29}$$

$$(A,B)\colon H^{\lambda+2q}(\Omega)\to H^{\lambda}(\Omega)\oplus\bigoplus_{j=1}^{q}H^{\lambda+2q-m_j-1/2}(\Gamma)=\mathcal{H}_{\lambda,\lambda+2q}(\Omega,\Gamma). \tag{30}$$

Вони мають спільне ядро N і однаковий індекс, рівний $\dim N-\dim N_{\star}$. Окрім того, перший оператор є розширенням другого.

Покладемо $\varepsilon := s + 2q(l-1) > 0$ і $\delta := \lambda + 2q - s > 0$ та означимо функцію $\psi\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ за формулами $\psi(t) := t^{\varepsilon/(\varepsilon+\delta)}\varphi(t^{1/(\varepsilon+\delta)})$, якщо $t \geq 1$, та $\psi(t) := \varphi(1)$, якщо $0 < t < 1$. Згідно з [9] (теорема 1.14), ця функція є інтерполяційним параметром. Застосувавши інтерполяцію з функціональним параметром ψ до обмежених лінійних операторів (29) і (30), отримаємо обмежений лінійний оператор

$$(A,B)\colon \bigl[H^{-2q(l-1)}_{A,\lambda}(\Omega), H^{\lambda+2q}(\Omega)\bigr]_{\psi} \to \bigl[\mathcal{H}_{\lambda,-2q(l-1)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{H}_{\lambda,\lambda+2q}(\Omega,\Gamma)\bigr]_{\psi}. \tag{31}$$

Він є звуженням відображення (29) на інтерполяційний простір

$$[H^{-2q(l-1)}_{A,\lambda}(\Omega), H^{\lambda+2q}(\Omega)]_{\psi}. \tag{32}$$

Тут і далі у доведенні через $[X_0, X_1]_{\psi}$ позначено гільбертів простір, який є результатом інтерполяції з функціональним параметром ψ припустимої впорядкованої пари сепарабельних гільбертових просторів X_0 і X_1 (див. означення цієї інтерполяції в [9] (п. 1.1.1)). Зауважимо, що цю пару називають припустимою, якщо виконується неперервне і щільне вкладення $X_1 \hookrightarrow X_0$. Тоді також виконуються неперервні і щільні вкладення $X_1 \hookrightarrow [X_0, X_1]_{\psi} \hookrightarrow X_0$ (див. [9] (теорема 1.1)). Наведені у формулі (31) пари гільбертових просторів є припустимими. Припустимість першої з них випливає, зокрема, із доведеної вище щільності множини $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ у просторі $H^{-2q(l-1)}_{A,\lambda}(\Omega)$. Крім того, цей простір сепарабельний, що випливає з нетеровості оператора (29) і сепарабельності простору $\mathcal{H}_{\lambda,-2q(l-1)}(\Omega,\Gamma)$. Припустимість другої пари є очевидною.

Множина $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ щільна у просторі (32), оскільки у нього неперервно і щільно вкладено простір $H^{\lambda+2q}(\Omega)$. Тому оператор (31) є продовженням за неперервністю відображення (3). На підставі зазначених вище властивостей нетерових операторів (29) і (30) робимо висновок, згідно з теоремою про інтерполяцію нетерових операторів (див. [9], теорема 1.5), що оператор (31) нетерів з ядром N, індексом $\dim N - \dim N_{\star}$ та областю значень

$$\bigl[\mathcal{H}_{\lambda,-2q(l-1)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{H}_{\lambda,\lambda+2q}(\Omega,\Gamma)\bigr]_{\psi} \cap (A,B)\bigl(H^{-2q(l-1)}_{A,\lambda}(\Omega)\bigr).$$

З останньої властивості і вже обґрунтованого опису області значень оператора (29) (з використанням умови (9)) випливає, що область значень оператора (31) складається з усіх векторів

$$(f, g_1, \ldots, g_q) \in \bigl[\mathcal{H}_{\lambda,-2q(l-1)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{H}_{\lambda,\lambda+2q}(\Omega,\Gamma)\bigr]_{\psi},$$

які задовольняють умову (9).

