УДК 517.956

В. В. Городецкий, Р. И. Петришин, А. П. Вережак (Чернов. нац. ун-т им. Ю. Федьковича)

МНОГОТОЧЕЧНАЯ ПО ВРЕМЕНИ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭВОЛЮЦИОННЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

We establish the correct solvability of the multipoint (in the time variable) problem for the evolution equation with operator of differentiation of infinite order in generalized S-type spaces. The properties of the fundamental solution of this problem and the behavior of the solution $u(t,x)$ as $t \to +\infty$ are investigated.

Встановлено коректну розв'язність багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння з оператором диференціювання нескінченного порядку в узагальнених просторах типу S і досліджено властивості фундаментального розв'язку вказаної задачі та поведінку розв'язку $u(t,x)$ при $t \to +\infty$.

При исследовании проблемы о классах единственности и классах корректности задачи Коши для уравнений с частными производными часто используются пространства типа S, введенные в [1, с. 203 – 211]. Функции из таких пространств на действительной оси вместе со всеми своими производными при $|x| \to \infty$ убывают быстрее, чем $\exp\{-a|x|\}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. В [2 – 8] установлено, что пространства типа S и S' — пространства, топологически сопряженные к ним, совпадают с множествами начальных данных задачи Коши для широких классов уравнений с частными производными конечного и бесконечного порядков, при которых решения являются целыми функциями по пространственным переменным. Например, для уравнения теплопроводности $\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2$ фундаментальное решение задачи Коши — функция $G(t,x) = \left(2\sqrt{\pi t}\,\right)^{-1}\exp\{-x^2/(4t)\}$ — при каждом $t > 0$, как функция x, принадлежит пространству $S_{1/2}^{1/2}$ [7, с. 46], относящемуся к пространствам типа S.

Обобщением задачи Коши для таких уравнений является нелокальная многоточечная по времени задача с условием

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)_{t=t_k} = f, \tag{1}$$

где $t_0 = 0$, $\{t_1,\ldots,t_m\} \subset (0,T]$, $\{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ — фиксированные числа (если $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$, то имеем, очевидно, задачу Коши); при этом условие (1) понимается в обычном или слабом смысле, если f — обобщенная функция. Нелокальные по времени задачи относятся к нелокальным краевым задачам для уравнений с частными производными. Такие задачи возникают при моделировании многих процессов и задач практики краевыми задачами для уравнений с частными производными с нелокальными условиями (см., например, [9, 10]).

Исследованием нелокальных краевых задач в разных аспектах занимались многие математики, используя при этом разные методы и подходы (см., например, [11 – 19]). Получены важные результаты относительно постановки, корректной разрешимости и построения решений, изучен вопрос о зависимости разрешимости задач от поведения символов операций, сформулированы условия регулярности и нерегулярности краевых условий для важных случаев дифференциально-операторных уравнений.

В настоящей работе исследуется нелокальная многоточечная по времени задача для уравнения $\partial u(t,x)/\partial t = A_\varphi u(t,x)$, $t \in (0,+\infty)$, $x \in \mathbb{R}$, в пространствах типа S и S', где A_φ —

псевдодифференциальный оператор с аналитическим символом φ, удовлетворяющим определенному условию „параболичности”. Выяснено, что A_φ можно также понимать как дифференциальный оператор „бесконечного порядка” вида $\sum_{k=0}^{\infty} c_k D_x^k$, действующий в обобщенных пространствах типа S, введенных в [1, с. 288–291]. Такие пространства строятся по последовательностям $\{a_k,\, k \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{b_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ положительных чисел, обозначаются символом $S_{a_k}^{b_n}$ и, как показано в этой роботе, являются естественной средой при исследовании указанной задачи. Установлены свойства фундаментального решения нелокальной многоточечной по времени задачи для указанного уравнения, доказана корректная разрешимость задачи в полупространстве $t > 0$, найдено аналитическое представление решения, исследовано поведение решения $u(t, \cdot)$ при $t \to +\infty$ в тех пространствах обобщенных функций типа S', которым принадлежит функция f в условии (1), при этом (1) понимается в том смысле, что для любой основной функции ψ выполняется предельное соотношение

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k \lim_{t \to t_k} \langle u(t, \cdot), \psi \rangle = \langle f, \psi \rangle.$$

Найден класс обобщенных функций f в условии (1), при которых решение $u(t,\, \cdot)$ нелокальной многоточечной по времени задачи стремится к нулю равномерно на $\mathbb{R}$ при $t \to +\infty$.

1. Обобщенные пространства типа S. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов в известной монографии [1, с. 203–210] предложили метод построения функциональных пространств бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций, на которые налагаются определенные условия не только на убывание на бесконечности, но и на рост их производных с увеличением порядка производной. Эти условия формулируются с помощью неравенств вида $|x^k \varphi^{(n)}(x)| \le c_{kn}$, $\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+$, где $\{c_{kn}\}$ — двойная последовательность положительных чисел. Если эти числа меняются произвольно вместе с функцией φ, то имеем пространство Л. Шварца $S = S(\mathbb{R})$ быстро убывающих на $\mathbb{R}$ функций. Если $c_{kn} = a_k b_n$, где $\{a_k,\, k \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{b_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — некоторые последовательности положительных чисел, то имеем обобщенные пространства типа S, которые обозначаются символом $S_{a_k}^{b_n}$. В монографии [1] детально изучен случай, когда $a_k = k^{k\alpha}$, $\alpha > 0$, $b_n = n^{n\beta}$, $\beta > 0$; соответствующие пространства называются пространствами типа S и обозначаются символом S_α^β. В работе [20] изучаются пространства $S_{a_k}^{b_n}$ (их топологическая структура, свойства функций, основные операции в таких пространствах). Известные пространства типа W, введенные Б. Л. Гуревичем [21] (см. также [22, с. 7–17]), в которых для характеристики поведения функций на бесконечности вместо степенных функций используются произвольные выпуклые функции, также вкладываются в пространства $S_{a_k}^{b_n}$ при конкретном выборе последовательностей $\{a_k\}$ и $\{b_n\}$ (см. [23]).

Здесь остановимся на пространствах $S_{a_k}^{b_n}$, построенных по последовательностям вида $\{b_n = n!\rho_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{a_k = k!d_k,\, k \in \mathbb{Z}_+\}$, где $\{\rho_n\}$, $\rho_0 = 1$, — последовательность положительных чисел, имеющая свойства: а) она монотонно убывает; б) $\exists c_b > 0\ \exists \gamma_1 \in (0,1)\ \forall n \in \mathbb{N}:$ $\rho_{n-1}/\rho_n \le c_b\, n^{\gamma_1}$; в) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 0$; г) $\forall \varepsilon > 0\ \exists c_\varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}_+ : \rho_n \ge c_\varepsilon\, \varepsilon^n/n^n$. Последовательность $\{d_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, $d_0 = 1$, также имеет свойства а)–г), при этом условие б) принимает вид $\exists c_a > 0\ \exists \gamma_2 \in (0,1)\quad \forall n \in \mathbb{N}: d_{k-1}/d_k \le c_a\, k^{\gamma_2}$. Примером последовательности $\{\rho_n\}$ со свойствами а)–г) может служить последовательность $\rho_n = (n\beta)^{-n\beta} e^{n\beta}$, где $\beta \in (0,1)$ — фиксированный параметр. Проверим, например, выполнение для этой последовательности свойства г). Имеем

$$\rho_n = \frac{e^{n\beta}}{(n\beta)^{n\beta}} = \frac{e^{n\beta}}{(n\beta)^{n\beta}} \frac{[n(1-\beta)]^{n(1-\beta)}}{[n(1-\beta)]^{n(1-\beta)}} \frac{e^{n(1-\beta)}}{e^{n(1-\beta)}} =$$

$$= \frac{e^n}{n^n} \frac{1}{[\beta^\beta(1-\beta)^{1-\beta}]^n} \frac{[n(1-\beta)]^{n(1-\beta)}}{e^{n(1-\beta)}} = \frac{e^n}{n^n} \frac{1}{\omega^n} \sup_{\lambda \geq 0} \frac{\lambda^n}{\exp\{\lambda^{1/(1-\beta)}\}},$$

где $\omega = \beta^\beta(1-\beta)^{1-\beta} < 1$. Если взять любое $\varepsilon > 0$ и положить $\lambda = \varepsilon$, то придем к неравенству $\rho_n \geq c_\varepsilon \varepsilon^n / n^n$, где $c_\varepsilon = \exp\{-\varepsilon^{1/(1-\beta)}\}$. Отметим, что условие б) для этой последовательности выполняется с параметром $\gamma_1 = \beta$. Предполагаем также, что параметры $\gamma_1,\ \gamma_2$ в условии б) для последовательностей $\{\rho_n\}$ и $\{d_k\}$ связаны условием $\gamma_1 + \gamma_2 = \theta \leq 1$.