Щоб завершити доведення теореми 1, покажемо, що простори, у яких діє нетерів оператор (31), задовольняють рівності

$$\bigl[H^{-2q(l-1)}_{A,\lambda}(\Omega), H^{\lambda+2q}(\Omega)\bigr]_{\psi} = H^{s,\varphi}_{A,\lambda}(\Omega), \tag{33}$$

$$\bigl[\mathcal{H}_{\lambda,-2q(l-1)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{H}_{\lambda,\lambda+2q}(\Omega,\Gamma)\bigr]_{\psi} = \mathcal{H}_{\lambda,s,\varphi}(\Omega,\Gamma) \tag{34}$$

з точністю до еквівалентності норм.

Рівність (34) випливає з теореми 1.5 (про інтерполяцію прямих сум просторів) і теореми 2.2 (про інтерполяцію з функціональним параметром соболєвських просторів на Γ), наведених у [9]. А саме,

$$\bigl[\mathcal{H}_{\lambda,-2q(l-1)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{H}_{\lambda,\lambda+2q}(\Omega,\Gamma)\bigr]_{\psi} =$$

$$= \big[H^{\lambda}(\Omega), H^{\lambda}(\Omega)\big]_{\psi} \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} \big[H^{-2q(l-1)-m_j-1/2}(\Gamma), H^{\lambda+2q-m_j-1/2}(\Gamma)\big]_{\psi} =$$

$$= H^{\lambda}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} \big[H^{s-m_j-1/2-\varepsilon}(\Gamma), H^{s-m_j-1/2+\delta}(\Gamma)\big]_{\psi} =$$

$$= H^{\lambda}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma) = \mathcal{H}_{\lambda,s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$$

з точністю до еквівалентності норм.

Для доведення рівності (33) скористаємось одним результатом про інтерполяцію підпросторів, пов'язаних із довільним обмеженим лінійним оператором, який діє в парі гільбертових просторів. Нехай H, Φ і Ψ — гільбертові простори, причому виконується неперервне вкладення $\Phi \hookrightarrow \Psi$. Нехай також задано обмежений лінійний оператор $T\colon H \to \Psi$. Покладемо $(H)_{T,\Phi} := \{u \in H\colon\, Tu \in \Phi\}$. Простір $(H)_{T,\Phi}$ є гільбертовим відносно норми графіка

$$\|u\|_{(H)_{T,\Phi}} := \big(\|u\|_H^2 + \|Tu\|_{\Phi}^2\big)^{1/2}.$$

Твердження 2. *Нехай задано шість сепарабельних гільбертових просторів* X_0, Y_0, Z_0, X_1, Y_1 *і* Z_1 *та три лінійних відображення* T, R *і* S, *що задовольняють такі умови*:

(i) *пари* $X = [X_0, X_1]$ *і* $Y = [Y_0, Y_1]$ *припустимі*;

(ii) *простори* Z_0 *і* Z_1 *є підпросторами деякого лінійного простору* E;

(iii) *виконуються неперервні вкладення* $Y_j \hookrightarrow Z_j$ *при* $j \in \{0, 1\}$;

(iv) *відображення* T *означене на* X_0 *і задає обмежені оператори* $T\colon X_j \to Z_j$ *при* $j \in$ $\in \{0, 1\}$;

(v) *відображення* R *означене на* E *і задає обмежені оператори* $R\colon Z_j \to X_j$ *при* $j \in$ $\in \{0, 1\}$;

(vi) *відображення* S *означене на* E *і задає обмежені оператори* $S\colon Z_j \to Y_j$ *при* $j \in$ $\in \{0, 1\}$;

(vii) *для кожного* $\omega \in E$ *виконується рівність* $TR\omega = \omega + S\omega$.

Тоді пара просторів $[(X_0)_{T,Y_0}, (X_1)_{T,Y_1}]$ *припустима і для довільного інтерполяційного параметра* $\psi \in \mathcal{B}$ *виконується така рівність просторів з точністю до еквівалентності норм:*

$$\big[(X_0)_{T,Y_0}, (X_1)_{T,Y_1}\big]_{\psi} = \big([X_0, X_1]_{\psi}\big)_{T,[Y_0,Y_1]_{\psi}}.$$

Аналог цього твердження був уперше встановлений Ж.-Л. Ліонсом і Е. Мадженесом [30] (теорема 14.3) для комплексної інтерполяції з числовим параметром. Для інтерполяції з функціональним параметром твердження 2 доведено в [16] (п. 4) (див. також [9], п. 3.3.2).