Символом $S_{a_k}^{b_n}$ обозначим совокупность функций $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию

$$\exists c, A, B > 0 \quad \forall \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+ \quad \forall x \in \mathbb{R}\colon |x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c A^k B^n a_k b_n$$

(о топологической структуре пространств $S_{a_k}^{b_n}$ см. [20]). В [20] установлено, что функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ принадлежит пространству $S_{a_k}^{b_n}$, где $a_k = k! d_k,\ b_n = n! \rho_n$, тогда и только тогда, когда она может быть аналитически продолжена в комплексную плоскость и как целая функция $\varphi(z),\ z \in \mathbb{C}$, удовлетворяет условию

$$\exists a, b, c > 0 \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}\colon |\varphi(z)| \leq c\gamma(ax)\rho(by), \tag{2}$$

где

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad |x| < 1, \\ \inf\limits_k (a_k/|x|^k), & |x| \geq 1, \end{cases} \qquad \rho(y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad |y| < 1, \\ \sup\limits_n (|y|^n/b_n), & |y| \geq 1. \end{cases}$$

Отметим, что ρ — непрерывно дифференцируемая, четная на $\mathbb{R}$ функция, монотонно возрастающая на $[1, +\infty)$. Из свойства г) следует также (см. [20]) существование постоянных $c_0,\ c > 0$ таких, что $\rho(y) \geq c_0 \exp(c|y|)$. Например, если $b_n = n^{n\beta},\ 0 < \beta < 1$, то $\rho(y) \sim \exp\{|y|^{1/\beta}\}$. Кроме того, как доказано в [20], $\ln \rho$ — выпуклая на $(0, +\infty)$ функция в том смысле, что

$$\forall \{y_1, y_2\} \subset (0, +\infty)\colon\ \ln \rho(y_1) + \ln \rho(y_2) \leq \ln \rho(y_1 + y_2). \tag{3}$$

Функция ρ в (2) связана с последовательностью $\{\rho_n\}$, по которой строится последовательность $\{b_n = n! \rho_n\}$, следующим образом [20]: $\rho_n = \inf_{|\omega| \geq 1} (\rho(\omega)/|\omega|^n) = \nu_n^{-n} \rho(\nu_n)$, где ν_n — решение уравнения $\omega \mu(\omega) = n,\ n \in \mathbb{N},\ \mu(\omega) = \rho'(\omega)/\rho(\omega)$; последовательность $\{\nu_n\}$ монотонно возрастает и неограничена, $\nu_n < n,\ n \in \mathbb{N}$.

Поскольку $\gamma(x) = 1/\tilde{\gamma}(x)$, где $\tilde{\gamma}(x) = 1,\ |x| < 1$ и $\tilde{\gamma}(x) = \sup_k (|x|^k / a_k)$, если $|x| \geq 1$, то γ — непрерывно дифференцируемая, четная на $\mathbb{R}$ функция, монотонно убывающая на $[1, +\infty]$, $0 < \gamma(x) \leq 1,\ x \in \mathbb{R}$. Например, если $a_k = k^{k\alpha},\ \alpha \in (0,1)$, то выполняется неравенство [1, с. 204] $\exp\left\{-\dfrac{\alpha}{e}|x|^{1/\alpha}\right\} \leq \gamma(x) \leq c \exp\left\{-\dfrac{\alpha}{e}|x|^{1/\alpha}\right\},\ c = \exp\{\alpha e/2\}$. Функция $\ln \gamma$ удовлетворяет на $(0, +\infty)$ неравенству (см. [20])

$$\ln \gamma(x_1) + \ln \gamma(x_2) \geq \ln \gamma(x_1 + x_2), \quad \{x_1, x_2\} \subset (0, +\infty). \tag{4}$$

Последовательность $\{\varphi_\nu,\ \nu \geq 1\} \subset S_{a_k}^{b_n}$ сходится к нулю в этом пространстве, если последовательность $\{\varphi_\nu^{(n)},\ \nu \geq 1\}$ при каждом $n \in \mathbb{Z}_+$ сходится к нулю равномерно на каждом отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$ и при этом выполняются неравенства $|x^k\varphi_\nu^{(n)}(x)|\le cA^kB^na_kb_n,\ \{k,n\}\subset\ \mathbb{Z}_+$, $x\in\mathbb{R}$, где постоянные $c,A,B>0$ не зависят от ν (см. [1, с. 200; 20]).

В пространствах $S_{a_k}^{b_n}$, $a_k=k!d_k,\ b_n=n!\rho_n$, определены и непрерывны операторы, важные для анализа; в первую очередь, это операторы умножения на x, на все многочлены, операторы дифференцирования, сдвига и растяжения (см. [20]). В частности, операция сдвига аргумента $T_x\colon\varphi(\xi)\ \to\ \varphi(\xi+x)$ дифференцируема в указанных пространствах $S_{a_k}^{b_n}$ (даже бесконечно дифференцируема) в том смысле, что предельные соотношения вида $(\varphi(x+h)-\varphi(x))h^{-1}\to$ $\to\varphi'(x),\ h\to0$, выполняются для каждой функции $\varphi\in S_{a_k}^{b_n}$ в смысле сходимости по топологии пространства $S_{a_k}^{b_n}$. Пространства $S_{a_k}^{b_n}$ совершенны [20] (т. е. это пространства, все ограниченные множества которых компактны); они связаны между собой с помощью преобразования Фурье, а именно, имеет место формула [1, с. 290] $F[S_{a_k}^{b_n}]=S_{b_k}^{a_n}$, где

$$F\left[S_{a_k}^{b_n}\right]:=\left\{\psi:\psi(\sigma)=\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(x)e^{i\sigma x}dx,\ \varphi\in S_{a_k}^{b_n}\right\}.$$

Из свойств преобразования Фурье в пространствах типа S следует, что в пространстве $S_{a_k}^{b_n}$ определен и непрерывен псевдодифференциальный оператор $F^{-1}_{\sigma\to x}[\varphi(\sigma)F_{\sigma\to x}[\psi]]=A_\varphi\psi\ \forall\psi\in$ $S_{a_k}^{b_n}$, построенный по функции (символу) φ, являющейся мультипликатором в пространстве $S_{b_k}^{a_n}$. Если оператор A_φ действует в пространстве $S_{b_k}^{b_n}$, $b_n=n!\rho_n$, то A_φ можно также понимать как оператор дифференцирования „бесконечного порядка": если $\varphi(\sigma)=\sum_{k=0}^\infty c_k\sigma^k$, то для любой функции $\psi\in S_{b_k}^{b_n}$ имеем

$$A_\varphi\psi=F^{-1}_{\sigma\to x}\left[\varphi(\sigma)F_{x\to\sigma}[\psi](\sigma)\right]=F^{-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}c_k\sigma^kF[\psi]\right]=F^{-1}\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}c_k\sigma^kF[\psi]\right]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}c_kF^{-1}\left[\sigma^kF[\psi]\right]=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\left[(iD_x)^k\psi\right](x),\quad D_x=d/dx. \tag{5}$$

Корректность проведенных в (5) преобразований следует из соотношения

$$r_{n,\psi}(\sigma)=\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k\sigma^kF[\psi](\sigma)\to0,\quad n\to\infty, \tag{6}$$

которое выполняется в пространстве $S_{b_k}^{b_n}$; при доказательстве (6) используются свойства преобразования Фурье в пространствах $S_{b_k}^{b_n}$, а также свойства последовательности $\{b_n\}$.

Символом $(S_{a_k}^{b_n})'$ обозначим пространство всех линейных непрерывных функционалов на соответствующем пространстве основных функций со слабой сходимостью, а его элементы будем называть обобщенными функциями. Поскольку в основном пространстве $S_{a_k}^{b_n}$ определена операция сдвига аргумента $T_x\colon\psi(\xi)\to\psi(\xi+x)$, то свертку обобщенной функции $f\in(S_{a_k}^{b_n})'$ с основной определим по формуле $(f*\psi)(x):=\langle f_\xi,T_{-x}\check{\psi}(\xi)\rangle\equiv\langle f_\xi,\psi(x-\xi)\rangle$; при этом $f*\psi$ является обычной бесконечно дифференцируемой функцией. Если $f*\psi\in S_{a_k}^{b_n}$ для любой функции $\psi\in S_{a_k}^{b_n}$ и из соотношения $\psi_\nu\to0$ при $\nu\to+\infty$ по топологии пространства $S_{a_k}^{b_n}$ следует, что $f*\psi_\nu\to0$ при $\nu\to+\infty$ по топологии пространства $S_{a_k}^{b_n}$, то функционал f называется свертывателем в пространстве $S_{a_k}^{b_n}$. Поскольку каждое пространство типа S

вместе с функцией $\psi(x)$ содержит также функцию $\psi(-x)$ и $F^{-1}[\psi] = (2\pi)^{-1}F[\psi(-\xi)]$, то преобразование Фурье обобщенной функции $f \in (S^{b_n}_{a_k})'$ определим по формуле $\langle F[f], \psi\rangle = \langle f, F[\psi]\rangle \ \forall \psi \in S^{a_n}_{b_k}$, при этом $F[f] \in (S^{a_n}_{b_k})'$. Если $f \in (S^{b_n}_{a_k})'$ — свертыватель в пространстве $S^{b_n}_{a_k}$, то для любой функции $\psi \in S^{b_n}_{a_k}$ имеет место формула [20] $F[f * \psi] = F[f]\, F[\psi]$.

Пусть X — топологическое пространство, $K \subset \mathbb{R}$. Функция $K \ni \nu \to \varphi_\nu \in X$ называется абстрактной функцией параметра ν со значениями в пространстве X. О свойствах абстрактных функций см. [1, с. 94–97].

2. Основные результаты. Рассмотрим эволюционное уравнение

$$\partial u(t,x)/\partial t = A_\varphi u(t,x), \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{7}$$

где $A_\varphi = F^{-1}_{\sigma\to x}[\varphi(\sigma)F_{x\to\sigma}]$ — псевдодифференциальный оператор в пространстве $S^{b_n}_{b_k}$, построенный по функции $\varphi(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, являющейся мультипликатором в этом пространстве и такой, что $e^\varphi \in S^{b_n}_{b_k}$ (напомним (см. п. 1), что в этом случае оператор A_φ можно понимать как оператор дифференцирования „бесконечного порядка” в пространстве $S^{b_n}_{b_k}$). Символом $P^{b_n}_{b_k}$ обозначим класс функций (символов) φ, удовлетворяющих указанным условиям.

Например, пусть $\varphi(\sigma) = -\sigma^2$, $\sigma \in \mathbb{R}$. В этом случае $A_\varphi = F^{-1}[-\sigma^2 F] = -(iD_x)^2 = D_x^2$, а уравнение (7) — уравнение теплопроводности $\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2$. Поскольку $|e^{-z^2}| = |e^{-(\sigma+iy)^2}| = e^{-\sigma^2+y^2}$, то отсюда и из характеристики пространств S^β_α (см. [1, с. 210]) следует, что $e^{-\sigma^2} \in S^{1/2}_{1/2} \equiv S^{n^{n/2}}_{k^{k/2}}$. Кроме того, функция $-\sigma^2$ — мультипликатор в пространстве $S^{1/2}_{1/2}$ (см. [1, с. 221, 222]). Следовательно, функция $\varphi(\sigma) = -\sigma^2$ принадлежит классу $P^{n^{n/2}}_{k^{k/2}}$, при этом последовательность $\{b_n\}$ имеет вид $b_n = n^{n/2} = n^n \rho_n$, где $\rho_n \sim (n/2)^{-n/2}e^{n/2}$.

Далее предполагаем, что последовательность b_n удовлетворяет условию д):

$$\exists A > 0 \quad \exists \tilde{L} > 0 \quad \forall \{n,l\} \subset \mathbb{Z}_+ : b_n\, b_l \leq A\tilde{L}^{n+l} b_{n+l}.$$

Для уравнения (7) зададим нелокальную многоточечную (m-точечную) по времени задачу: найти решение уравнения (7), удовлетворяющее условию

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - \mu_1 u(t,\cdot)|_{t=t_1} - \ldots - \mu_m u(t,\cdot)|_{t=t_m} = f, \tag{8}$$

где $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0,+\infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0,+\infty)$ — фиксированные числа, причем $\mu > m\sum_{k=1}^m \mu_k$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m < +\infty$, $f \in S^{b_n}_{b_k}$.

Классическое решение $u \in C^1\big((0,+\infty), S^{b_n}_{b_k}\big)$ задачи (7), (8) ищем с помощью преобразования Фурье; в результате получаем

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t, x-\xi) f(\xi) d\xi = G(t,x) * f(x), \quad (t,x) \in \Omega,$$

где

$$G(t,x) = F^{-1}_{\sigma\to x}\left[Q(t,\sigma)\right](x), \qquad Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma), \qquad Q_1(t,\sigma) = \exp\{t\varphi(\sigma)\},$$

$$Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{t_k\varphi(\sigma)\}\right)^{-1} = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,\sigma)\right)^{-1}.$$

Сходимость соответствующего интеграла следует из свойств функции G, которые мы приведем ниже. Свойства функции G обусловлены свойствами функции Q, поскольку $G = F^{-1}[Q]$. Поэтому прежде всего исследуем свойства функции $Q(t,\sigma)$ как функции аргумента σ.

Поскольку $\varphi \in P_{b_k}^{b_n}$, то $e^{\varphi} \in S_{b_k}^{b_n}$. Тогда (см. п.1, неравенство (2)) существуют числа $c_0, a, b > 0$ такие, что

$$|e^{\varphi(z)}| \leq c_0 e^{-\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)+\ln\rho(b\tau)}, \qquad \tilde{\gamma} = 1/\gamma = \rho, \quad z = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}. \tag{9}$$

Далее предполагаем, что постоянная $c_0 > 0$ в неравенстве (9) удовлетворяет условию $c_0 \leq 1$. Тогда

$$|e^{t\varphi(z)}| = |e^{\varphi(z)}|^t \leq [c_0 \exp\{-\ln\tilde{\gamma}(a\sigma) + \ln\rho(b\tau)\}]^t \leq \exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(a\sigma) + t\ln\rho(b\tau)\}. \tag{10}$$

Из неравенства (10) следует, что $Q_1(t,\cdot)$ принадлежит $S_{b_k}^{b_n}$, $b_n = n!\rho_n$, при каждом $t \in$ $\in (0,+\infty)$.

Лемма 1. *Пусть φ принадлежит $P_{b_k}^{b_n}$. Для функции $Q_1(t,\sigma) = \exp\{t\varphi(\sigma)\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, и ее производных (по переменной σ) при $t > 1$ выполняются оценки*

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \leq \tilde{b}^s t^s s! \rho_s \exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(\tilde{a}\sigma)\}, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \tag{11}$$

где $\rho_s = \inf_\tau(\rho(\tau)/|\tau|^s)$, постоянные $\tilde{a}, \tilde{b} > 0$ не зависят от t.

Доказательство. При $t > 1$ выполняется неравенство $t\ln\rho(b\tau) \leq \ln\rho(bt\tau)$, $\tau \in [0,\infty)$. Это свойство следует из соотношений

$$\ln\rho(tb\tau) = \int_0^{tb\tau} \mu(\xi)d\xi = t\int_0^{b\tau} \mu(ty)dy \geq t\int_0^{b\tau} \mu(y)dy = t\ln\rho(b\tau),$$

где $\mu(\xi) = \rho'(\xi)/\rho(\xi)$, при этом μ — неотрицательная, непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, монотонно возрастающая на $[0,\infty)$ (см. [20]). Тогда

$$|Q_1(t,z)| \leq \exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(a\sigma) + \ln\rho(tb\tau)\}, \qquad z \in \mathbb{C}, \quad t > 1. \tag{12}$$

Согласно интегральной формуле Коши

$$D_\sigma^s Q_1(t,\sigma) = \frac{s!}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{Q_1(t,z)}{(z-\sigma)^{s+1}}dz, \quad s \in \mathbb{Z}_+,$$

где Γ_R — окружность радиуса R с центром в точке $\sigma \in \mathbb{R}$. Используя (12), получаем неравенства $|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \leq \dfrac{s!}{R^s}\max_{z\in\Gamma_R}|Q_1(t,z)| \leq \dfrac{s!}{R^s}\exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(a\sigma_0) + \ln\rho(tbR)\}$, где σ_0 — точка максимума функции $\exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(a\xi)\}$, $\xi \in [\sigma - R,\ \sigma + R]$. Поскольку $\ln\tilde{\gamma}(a\xi)$ — четная на $\mathbb{R}$ функция, возрастающая на $[0,+\infty)$, то

$$\sigma_0 = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad |\xi| < R, \\ \sigma + R, & \text{если} \quad \xi \leq -R, \\ \sigma - R, & \text{если} \quad \xi \geq R. \end{cases}$$

Используя неравенство $-\ln\tilde\gamma(\sigma_1+\sigma_2)+\ln\tilde\gamma(\sigma_1)\le-\ln\tilde\gamma(\sigma_2),\ \sigma_1,\sigma_2>0$, доказываем существование постоянных $\tilde a,\ a_2>0,\ \tilde a\le a$, таких, что

$$\forall\sigma>0\quad\forall R>0\colon\ \exp\{-t\ln\tilde\gamma(a\sigma_0)\}\le\exp\{-t\ln\tilde\gamma(\tilde a\sigma)\}\ \exp\{t\ln\tilde\gamma(a_2R)\}.$$

Тогда

$$|D_\sigma^sQ_1(t,\sigma)|\le\frac{s!}{R^s}\exp\{-t\ln\tilde\gamma(\tilde a\sigma)\}\ \exp\{t\ln\tilde\gamma(a_2R)\}\ \exp\{\ln\rho(tbR)\}\le$$
$$\le\frac{s!}{R^s}\exp\{-t\ln\tilde\gamma(\tilde a\sigma)\}\ \exp\{\ln\rho(t\tilde bR)\},\qquad\tilde b=b+a_2.$$

Здесь мы воспользовались неравенством выпуклости для функции $\ln\rho\colon\ \ln\rho(tbR)+\ln\rho(ta_2R)\le\le\ln\rho(t(b+a_2)R)$, а также тем, что $\tilde\gamma=\rho$.

Функция $g_{s,t}(R)=R^{-s}\exp\{\ln\rho(t\tilde bR)\}=R^{-s}\rho(t\tilde bR)$ дифференцируема на $(0,+\infty)$ (при каждом $s\in\mathbb{Z}_+$), при этом из свойств функции ρ следуют соотношения

$$\lim_{R\to+\infty}g_{s,t}(R)=+\infty,\quad s\in\mathbb{Z}_+;\qquad\lim_{R\to+0}g_{s,t}(R)=\begin{cases}+\infty, & s\in\mathbb{N},\\ 1, & s=0.\end{cases}$$

Поскольку $g_{s,t}(R)>0,\ R\in(0,+\infty)$, то эта функция достигает своего инфимума. Следовательно,

$$|D_\sigma^sQ_1(t,\sigma)|\le s!\inf_R g_{s,t}(R)\exp\{-t\ln\tilde\gamma(\tilde a\sigma)\}=$$
$$=s!\tilde b^st^s\inf\frac{\rho(t\tilde bR)}{(t\tilde bR)^s}\exp\{-t\ln\tilde\gamma(a\sigma)\}=s!\tilde b^st^s\rho_s\exp\{-t\ln\tilde\gamma(\tilde a\sigma)\}.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Функция Q_2 — мультипликатор в пространстве $S_{b_k}^{b_n}$.*

Доказательство. С учетом (10) имеют место неравенства

$$Q_1(t_k,\sigma)\le\exp\{-t_k\ln\tilde\gamma(a\sigma)\}\le1,\qquad k\in\{1,\ldots,m\},\qquad\sigma\in\mathbb{R}.$$