У твердженні 2 покладемо $X_0 := H^{-2q(l-1)}(\Omega)$, $X_1 := H^{\lambda+2q}(\Omega)$, $Y_0 := Y_1 := Z_1 :=$ $:= H^{\lambda}(\Omega)$, $Z_0 := E := H^{-2ql}(\Omega)$ і $T := A$. Тоді

$$H^{-2q(l-1)}_{A,\lambda}(\Omega) = (X_0)_{T,Y_0} \qquad \text{і} \qquad H^{\lambda+2q}(\Omega) = (X_1)_{T,Y_1}. \tag{35}$$

Зауважимо, що остання рівність виконується з точністю до еквівалентності норм, оскільки A є обмеженим оператором у парі просторів $H^{\lambda+2q}(\Omega)$ і $H^{\lambda}(\Omega)$ (для довільного дійсного λ). Звісно, умови (i) – (iv) твердження 2 виконуються. Побудуємо оператори R і S, які задовольняють решту умов (v) – (vii).

Для цього скористаємося тим, що відображення $u \mapsto A^l A^{l+} u + u$ задає ізоморфізм

$$A^l A^{l+} + I\colon\ H^{\sigma}_{\mathrm{D}}(\Omega) \leftrightarrow H^{\sigma-4ql}(\Omega) \qquad \text{для довільного} \quad \sigma \geq 2ql \tag{36}$$

(див., наприклад, лему 3.1 [9], доведення якої проводиться і для дійсних $\sigma \geq 2ql$). Тут, як звичайно, A^l є l-ю ітерацією оператора A, а A^{l+} — формально спряженим оператором до диференціального оператора A^l відносно скалярного добутку в $L_2(\Omega)$ та I — тотожний оператор. Окрім того,

$$H^{\sigma}_{\mathrm{D}}(\Omega) := \bigl\{u \in H^{\sigma}(\Omega)\colon R_{\Gamma} D_{\nu}^{j-1} u = 0 \ \text{для кожного}\ j \in \{1, \ldots, 2ql\}\bigr\}$$

є підпростором простору $H^{\sigma}(\Omega)$. Оператор, обернений до (36), є обмеженим лінійним оператором

$$(A^l A^{l+} + I)^{-1}\colon\ H^{\theta}(\Omega) \to H^{\theta+4ql}(\Omega) \qquad \text{для довільного} \quad \theta \geq -2ql. \tag{37}$$

Покладемо

$$R := A^{l-1} A^{l+} (A^l A^{l+} + I)^{-1} \quad \text{і} \quad S = -(A^l A^{l+} + I)^{-1}.$$

Використовуючи (37), одержуємо обмежені оператори

$$R\colon Z_0 = H^{-2ql}(\Omega) \to H^{2ql-2ql-2q(l-1)}(\Omega) = X_0,$$

$$R\colon Z_1 = H^{\lambda}(\Omega) \to H^{\lambda+4ql-2ql-2q(l-1)}(\Omega) = X_1,$$

$$S\colon Z_0 = H^{-2ql}(\Omega) \to H^{2ql}(\Omega) \hookrightarrow H^{\lambda}(\Omega) = Y_0,$$

$$S\colon Z_1 = H^{\lambda}(\Omega) \to H^{\lambda+4ql}(\Omega) \hookrightarrow H^{\lambda}(\Omega) = Y_1;$$

тут вкладення неперервні. Крім того,

$$AR = AA^{l-1} A^{l+} (A^l A^{l+} + I)^{-1} = (A^l A^{l+} + I - I)(A^l A^{l+} + I)^{-1} = I + S$$

на просторі $E = H^{-2ql}(\Omega)$. Таким чином, для введених операторів R і S виконуються умови (v) – (vii) твердження 2.