Поскольку $\mu>\sum_{k=1}^m\mu_k$, то $\dfrac1\mu\sum_{k=1}^m\mu_kQ_1(t_k,\sigma)\le\dfrac1\mu\sum_{k=1}^m\mu_k<1$. Тогда, используя полиномиальную формулу, находим

$$Q_2(\sigma)=\frac1\mu\left(1-\frac1\mu\sum_{k=1}^m\mu_kQ_1(t_k,\sigma)\right)^{-1}=\frac1\mu\sum_{r=0}^\infty\mu^{-r}\left(\sum_{k=1}^m\mu_ke^{t_k\varphi(\sigma)}\right)^r=$$
$$=\sum_{r=0}^\infty\mu^{-(r+1)}\sum_{r_1+\ldots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\ldots r_m!}\left(\mu_1e^{t_1\varphi(\sigma)}\right)^{r_1}\ldots\left(\mu_me^{t_m\varphi(\sigma)}\right)^{r_m}=$$
$$=\sum_{r=0}^\infty\mu^{-(r+1)}\sum_{r_1+\ldots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\ldots r_m!}\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}Q_1(\lambda,\sigma),$$

где $\lambda:=t_1r_1+\ldots+t_mr_m,\ Q_1(\lambda,\sigma)=e^{\lambda\varphi(\sigma)}$. Отсюда и из (11) следуют неравенства

$$|D^s_\sigma Q_2(\sigma)| \le \tilde{b}^s s!\rho_s \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\ldots r_m!}\mu_0^r \lambda^s \exp\{-\lambda \ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\} \le$$

$$\le \tilde{b}^s s!\rho_s t_m^s \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)}\mu_0^r r^s \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\ldots r_m!},\ s\in\mathbb{N},$$

где $\mu_0 = \max\{\mu_1,\ldots,\mu_m\}$. Далее воспользуемся формулой $\sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \dfrac{r!}{r_1!\ldots r_m!} = m^r$. Тогда

$$|D^s_\sigma Q_2(\sigma)| \le c' b_1^s s!\rho_s \sum_{r=0}^{\infty} \tilde{\mu}^r r^s = \tilde{c} b_1^s s!\rho_s,\ s\in\mathbb{N}, \tag{13}$$

где $\tilde{\mu} = \mu^{-1}\mu_0 m < 1$, $c' = c\mu^{-1}$, $\tilde{c} = c'\sum_{r=0}^{\infty}\tilde{\mu}^r r^s$, $b_1 = \tilde{b}t_m$. Из последнего неравенства и ограниченности функции Q_2 на $\mathbb{R}$ следует, что Q_2 — мультипликатор в пространстве $S^{b_n}_{b_k}$.

Лемма 2 доказана.

Используя неравенства (10) и лемму 2, убеждаемся, что функция $Q(t,\sigma)$, как функция σ, принадлежит пространству $S^{b_n}_{b_k}$ (при каждом $t>0$). Учитывая (11), (13), условие д) и формулу Лейбница дифференцирования произведения двух функций, получаем

$$|D^s_\sigma Q(t,\sigma)| = \left|\sum_{l=0}^{s} C_s^l D^l_\sigma Q_1(t,\sigma) D^{s-l}_\sigma Q_2(\sigma)\right| \le \tilde{c}_1 A^s \sum_{l=0}^{s} C_s^l \tilde{b}^l t^l l!\rho_l \times$$

$$\times b_1^{s-l}(s-l)!\rho_{s-l} e^{-t\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)} \le \tilde{c}_1 b_2^s t^s s!\rho_s \exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\} \quad \text{при} \quad t>1, \quad \sigma\in\mathbb{R}, \tag{14}$$

где $b_2 = 2\max\{\tilde{b},\, b_1\}$.

Используя формулу $F^{-1}\left[S^{b_n}_{b_k}\right] = S^{b_n}_{b_k}$, находим $G(t,\cdot) = F^{-1}[Q(t,\cdot)] \in S^{b_n}_{b_k}$ при каждом $t\in(0,+\infty)$. Выделим в оценках функции G и ее производных (по переменной x) зависимость от параметра t, если $t>2$. В этом случае имеет место неравенство

$$\exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\} = \exp\left\{-\frac{t}{2}\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\right\}\exp\left\{-\frac{t}{2}\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\right\} \le$$

$$\le \exp\{-\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\}\exp\left\{-\frac{t}{2}\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\right\} = \gamma(a\sigma)\exp\left\{-\frac{t}{2}\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\right\}.$$

Тогда

$$|\sigma^k D^s_\sigma Q(t,\sigma)| \le \tilde{c}_1 b_2^s t^s s!\rho_s \inf_k \frac{b_k}{|a\sigma|^k}|\sigma|^k \exp\left\{-\frac{t}{2}\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\right\} \le$$

$$\le \tilde{c}_1 b_2^s t^s s!\rho_s \left(\frac{1}{a}\right)^k b_k \exp\left\{-\frac{t}{2}\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\right\} =$$

$$= c\tilde{B}^s t^s \tilde{A}^k b_s b_k \exp\left\{-\frac{t}{2}\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\right\}, \qquad c=\tilde{c}_1, \quad \tilde{B}=b_2, \quad \tilde{A}=1/a, \quad \{k,s\}\subset\mathbb{Z}_+. \tag{15}$$

Далее воспользуемся соотношением

$$x^k D^s_x F[g](x) = i^{k+s}F[(\sigma^s g(\sigma))^{(k)}] = i^{k+s}\int_{\mathbb{R}} (\sigma^s g(\sigma))^{(k)} e^{ix\sigma}d\sigma, \qquad \{k,s\}\subset\mathbb{Z}_+, \quad g\in S^{b_n}_{b_k}.$$

Тогда $x^k D_x^s G(t,x) = (2\pi)^{-1} i^{k+s} (-1)^s \int_{\mathbb{R}} (\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)} e^{ix\sigma} d\sigma$. Из ограничений на последовательность $\{\rho_n\}$ следуют неравенства (см. свойство б))

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} \geq c_b^{-1} n^{1-\gamma_1}, \qquad \frac{b_k}{b_{k-1}} \geq c_b^{-1} k^{1-\gamma_1}, \qquad 2\gamma_1 = \theta \leq 1.$$

Отсюда и из результатов, полученных в [1, с. 239], следует, что последовательность $m_{ks} = b_k\, b_s$ удовлетворяет неравенству $ks\dfrac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}} \leq \alpha(k+s)$, $\alpha > 0$. Используя оценки (15) и последнее неравенство, находим

$$\left|(\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)}\right| = \left|\sum_{p=0}^{k} C_k^p (\sigma^s)^{(p)} Q^{(k-p)}(t,-\sigma)\right| \leq$$

$$\leq \left|\sigma^s Q^{(k)}(t,-\sigma)\right| + ks\left|\sigma^{s-1} Q^{(k-1)}(t,-\sigma)\right| + \frac{k(k-1)}{2!} s(s-1)\left|\sigma^{s-2} Q^{k-2}(t,-\sigma)\right| + \ldots \leq$$

$$\leq c\tilde{A}^s \tilde{B}^k b_s t^k b_k \exp\left\{-\frac{t}{2}\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\right\} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{ks}{\tilde{A}\tilde{B}}\frac{m_{s-1,k-1}}{m_{sk}} + \frac{1}{2!}\frac{ks}{\tilde{A}^2\tilde{B}^2}\frac{m_{s-1,k-1}}{m_{sk}}(k-1)(s-1)\frac{m_{s-2,k-2}}{m_{s-1,k-1}} + \ldots\right) \leq$$

$$\leq c\tilde{A}^s \tilde{B}^k t^k b_s b_k \exp\left\{-\frac{t}{2}\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\right\}\left(1 + \frac{\alpha}{\tilde{A}\tilde{B}}(k+s) + \frac{1}{2!}\frac{\alpha^2}{\tilde{A}^2\tilde{B}^2}(k+s)^2 + \ldots\right) \leq$$

$$\leq c\tilde{A}^s \tilde{B}^k t^k b_s b_k \exp\left\{-\frac{t}{2}\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\right\}\exp\left\{\frac{\alpha}{\tilde{A}\tilde{B}}(k+s)\right\} \leq$$

$$\leq \tilde{c} A_1^s B_1^k t^k b_s b_k \exp\{-\tilde{c}_0 t|\sigma|\}, \qquad t \geq 2, \quad \tilde{c}_0 > 0, \quad \text{при} \quad t > 2,$$

где $A_1 = \tilde{A}\exp\left\{\dfrac{\alpha}{\tilde{A}\tilde{B}}\right\}$, $B_1 = \tilde{B}\exp\left\{\dfrac{\alpha}{\tilde{A}\tilde{B}}\right\}$ (здесь учтено, что функция $\tilde{\gamma} = \rho$ удовлетворяет неравенству $\tilde{\gamma}(\sigma) \geq c\exp\{c_0|\sigma|\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$).

Следовательно,

$$\left|x^k D_x^s G(t,x)\right| \leq (2\pi)^{-1}\tilde{c}\tilde{A}_1^s \tilde{B}_1^k t^k b_k b_s \int_{\mathbb{R}} \exp\{-\tilde{c}_0 t|\sigma|\} d\sigma =$$

$$= L\tilde{A}_1^s \tilde{B}_1^k t^{k-1} b_k b_s, \qquad \{k,s\} \subset \mathbb{Z}_+, \quad L > 0.$$

Тогда

$$|D_x^s G(t,x)| \leq Lt^{-1}\tilde{A}_1^s b_s \inf_k \frac{b_k}{(t^{-1}\tilde{B}_1^{-1}|x|)^k} =$$

$$= Lt^{-1}\tilde{A}_1^s b_s \gamma(d_0 t^{-1}|x|) = Lt^{-1}\tilde{A}_1^s b_s \exp\left\{-\ln\tilde{\gamma}(d_0 t^{-1}|x|)\right\},$$

где $d_0 = \tilde{B}_1^{-1}$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Лемма 3. *$G(t,\cdot)$ принадлежит $S_{b_k}^{b_n}$ при каждом $t \in (0,+\infty)$. Функция $G(t,x)$, $t \geq 2$, $x \in \mathbb{R}$, и ее производные (по переменной x) удовлетворяют неравенствам*

$$|D_x^s G(t,x)| \leq Lt^{-1} A_1^s b_s \exp\left\{-\ln\tilde{\gamma}(d_0 t^{-1}|x|)\right\}, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \tag{16}$$

где постоянные $L, A_1, d_0 > 0$ не зависят от t.