Згідно з цим твердженням і на підставі (35) отримуємо рівності

$$\bigl[H^{-2q(l-1)}_{A,\lambda}(\Omega), H^{\lambda+2q}(\Omega)\bigr]_{\psi} = \bigl[(X_0)_{T,Y_0}, (X_1)_{T,Y_1}\bigr]_{\psi} = \bigl([X_0, X_1]_{\psi}\bigr)_{T,[Y_0,Y_1]_{\psi}}.$$

Тут на підставі теореми 3.2 (про інтерполяцію з функціональним параметром соболєвських просторів на Ω), наведеної у [9], маємо рівність просторів

$$[X_0, X_1]_{\psi} = \bigl[H^{-2q(l-1)}(\Omega), H^{\lambda+2q}(\Omega)\bigr]_{\psi} = \bigl[H^{s-\varepsilon}(\Omega), H^{s+\delta}(\Omega)\bigr]_{\psi} = H^{s,\varphi}(\Omega).$$

Ці рівності виконуються з точністю до еквівалентності норм. Окрім того,

$$[Y_0, Y_1]_{\psi} = \bigl[H^{\lambda}(\Omega), H^{\lambda}(\Omega)\bigr]_{\psi} = H^{\lambda}(\Omega).$$

З останніх трьох виносних формул безпосередньо випливає рівність (33).

Теорему 1 доведено.

***Доведення теореми* 2.** Виберемо довільно функцію $\chi \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ таку, що $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$. Виберемо також функцію $\eta \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, яка задовольняє умови $\operatorname{supp}\eta \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$ і $\eta = 1$ у деякому околі V множини $\operatorname{supp}\chi$ (звісно, цей окіл розглядається у топології на $\overline{\Omega}$). За умовою u належить $H^{\sigma}_{A,\lambda}(\Omega)$ для деяких цілого числа $\sigma < \min\{s, 2q\}$ і дійсного числа $\lambda > m+1/2-2q$ та, крім того,

$$\eta(f,g) \in \begin{cases} \mathcal{H}_{\lambda,s,\varphi}(\Omega,\Gamma), & \text{якщо} \quad s \leq m+1/2, \\ \mathcal{H}_{s-2q,s,\varphi}(\Omega,\Gamma), & \text{якщо} \quad s > m+1/2. \end{cases} \tag{38}$$

Тут $g := (g_1, \ldots, g_q)$ і $\eta(f,g) := (\eta f, (\eta \restriction \Gamma)g_1, \ldots, (\eta \restriction \Gamma)g_q)$. У випадку, коли $s > m + 1/2$, виберемо число $\lambda > m + 1/2 - 2q$ так, щоб додатково виконувалась нерівність $\lambda < s - 2q$.

Взагалі кажучи, $\chi u \notin H^{\sigma}_{A,\lambda}(\Omega)$, тому замість простору $H^{\sigma}_{A,\lambda}(\Omega)$ будемо використовувати більш широкий простір Соболєва – Ройтберга $H^{\sigma,(r)}(\Omega)$, замкнений відносно операції множення на довільну функцію класу $C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Як було показано у доведенні теореми 1, норми у просторах $H^{\sigma}_{A,\lambda}(\Omega)$ і $H^{\sigma,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ еквівалентні на щільному лінійному многовиді $C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Отже, ці простори рівні з точністю до еквівалентності норм і тому виконується неперервне вкладення $H^{\sigma}_{A,\lambda}(\Omega) \hookrightarrow H^{\sigma,(r)}(\Omega)$. Отож, нетерів оператор (12), де беремо число σ замість s, є розширенням нетерового оператора

$$(A,B)\colon H^{\sigma}_{A,\lambda}(\Omega) \to \mathcal{H}_{\lambda,\sigma}(\Omega,\Gamma). \tag{39}$$

Нагадаємо [4] (наслідок 2.3.1), що оператор множення на функцію класу $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ є неперервним на кожному просторі Соболєва – Ройтберга.

Оскільки оператор (39) нетерів, а множина $C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times (C^{\infty}(\Gamma))^q$ щільна у просторі $\mathcal{H}_{\lambda,\sigma}(\Omega,\Gamma)$, то за лемою Гохберга – Крейна [42] (лема 2.1) існує скінченновимірний простір $N_0 \subset C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times (C^{\infty}(\Gamma))^q$ такий, що

$$\mathcal{H}_{\lambda,\sigma}(\Omega,\Gamma) = (A,B)\big(H^{\sigma}_{A,\lambda}(\Omega)\big) \dotplus N_0.$$

Позначимо через P_0 проектор простору $\mathcal{H}_{\lambda,\sigma}(\Omega,\Gamma)$ на перший доданок у цій прямій сумі паралельно другому доданку.