Лемма 4. *Функция* $G(t,\cdot)$, $t\in(0,+\infty)$, *как абстрактная функция параметра* t *со значениями в пространстве* $S_{b_k}^{b_n}$, *дифференцируема по* t.

Доказательство. Из свойства непрерывности преобразования Фурье (прямого и обратного) в пространствах типа S следует, что для доказательства леммы достаточно установить, что функция $F[G(t,\cdot)]=Q(t,\cdot)$, как абстрактная функция параметра t со значениями в пространстве $F[S_{b_k}^{b_n}]=S_{b_k}^{b_n}$, дифференцируема по t, т. е. нужно доказать, что предельное соотношение

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma):=\frac{1}{\Delta t}\left[Q(t+\Delta t,\sigma)-Q(t,\sigma)\right]\to\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma),\quad \Delta t\to 0,$$

выполняется в том смысле, что:

1) $D_\sigma^s\Phi_{\Delta t}(\sigma)\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}D_\sigma^s(\varphi(\sigma)Q(t,\sigma))$, $s\in\mathbb{Z}_+$, равномерно на любом отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$;

2) $|D_\sigma^s\Phi_{\Delta t}(\sigma)|\le\bar{c}\bar{B}^s b_s e^{-\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)}$, $s\in\mathbb{Z}_+$, $b_s=s!\rho_s$, где постоянные $\bar{c},\bar{B},a>0$ не зависят от Δt для достаточно малых значений Δt.

Пусть $t>1$ фиксировано. Функция $Q(t,\sigma)$, $t>1$, $\sigma\in\mathbb{R}$, дифференцируема по t в обычном смысле, поэтому согласно теореме Лагранжа о конечных приращениях

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma)=\varphi(\sigma)Q(t+\theta\Delta t,\sigma),\qquad 0<\theta<1,\quad t+\theta\Delta t\le T.$$

Следовательно,

$$D_\sigma^s\Phi_{\Delta t}(\sigma)=\sum_{l=0}^{s}C_s^l D_\sigma^l\varphi(\sigma)D_\sigma^{s-l}Q(t+\theta\Delta t,\sigma)$$

и

$$D_\sigma^s\left(\Phi_{\Delta t}(\sigma)-\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\right)=\sum_{l=0}^{s}C_s^l D_\sigma^l\varphi(\sigma)\left[D_\sigma^{s-l}Q(t+\theta\Delta t,\sigma)-D_\sigma^{s-l}Q(t,\sigma)\right].$$

Поскольку $D_\sigma^{s-l}Q(t+\theta\Delta t,\sigma)-D_\sigma^{s-l}Q(t,\sigma)=D_\sigma^{s-l+1}Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t$, $0<\theta_1<1$, то отсюда и из оценок (14) получаем, что $D_\sigma^{s-l+1}Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t\to 0$, $\Delta t\to 0$, равномерно на каждом отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Тогда и $D_\sigma^s\Phi_{\Delta t}(\sigma)\to D_\sigma^s\left(\dfrac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\right)$ при $\Delta t\to 0$ равномерно на каждом отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$.

Поскольку φ — мультипликатор в пространстве $S_{b_k}^{b_n}$, то (см. [20])

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists c_\varepsilon>0\quad\forall z=\sigma+i\tau\in\mathbb{C}\colon\ |\varphi(z)|\le c_\varepsilon e^{\ln\tilde{\gamma}(\varepsilon\sigma)+\ln\rho(\varepsilon\tau)}.\tag{17}$$

Согласно интегральной формуле Коши

$$\varphi^{(n)}(\sigma)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{\varphi(z)}{(z-\sigma)^{n+1}}dz,\quad n\in\mathbb{Z}_+,$$

где Γ_R — окружность радиуса R с центром в точке $\sigma\in\mathbb{R}$. Тогда с учетом (17) приходим к неравенствам

$$|\varphi^{(n)}(\sigma)|\le\frac{n!}{R^n}\max_{z\in\Gamma_R}|\varphi(z)|\le c_\varepsilon\frac{n!}{R^n}e^{\ln\tilde{\gamma}(\varepsilon(\sigma+R))+\ln\rho(\varepsilon R)}\le$$

$$\le c_\varepsilon n!\inf_R\frac{\rho(\varepsilon R)}{R^n}e^{\ln\tilde{\gamma}(\varepsilon(\sigma+R))}=c_\varepsilon\varepsilon^n n!\rho_n e^{\ln\tilde{\gamma}(\varepsilon(\sigma+R))},\quad \sigma\ge 0.$$

При достаточно больших $\sigma\ge 0$ выполняется неравенство $\varepsilon(\sigma+R)\le(\varepsilon+R)\sigma$. Поскольку функция $\ln\tilde{\gamma}$ монотонно возрастает на $[0,+\infty)$, то при этих значениях σ имеем неравенство $\ln\tilde{\gamma}(\varepsilon(\sigma+R))\le\ln\tilde{\gamma}((\varepsilon+R)\sigma)$. Тогда для всех $\sigma\ge 0$

$$\ln \tilde{\gamma}(\varepsilon(\sigma + R)) \leq \ln \tilde{\gamma}((\varepsilon + R)\sigma) + c_R,\ c_R > 0.$$

Таким образом, $\exp\big\{ \ln \tilde{\gamma}(\varepsilon(\sigma + R))\big\} \leq \tilde{c}_R \exp\big\{ \ln \tilde{\gamma}((\varepsilon + R)\sigma)\big\}$, $\sigma \geq 0$. Далее при заданном $\varepsilon > 0$ считаем, что $R = \varepsilon$. Тогда

$$|\varphi^{(n)}(\sigma)| \leq \tilde{c}_\varepsilon \varepsilon^n n! \rho_n \exp\big\{ \ln \tilde{\gamma}(2\varepsilon\sigma)\big\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{18}$$

Учитывая (18) и оценки, которым удовлетворяют производные функции $Q(t, \sigma)$, находим

$$|D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq \tilde{c}_1 \tilde{c}_\varepsilon \sum_{l=0}^{s} C^l_s \varepsilon^l l! \rho_l b_2^{s-l} t^{s-l} (s-l)! \rho_{s-l} \exp\{\ln \tilde{\gamma}(2\varepsilon\sigma) - (t + \theta\Delta t) \ln \tilde{\gamma}(a\sigma)\} \leq$$

$$\leq \bar{c}\bar{B}^s s! \rho_s \exp\{\ln \tilde{\gamma}(2\varepsilon\sigma) - t \ln \tilde{\gamma}(a\sigma)\} \leq \bar{c}\bar{B}^s s! \rho_s \exp\{\ln \tilde{\gamma}(2\varepsilon\sigma) - \ln \tilde{\gamma}(a\sigma)\},$$

где $\bar{B} = 2\max\{\varepsilon, b_2 t\}$. Возьмем $\varepsilon = a/4$. Из неравенства выпуклости для функции $\ln\tilde{\gamma}$ следует, что $\ln \tilde{\gamma}(2\varepsilon\sigma) - \ln \tilde{\gamma}(a\sigma) \leq -\ln \tilde{\gamma}((a - 2\varepsilon)\sigma) \equiv -\ln \tilde{\gamma}(\bar{a}\sigma)$, $\bar{a} = a - 2\varepsilon = a/2 > 0$. Тогда

$$|D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq \bar{c}\bar{B}^s s! \rho_s \exp\{-\ln\tilde{\gamma}(\bar{a}\sigma)\}, \quad \sigma \geq 0,$$

при этом постоянные $\bar{c}, \bar{B}, \bar{a} > 0$ не зависят от Δt (для достаточно малых значений Δt). Случай $\sigma < 0$ рассматривается аналогично.

Если $t \in (0, 1]$ фиксировано, то доказательство утверждения в этом случае проводится по схеме доказательства в случае $t > 1$; при этом в оценках (14) следует считать $t = 1$. Таким образом, условие 2 также выполняется.

Лемма 4 доказана.

***Следствие* 1.** *Имеет место формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t, x)) = f * \frac{\partial G(t, x)}{\partial t} \quad \forall f \in \left(S^{b_n}_{b_k}\right)', \quad t > 0.$$

Доказательство. Согласно определению свертки обобщенной функции с основной имеем

$$f * G(t, x) = \langle f_\xi, T_{-x}\check{G}(t, \xi)\rangle, \qquad \check{G}(t, \xi) = G(t, -\xi).$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t, \cdot)) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[f * G(t + \Delta t, \cdot) - f * G(t, \cdot)] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\langle f_\xi, \frac{1}{\Delta t}\left[T_{-x}\check{G}(t + \Delta t, \xi) - T_{-x}\check{G}(t, \xi)\right]\right\rangle.$$

Вследствие леммы 4 предельное соотношение

$$\frac{1}{\Delta t}\left[T_{-x}\check{G}(t + \Delta t, \cdot) - T_{-x}\check{G}(t, \cdot)\right] \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \frac{\partial}{\partial t} T_{-x}\check{G}(t, \cdot)$$

выполняется в смысле сходимости по топологии пространства $S^{b_n}_{b_k}$, поэтому с учетом непрерывности функционала f находим

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t, \cdot)) = \left\langle f_\xi, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[T_{-x}\check{G}(t + \Delta t, \xi) - T_{-x}\check{G}(t, \xi)\right]\right\rangle =$$

$$= \left\langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial t} T_{-x}\check{G}(t, \xi)\right\rangle = \left\langle f_\xi, T_{-x}\frac{\partial}{\partial t}\check{G}(t, \xi)\right\rangle = f * \frac{\partial G(t, x)}{\partial t},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 5. *В пространстве* $(S_{b_k}^{b_n})'$ *выполняется предельное соотношение*

$$\mu \lim_{t\to+0} G(t,\cdot) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} G(t,\cdot) = \delta \tag{19}$$

(*здесь* δ — *дельта-функция Дирака*).

Доказательство. Воспользовавшись свойством непрерывности преобразования Фурье и функции $G(t,\cdot)$, как абстрактной функции параметра t со значениями в пространстве $S_{b_k}^{b_n}$, соотношение (19) заменим предельным соотношением

$$\mu \lim_{t\to+0} F[G(t,\cdot)] - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} F[G(t,\cdot)] = F[\delta] \tag{20}$$

в пространстве $(S_{b_k}^{b_n})'$. С учетом представления функции G соотношение (20) запишем в виде

$$\mu \lim_{t\to+0} Q(t,\cdot) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} Q(t,\cdot) = 1. \tag{21}$$

Для доказательства (21) выберем любую функцию $\psi \in S_{b_k}^{b_n}$. Тогда, используя теорему о предельном переходе под знаком интеграла Лебега и понимая $Q(t,\cdot)$ как регулярную обобщенную функцию из пространства $(S_{b_k}^{b_n})'$, получаем

$$\mu \lim_{t\to+0} \langle Q(t,\cdot),\psi\rangle - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} \langle Q(t,\cdot),\psi\rangle =$$

$$= \mu \lim_{t\to+0} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left[\frac{\mu}{\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)} - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \frac{Q_1(t_l,\sigma)}{\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)} \right] \psi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\mu - \sum_{l=1}^{m} \mu_l Q_1(t_l,\sigma)}{\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)} \psi(\sigma)d\sigma = \int\limits_{\mathbb{R}} \psi(\sigma)d\sigma = \langle 1,\psi\rangle.$$

Отсюда следует, что соотношение (21) выполняется в пространстве $(S_{b_k}^{b_n})'$. Этим доказано, что соотношение (19) также имеет место.

Лемма 5 доказана.

Непосредственно убеждаемся в том, что функция G удовлетворяет уравнению (7). Далее функцию G будем называть фундаментальным решением многоточечной (m-точечной) задачи для уравнения (7).

Символом $(S_{b_k,*}^{b_n})'$ обозначим класс обобщенных функций из $(S_{b_k}^{b_n})'$, являющихся свертывателями в пространстве $S_{b_k}^{b_n}$.

Следствие 2. *Пусть* $\omega(t,x) = f * G(t,x)$, $f \in (S_{b_k,*}^{b_n})'$, $(t,x) \in \Omega$. *Тогда в пространстве* $(S_{b_k,*}^{b_n})'$ *выполняется предельное соотношение*

$$\mu \lim_{t\to+0} \omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \omega(t,\cdot) = f. \tag{22}$$

Из следствия 2 (см. (22)) вытекает, что для уравнения (7) m-точечную по времени задачу можно поставить так: найти решение $u \in C^1\big((0,\infty),\ S_{b_k}^{b_n}\big)$ уравнения (7), удовлетворяющее условию

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = f, \quad f \in (S_{b_k,*}^{b_n})'. \tag{23}$$

При этом предельное соотношение (23) рассматривается в пространстве $(S_{b_k}^{b_n})'$ (ограничения на параметры $\mu,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_m,\ t_1,\ \ldots,\ t_m$ такие же, как и в случае задачи (7), (8)).

Теорема 1. *Нелокальная многоточечная по времени задача* (7), (23) *корректно разрешима. Решение дается формулой* $u(t,x) = f * G(t,x),\ (t,x)\in\Omega$, *где* G — *фундаментальное решение многоточечной задачи для уравнения* (7).

Доказательство. Прежде всего убедимся в том, что функция $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению (7). Действительно (см. следствие 1),

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,x)) = f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t}, A_\varphi u(t,x) = F^{-1}[\varphi(\sigma)F[f*G(t,x)](\sigma)](x).$$

Поскольку f — свертыватель в пространстве $S_{b_k}^{b_n}$, то $F[f*G(t,x)](\sigma) = F[f]F[G(t,x)](\sigma) = F[f](\sigma)Q(t,\sigma)$. Следовательно,

$$A_\varphi u(t,x) = F^{-1}[\varphi(\sigma)Q(t,\sigma)F[f](\sigma)](x) = F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)F[f](\sigma)\right](x) =$$

$$= F^{-1}\left[F\left[\frac{\partial}{\partial t}G\right](t,\sigma)\, F[f](\sigma)\right](x) = F^{-1}\left[F\left[f * \frac{\partial G}{\partial t}\right]\right](x) = f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t}.$$

Отсюда получаем, что функция $u(t,x),\ (t,x)\in\Omega$, удовлетворяет уравнению (7). Из следствия 2 вытекает, что u удовлетворяет предельному условию (23) в указанном смысле.

Отметим также, что u непрерывно зависит от функции $f \in (S_{b_k,*}^{b_n})'$ в силу непрерывности операции свертки.

Осталось убедиться в том, что задача (7), (23) имеет единственное решение. Для этого рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A_\varphi^* v = 0, \qquad (t,x)\in[0,t_0)\times\mathbb{R} \equiv \Omega', \quad 0 \le t < t_0 < \infty, \tag{24}$$

$$v(t,\cdot)|_{t=t_0} = \psi, \quad \psi \in (S_{b_k,*}^{b_n})', \tag{25}$$

где $A_\varphi^* g = F[\varphi F^{-1}[g]]\ \forall g \in S_{b_k}^{b_n},\ A_\varphi^*$ — сужение сопряженного оператора к оператору A_φ на пространство $S_{b_k}^{b_n} \subset (S_{b_k}^{b_n})'$. Условие (24) понимаем в слабом смысле. Задача Коши (24), (25) разрешима, при этом $v(t,\cdot)$ принадлежит $S_{b_k}^{b_n}$ при каждом $t\in[0,t_0)$.

Пусть $Q_{t_0}^t : (S_{b_k,*}^{b_n})' \to S_{b_k}^{b_n}$ — оператор, ставящий функционалу $\psi \in (S_{b_k,*}^{b_n})'$ в соответствие решение задачи (24), (25). Оператор $Q_{t_0}^t$ является линейным и непрерывным, определен при любых t и t_0 таких, что $0 \le t < t_0 < \infty$, и имеет свойства

$$\forall\psi \in (S_{b_k,*}^{b_n})':\ \frac{dQ_{t_0}^t\psi}{dt} + A_\varphi^* Q_{t_0}^t\psi = 0, \qquad \lim_{t\to t_0} Q_{t_0}^t\psi = \psi$$

(предел рассматривается в пространстве $(S_{b_k}^{b_n})'$).

Рассмотрим решение $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задачи (7), (23), которое будем понимать как регулярный функционал в пространстве $(S_{b_k,*}^{b_n})' \supset S_{b_k}^{b_n}$. Докажем, что задача (7), (23) имеет единственное решение в пространстве $(S_{b_k,*}^{b_n})'$. Для этого достаточно показать, что единственным решением уравнения (7) при нулевом начальном условии может быть только функционал $u(t,x) \equiv 0$ (при каждом $t \in (0,\infty)$). Применим функционал u к функции $Q_{t_0}^t \psi \in S_{b_k}^{b_n}$, где ψ — произвольно фиксированный элемент из пространства $S_{b_k}^{b_n} \subset (S_{b_k,*}^{b_n})'$. Дифференцируя по t и используя уравнения (7), (23), находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t\psi\rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, Q_{t_0}^t\psi \right\rangle + \left\langle u, \frac{\partial Q_{t_0}^t\psi}{\partial t} \right\rangle =$$
$$= \langle A_\varphi u, Q_{t_0}^t\psi\rangle - \langle u, A_\varphi^* Q_{t_0}^t\psi\rangle = \langle A_\varphi u, Q_{t_0}^t\psi\rangle - \langle A_\varphi u, Q_{t_0}^t\psi\rangle = 0, \quad t \in [0,t_0).$$

Отсюда получаем, что $\langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t\psi\rangle$ — постоянная величина. Из свойств абстрактных функций следует соотношение $\lim_{t\to t_0}\langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t\psi\rangle = \langle u(t_0,\cdot),\psi\rangle = \mathrm{const} \equiv c$ в любой точке $t_0 \in \in (0,\infty)$. Следовательно, если в (23) $f=0$, то

$$\mu \lim_{t\to+0}\langle u(t,\cdot),\psi\rangle - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t\to t_k}\langle u(t,\cdot),\psi\rangle = c\left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k\right) = 0,$$

т. е. $c=0$. Таким образом, $\langle u(t_0,\cdot),\psi\rangle = 0$ для любого $\psi \in S_{b_k}^{b_n}$, т. е. $u(t_0,x)$ — нулевой функционал в пространстве $(S_{b_k}^{b_n})'$. Поскольку $t_0 \in (0,\infty)$ и t_0 выбрано произвольным образом, то $u(t,x) = 0$ для всех $t \in (0,+\infty)$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Решение* $u(t,x)$ *нелокальной многоточечной по времени задачи* (7), (23) *сходится к нулю при* $t \to +\infty$ *в пространстве* $(S_{b_k}^{b_n})'$.