На підставі умови (38), теореми 1 і твердження 1 робимо висновок, що у випадку $s \leq \leq m + 1/2$ виконується включення

$$P_0(\eta(f,g)) \in \mathcal{H}_{\lambda,s,\varphi}(\Omega,\Gamma) \cap (A,B)\big(H^{\sigma}_{A,\lambda}(\Omega)\big) = (A,B)\big(H^{s,\varphi}_{A,\lambda}(\Omega)\big),$$

а у випадку $s > m + 1/2$ — включення

$$P_0(\eta(f,g)) \in \mathcal{H}_{s-2q,s,\varphi}(\Omega,\Gamma) \cap (A,B)\big(H^{\sigma}_{A,\lambda}(\Omega)\big) = (A,B)\big(H^{s,\varphi}(\Omega)\big).$$

Тому $P_0(\eta(f,g)) = (A,B)u_1$ для деякого $u_1 \in H^{s,\varphi}(\Omega) \cap H^{\sigma}_{A,\lambda}(\Omega)$. Тоді

$$\eta(f,g) = P_0(\eta(f,g)) + (I - P_0)(\eta(f,g)) = (A,B)u_1 + u_1^{\circ},$$

де I — тотожний оператор, а $u_1^{\circ} := (I - P_0)(\eta(f,g)) \in N_0$. Крім того, за умовою $(A,B)u = = (f,g)$. Звідси отримуємо

$$(A,B)(u - u_1) = (1 - \eta)(f,g) + u_1^{\circ}.$$

Оскільки $1 - \eta = 0$ на V і $u_1^{\circ} \in N_0 \subset C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times (C^{\infty}(\Gamma))^q$, а $\operatorname{supp}\chi \subset V$, то за теоремою про локальне підвищення регулярності розв'язків еліптичних крайових задач у просторах

Соболєва – Ройтберга [4] (теорема 7.2.1) виконується включення

$$w := \chi(u - u_1) \in \bigcap_{\theta \geq r} H^{\theta,(r)}(\Omega) = C^{\infty}(\overline{\Omega}).$$

Таким чином, $\chi u = \chi u_1 + w \in H^{s,\varphi}(\Omega)$, бо $u_1 \in H^{s,\varphi}(\Omega)$. Отже, $u \in H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$ з огляду на довільність вибору функції χ.

Теорему 2 доведено.

Література

1. *Вентцель А. Д.* О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов // Теория вероятностей и ее применения. – 1959. – **4**. – С. 172 – 185.
2. *Красильников В. Н.* О решении некоторых гранично-контактных задач линейной гидродинамики // Прикл. математика и механика. – 1961. – **25**, № 4. – С. 764 – 768.
3. *Вешев В. А., Коузов Д. П.* О влиянии среды на колебания пластин, сочлененных под прямым углом // Акуст. журн. – 1977. – **23**, № 3. – С. 368 – 377.
4. *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996. – xii+415 p.
5. *Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Rossmann J.* Elliptic boundary value problems in domains with point singularities. – Providence: Amer. Math. Soc., 1997. – 414 p.
6. *Hörmander L.* Linear partial differential operators. – Berlin: Springer, 1963. – 285 p.
7. *Hörmander L.* The analysis of linear partial differential operators. II: Differential operators with constant coefficients.– Berlin: Springer, 1983. – viii+391 p.
8. *Jacob N.* Pseudodifferential operators and Markov processes: In 3 volumes. – London: Imperial College Press, 2001, 2002, 2005. – xxii+493 p., xxii+453 p., xxviii+474 p.
9. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Berlin; Boston: De Gruyter, 2014. – xii+297 p.
10. *Nicola F., Rodino L.* Global pseudodifferential calculas on Euclidean spaces. – Basel: Birkhäuser, 2010. – x+306 p.
11. *Paneah B.* The oblique derivative problem. The Poincaré problem.– Berlin: Wiley-VCH, 2000. – 348 p.
12. *Stepanets A. I.* Methods of approximation theory. – Utrecht: VSP, 2005.
13. *Triebel H.* The structure of functions. – Basel: Birkhäuser, 2001. – xii+425 p.
14. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Elliptic operators in a refined scale of functional spaces // Ukr. Math. J. – 2005. – **57**, № 5. – P. 817 – 825.
15. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Refined scales of spaces and elliptic boundary-value problems. II // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, № 3. – P. 398 – 417.
16. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Regular elliptic boundary-value problem for homogeneous equation in two-sided refined scale of spaces // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, № 11. – P. 1748 – 1767.
17. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Elliptic operator with homogeneous regular boundary conditions in two-sided refined scale of spaces // Ukr. Math. Bull. – 2006. – **3**, № 4. – P. 529 – 560.
18. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Refined scales of spaces and elliptic boundary-value problems. III // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 5. – P. 744 – 765.
19. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* An elliptic boundary-value problem in a two-sided refined scale of spaces // Ukr. Math. J. – 2008. – **60**, № 4. – P. 574 – 597.
20. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, № 2. – P. 211 – 281.
21. *Anop A. V., Murach A. A.* Parameter-elliptic problems and interpolation with a function parameter // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2014. — **20**, № 2. – P. 103 – 116.
22. *Anop A. V., Murach A. A.* Regular elliptic boundary-value problems in the extended Sobolev scale // Ukr. Math. J. – 2014. – **66**, № 7. – P. 969 – 985.
23. *Anop A. V., Kasirenko T. M.* Elliptic boundary-value problems in Hörmander spaces // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2016. – **22**, № 4. – P. 295 – 310.

24. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Extended Sobolev scale and elliptic operators // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 3. – P. 435 – 447.
25. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation Hilbert spaces between Sobolev spaces // Results Math. – 2015. – **67**, № 1. – P. 135 – 152.
26. *Denk R., Faierman M.* An elliptic boundary problem acting on generalized Sobolev spaces // arXiv:1710.01959v1. – 2017. – 21 p.
27. *Касіренко Т. М., Мурач О. О.* Еліптичні задачі з крайовими умовами високих порядків у просторах Хермандера // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, № 11. – С. 1486 – 1504.
28. *Lions J.-L., Magenes E.* Problèmes aux limites non homogénes, V // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (3). – 1962. – **16**. – P. 1 – 44.
29. *Lions J.-L., Magenes E.* Problèmes aux limites non homogénes, VI // J. Anal. Math. – 1963. – **11**. – P. 165 – 188.
30. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
31. *Ройтберг Я. А.* Теоремы о гомеоморфизмах, осуществляемых эллиптическими операторами // Докл. АН СССР. – 1968. – **180**, № 3. – С. 542 – 545.
32. *Костарчук Ю. В., Ройтберг Я. А.* Теореми про ізоморфізми для еліптичних граничних задач з граничними умовами, які не є нормальними // Укр. мат. журн. – 1973. – **25**, № 2. – С. 271 – 277.
33. *Murach A. A.* Extension of some Lions – Magenes theorems // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2009. – **15**, № 2. – P. 152 – 167.
34. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Индивидуальные теоремы о разрешимости эллиптических задач и пространства Хермандера // Доп. НАН України. – 2011. – № 4. – С. 30 – 36.
35. *Murach A. A., Chepurukhina I. S.* Elliptic boundary-value problems in the sense of Lawruk on Sobolev and Hörmander spaces // Ukr. Math. J. – 2015. – **67**, № 5. – P. 764 – 784.
36. *Agranovich M. S.* Elliptic boundary problems // Encycl. Math. Sci. Vol. 79. Part. Different. Equat. IX. – Berlin: Springer, 1997. – P. 1 – 144.
37. *Функциональный анализ* / Под общ. ред. С. Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
38. *Seneta E.* Regularly varying functions. – Berlin: Springer, 1976. – 112 p.
39. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 512 p.
40. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3 – 74.
41. *Ройтберг Я. А.* Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений // Докл. АН СССР. – 1964. – **157**, № 4. – С. 798 – 801.
42. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Основные положения о дефектных числах, корневых векторах и индексах линейных операторов // Успехи мат. наук. – 1957. – **12**, № 2. – С. 43 – 118.
43. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2008. – **14**, № 1. – P. 81 – 100.

Одержано 19.12.17