Доказательство. Напомним, что решение задачи (7), (23) дается формулой

$$u(t,x) = f * G(t,x) = \langle f_\xi, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle = \langle f_\xi, G(t,x-\xi)\rangle,$$

где G — фундаментальное решение указанной задачи, $\check{G}(t,\xi) = G(t,-\xi)$, T_{-x} — оператор сдвига аргумента в пространстве $S_{b_k}^{b_n}$. Пусть $\psi \in S_{b_k}^{b_n}$. Положим

$$\psi_t(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,x-\xi)\psi(x)dx, \qquad \psi_{t,R}(\xi) = \int_{-R}^{R} G(t,x-\xi)\psi(x)dx, \quad R > 0.$$

В этих обозначениях докажем, что: а) при каждом $t \geq 2$ и любом $R > 0$ функция $\psi_{t,R}(\xi)$ принадлежит пространству $S_{b_k}^{b_n}$, $\psi_{t,R}(\xi) \to \psi_t(\xi)$ при $R \to +\infty$ в пространстве $S_{b_k}^{b_n}$; б) $\psi_t(\xi)$ принадлежит $S_{b_k}^{b_n}$ при каждом $t \geq 2$. Отсюда следуют соотношения

$$\langle u(t,x),\psi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\langle f_\xi, G(t,x-\xi)\rangle\psi(x)dx = \left\langle f_\xi, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,x)\psi(x+\xi)dx \right\rangle =$$

$$= \left\langle f_\xi, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,-y)\psi(-(y-\xi))dy \right\rangle = \left\langle f_\xi, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,-y)\check{\varphi}(y-\xi)dy \right\rangle, \quad \check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$$

(здесь $u(t,\cdot)$ понимается как регулярная обобщенная функция из пространства $(S_{b_k}^{b_n})'$ при каждом $t>0$).

Итак, докажем пункт а). При фиксированных $\{k,n\}\subset\mathbb{Z}_+$ имеем

$$\left|\xi^k D_\xi^n \psi_{t,R}(\xi)\right| \le \int\limits_{-R}^{+R} \left|\xi^k\psi(x) D_\xi^n G(t,x-\xi)\right| dx \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\xi^k\psi(\xi+\eta) D_\eta^n G(t,\eta)\right| d\eta.$$

Поскольку ψ принадлежит $S_{b_k}^{b_n}$, то при некоторых $c_1,L_1,M_1>0$ выполняются неравенства $\left|\xi^k D_\xi^n\psi(\xi)\right| \le c_1 L_1^k M_1^n b_k b_n$, $\{k,n\}\subset\mathbb{Z}_+$. Отсюда при каждом $\eta\in\mathbb{R}$ получаем оценки

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\xi^k\psi(\xi+\eta)\right| = \sup_{y\in\mathbb{R}}\left|(y-\eta)^k\psi(y)\right| = \sup_{y\in\mathbb{R}}\left|\sum_{l=0}^k C_k^l y^l(-\eta)^{k-l}\psi(y)\right| \le$$
$$\le \sum_{l=0}^k C_k^l|\eta|^{k-l}\sup_{y\in\mathbb{R}}|y^l\psi(y)| \le c_1 b_0\sum_{l=0}^k C_k^l L_1^l b_l|\eta|^{k-l}.$$

Далее воспользуемся оценками (16). Тогда

$$\left|\xi^k D_\xi^n\psi_{t,R}(\xi)\right| \le c_1 b_0\sum_{l=0}^k C_k^l L_1^l b_l\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\eta^{k-l}D_\eta^n G(t,\eta)|d\eta \le$$
$$\le c_1 b_0 L t^{-1}A_1^n b_n\sum_{l=0}^k C_k^l L_1^l b_l\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\eta|^{k-l}\exp\left\{-\ln\tilde{\gamma}(d_0 t^{-1}|\eta|)\right\}d\eta.$$

Выполняя замену переменной интегрирования $d_0t^{-1}\eta=z$, приходим к соотношению

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\eta|^{k-l}\exp\left\{-\ln\tilde{\gamma}(d_0t^{-1}|\eta|)\right\}d\eta = (d_0^{-1}t)^{k-l+1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|z|^{k-l}\exp\left\{-\ln\tilde{\gamma}(z)\right\}dz.$$

Используя свойство выпуклости функции $\ln\tilde{\gamma}$, находим

$$\exp\{-\ln\tilde{\gamma}(z)\} \le \exp\left\{-\ln\tilde{\gamma}\left(\frac{z}{2}\right)\right\}\exp\left\{-\ln\tilde{\gamma}\left(\frac{z}{2}\right)\right\} =$$
$$= \gamma\left(\frac{z}{2}\right)\exp\left\{-\ln\tilde{\gamma}\left(\frac{z}{2}\right)\right\} \le \tilde{c}_0\gamma\left(\frac{z}{2}\right)\exp\left\{-\tilde{c}|z|\right\}, \quad \tilde{c}_0,\ \tilde{c}>0.$$

Тогда

$$I_{k-l} := \int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\eta|^{k-l}\exp\left\{-\ln\tilde{\gamma}(d_0t^{-1}|\eta|)\right\}d\eta \le$$
$$\le \tilde{c}_0(d_0^{-1}t)^{k-l+1}\sup_z\left(|z|^{k-l}\gamma\left(\frac{z}{2}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\tilde{c}|z|\right\}\right)dz.$$

Поскольку $|z|^{k-l}\gamma\left(\dfrac{z}{2}\right) = |z|^{k-l}\inf\dfrac{b_{k-l}}{|z/2|^{k-l}} \le 2^k b_{k-l},\ |z| \ge 1,\ l \in \{0,1,\ldots,k\}$, то I_{k-l} оценивается следующим образом: $I_{k-l} \le \tilde{c}_0\alpha t^{k+1}(2\tilde{d}_0)^k b_{k-l},\ t \ge 2,\ l \in \{0,1,\ldots,k\}$, где $\bar{d}_0 = \max\{d_0^{-1},1\},\ \alpha = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-\tilde{c}|z|\}\,dz$. Учитывая свойство д) последовательности $\{b_k\}$, имеем

$$\left|\xi^k D_\xi^n\psi_{t,R}(\xi)\right| \le \tilde{c}_0 c_1\alpha b_0 L(2\tilde{d}_0 t)^k A_1^n b_n \sum_{l=0}^{k} C_k^l L_1^l b_l\, b_{k-l} \le$$

$$\le N\tilde{L}^n A_1^n b_n(2\tilde{d}_0 t)^k\, b_k \sum_{l=0}^{k} C_k^l L_1^l = NA_2^n B_2^k b_n b_k, \tag{26}$$

где $N = c_1\tilde{c}_0\alpha b_0 LA,\ A_2 = \tilde{L}A_1,\ B_2 = 4\tilde{d}_0 t\max\{1,L_1\}$, откуда получаем, что $\psi_{t,R}(\xi)$ принадлежит $S_{b_k}^{b_n}$ при каждом $t \ge 2$ и $R > 0$. Далее непосредственно убеждаемся в том, что $\psi_{t,R}(\xi) \to \psi_t(\xi)$ при $R \to +\infty$ равномерно по ξ вместе со всеми своими производными на каждом отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Кроме того, совокупность функций $\xi^k D_\xi^n\psi_{t,R}(\xi),\ \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+$, равномерно ограничена в пространстве $S_{b_k}^{b_n}$ (это свойство следует из оценок (26), в которых постоянные $N,\ A_2,\ B_2 > 0$ не зависят от R). Это и означает, что условие а) выполняется.

Из условия а) следует условие б), поскольку в совершенном пространстве каждое ограниченное множество компактно.

Используя свойства а), б), приходим к соотношению

$$\langle u(t,\cdot),\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,-y)(f*\check{\psi})(y)dy, \quad \psi \in S_{b_k}^{b_n}.$$

Поскольку функционал f — свертыватель в пространстве $S_{b_k}^{b_n}$, то $f*\check{\psi} \in S_{b_k}^{b_n}$. Отсюда, в частности, получаем $|(f*\check{\psi})(y)| \le c\exp\{-\ln\tilde{\gamma}(ay)\},\ y \in \mathbb{R}$, с некоторыми постоянными $c,\ a > 0$. Учитывая последнее неравенство и оценки (16), приходим к выводу, что

$$|\langle u(t,\cdot),\psi\rangle| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,-y)|\,|(f*\check{\psi})(y)|dy \le$$

$$\le Lb_0 ct^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\ln\tilde{\gamma}(d_0 t^{-1}y)\right\}\exp\left\{-\ln\tilde{\gamma}(ay)\right\}dy \le$$

$$\le \tilde{b}t^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\ln\tilde{\gamma}(ay)\right\}dy = b't^{-1}.$$

Перейдем здесь к пределу при $t \to +\infty$; в результате получим, что $\langle u(t,\cdot),\psi\rangle \to 0$ при $t \to +\infty$ для любой функции $\psi \in S_{b_k}^{b_n}$, что и требовалось доказать.

Далее будем рассматривать обобщенные функции, заданные на неквазианалитическом классе основных функций. Такой класс содержит бесконечно дифференцируемые финитные функции. В частности, для произвольных непересекающихся промежутков $[a_1,b_1]$ и $[a_2,b_2]$ найдется основная функция, равная единице на $[a_1, b_1]$ и нулю на $[a_2, b_2]$. Рассмотрим последовательность $\{\tilde{b}_n,\ n \in \mathbb{Z}_+\}$, удовлетворяющую условию $b_n \le \tilde{b}_n\ \forall n \in \mathbb{Z}_+$, где $\{b_n = n!\rho_n\}$ — последовательность, рассмотренная ранее. Считаем также, что для последовательности $\{\tilde{b}_n\}$ выполняется аналог условия д). При этом имеют место непрерывные вложения $S_{b_k}^{b_n} \in S_{b_k}^{\tilde{b}_n} \subset (S_{b_k}^{\tilde{b}_n})' \subset \subset (S_{b_k}^{b_n})'$. Согласно теореме Карлемана – Островского (см., например, [2, с. 125]), класс $S_{b_k}^{\tilde{b}_n}$ неквазианалитический тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln T(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda < +\infty, \qquad T(\lambda) = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{\lambda^n}{\tilde{b}_n}. \tag{27}$$

Далее будем предполагать, что последовательность $\{\tilde{b}_n\}$ такова, что соответствующая функция $T(\lambda)$ удовлетворяет условию (27).

Например, если $\tilde{b}_n = n^{n\beta_1}$ $(\beta_1 > \beta)$, то $T(\lambda) \sim \exp\{\lambda^{1/\beta_1}\}$ и интеграл (27) сходится при $\beta_1 > 1$. Следовательно, класс $S_{k^{k\beta}}^{n^{n\beta_1}}$, $0 < \beta < 1$, неквазианалитический, если $\beta_1 > 1$.

Если обобщенная функция f в условии (23) финитная (т. е. носитель $(\operatorname{supp} f)$ — ограниченное множество в $\mathbb{R}$), то можно говорить о равномерной стабилизации к нулю решения задачи (7), (23) при $t \to +\infty$. Отметим также, что каждая финитная обобщенная функция — свертыватель в пространстве $S_{b_k}^{\tilde{b}_n}$. Это свойство следует из общего результата, относящегося к теории совершенных пространств (см. [1, с. 173]): если Φ — совершенное пространство с дифференцируемой операцией сдвига, то каждый финитный функционал — свертыватель в пространстве Φ. Финитные обобщенные функции составляют довольно широкий класс; в частности, каждое ограниченное замкнутое множество $F \subset \mathbb{R}$ является носителем некоторой обобщенной функции.

Теорема 3. *Пусть $u(t,x)$ — решение задачи* (7), (23) *с функцией f в условии* (23), *принадлежащей пространству* $(S_{b_k}^{\tilde{b}_n})' \subset (S_{b_k}^{b_n})'$, $\operatorname{supp} f$ — *ограниченное множество в* $\mathbb{R}$. *Тогда $u(t,x)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$ равномерно на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{supp} f \subset [a_1, b_1] \subset [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}$. Рассмотрим функцию $\psi \in S_{b_k}^{\tilde{b}_n}$ такую, что $\psi(x) = 1$ для $x \in [a_1, b_1]$, $\operatorname{supp} \psi \subset [a_2, b_2]$. Такая функция существует, поскольку пространство $S_{b_k}^{\tilde{b}_n}$ содержит финитные функции. Функции $\psi(\xi)G(t, x-\xi)$, $(1 - \psi(\xi))G(t,\, x - \xi)$, как функции ξ, принадлежат пространству $S_{b_k}^{\tilde{b}_n}$ (при каждом $t > 0$ и $x \in \mathbb{R}$), поэтому

$$u(t,x) = \big\langle f_\xi, \psi(\xi)G(t, x-\xi)\big\rangle + \big\langle f_\xi, \gamma(\xi)G(t, x-\xi)\big\rangle,$$

где $\gamma(\xi) = 1 - \psi(\xi)$. Второе слагаемое в этом равенстве равно нулю, так как $\operatorname{supp}(\gamma(\xi)G(t, x-\xi)) \cap \operatorname{supp} f = \varnothing$. Следовательно, $u(t,x) = t^{-1}\langle f_\xi, t\psi(\xi)G(t, x-\xi)\rangle$. Таким образом, для доказательства сформулированного утверждения достаточно показать, что совокупность функций $\Phi_{t,x}(\xi) = t\psi(\xi)G(t, x-\xi)$ ограничена в пространстве $S_{b_k}^{\tilde{b}_n}$ для больших значений t и $x \in \mathbb{R}$, т. е.

$$|D_\xi^n \Phi_{t,x}(\xi)| \le cB^n \tilde{b}_n \exp\left\{-\ln\tilde{\gamma}(a\xi)\right\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{28}$$

где постоянные c, B, $a > 0$ не зависят от t, x и ξ, изменяющихся указанным способом. Неравенства (28) достаточно установить только для $\xi \in [a_2, b_2]$, так как $\Phi_{t,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in \mathbb{R} \setminus [a_2, b_2]$.

Поскольку ψ принадлежит $S_{b_k}^{\tilde{b}_n}$, то $|D_\xi^n \psi(\xi)| \leq c_1 B_1^n \tilde{b}_n \exp\{-\ln\tilde{\gamma}(a_1\xi)\}$, $\xi \in \mathbb{R}$, с некоторыми постоянными $c_1, B_1, a_1 > 0$. Отсюда и из оценок (16) следуют неравенства

$$|D_\xi^n \Phi_{t,x}(\xi)| \leq t \left| \sum_{l=0}^n C_n^l D_\xi^l \psi(\xi) D_\xi^{n-l} G(t, x-\xi) \right| \leq$$

$$\leq c_1 L \exp\left\{-\ln\tilde{\gamma}(d_0 t^{-1}|x-\xi|) - \ln\tilde{\gamma}(a_1\xi)\right\} \sum_{l=0}^n C_n^l B_1^l \tilde{b}_l A_1^{n-l} b_{n-l}.$$

Поскольку

$$\exp\left\{-\ln\tilde{\gamma}(d_0 t^{-1}|x-\xi|\right\} \leq 1, \qquad t \geq 2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \xi \in [a_2, b_2], \qquad b_{n-l} \leq \tilde{b}_{n-l},$$
$$\tilde{b}_l\, \tilde{b}_{n-l} \ \leq A\tilde{L}^n \tilde{b}_n, \quad A,\ \tilde{L} > 0,$$

то

$$|D_\xi^n \Phi_{t,x}(\xi)| \leq \tilde{c}\tilde{B}^n \tilde{b}_n \exp\{-\ln\tilde{\gamma}(a_1\xi)\},$$

где $\tilde{c} = c_1 L A$, $\tilde{B} = 2\tilde{L}\max\{B_1, A_1\}$, причем все постоянные не зависят от t, x, ξ, изменяющихся указанным способом.

Теорема 3 доказана.

В качества примера рассмотрим нелокальную многоточечную по времени задачу для уравнения (7) с оператором A_φ, построенным по функции $\varphi(\sigma) = -\sigma^2$. В этом случае, как уже отмечалось ранее, $A_\varphi = d^2/dx^2$, а уравнение (7) является уравнением теплопроводности. Поскольку $|e^{-z^2}| = |e^{-(\sigma+iy)^2}| = e^{-\sigma^2+y^2}$, то в неравенстве (13) для функции $\varphi(z) = e^{-z^2}$ постоянная $c_0 = 1$, т. е. условие $c_0 \leq 1$ выполняется. В силу теоремы 1 нелокальная m-точечная по времени задача в полупространстве $t > 0$ для уравнения теплопроводности корректно разрешима, если f принадлежит $(S_{1/2,*}^{1/2})'$. Используя представление функции $Q_2(\sigma)$ в случае уравнения теплопроводности, находим

$$G(t,x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} Q_1(t,\sigma) Q_2(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-t\sigma^2} \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k e^{-t_k\sigma^2}\right)^{-1} e^{i\sigma x} d\sigma =$$

$$= (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-t\sigma^2} \sum_{r=0}^\infty \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}}{r_1!\ldots r_m!} e^{-(t_1r_1+\ldots+t_mr_m)\sigma^2} e^{i\sigma x} d\sigma =$$

$$= \sum_{r=0}^\infty \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}}{r_1!\ldots r_m!} \tilde{G}(t_1r_1+\ldots+t_mr_m+t, x),$$

$\tilde{G}(\lambda, x)$, $\lambda = t_1r_1+\ldots+t_mr_m+t$, — фундаментальное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности, т. е. $\tilde{G}(\lambda,x) = \left(2\sqrt{\pi\lambda}\right)^{-1}\exp\left\{-x^2/(4\lambda)\right\}$. В частности, если $f = \delta \in \in \left(S_{1/2,*}^{1/2}\right)'$, то $u(t,x) = \delta * G(t,x) = G(t,x)$. Поскольку $\operatorname{supp}\delta = \{0\}$, то в силу теоремы 3 $u(t,x) \to 0$ при $t \to +\infty$ равномерно на $\mathbb{R}$. Если $m = 1$ (случай двухточечной задачи), $f = \delta \in (S_{1/2,*}^{1/2})$, то

$$u(t,x) = \frac{1}{2\mu} \sum_{r=0}^\infty \left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)^r \frac{1}{\sqrt{\pi(t+rt_1)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4(t+rt_1)}\right\}, \quad \mu > \mu_1.$$

Литература

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
2. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
3. *Gorbachuk M. L., Gorbachuk V. I.* Boundary value problems for operator differential equations. – Dordrecht etc.: Kluwer, 1991. – 374 p.
4. *Кашпировский А. И.* Граничные значения решений некоторых классов однородных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве: Автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1981. – 18 с.
5. *Горбачук М. Л., Дудников П. И.* О начальных данных задачи Коши для параболических уравнений, при которых решения бесконечно дифференцируемы // Докл. АН СССР. Сер. А. – 1981. – № 4. – С. 9 – 11.
6. *Городецький В. В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 225 с.
7. *Городецький В. В.* Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 219 с.
8. *Городецький В. В.* Еволюційні рівняння в зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. – Чернівці: Рута, 2008. – 400 с.
9. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.
10. *Белавин И. А., Капица С. П., Курдюмов С. П.* Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1998. – **38**, № 6. – С. 885 – 902.
11. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач. – М.: Наука, 1980. – 208 с.
12. *Романко В. К.* Граничные задачи для одного класса дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. – 1974. – **10**, № 11. – С. 117 – 131.
13. *Романко В. К.* Нелокальные граничные задачи для некоторых систем уравнений // Мат. заметки. – 1985. – **37**, № 7. – С. 727 – 733.
14. *Макаров А. А.* Существование корректной двухточечной краевой задачи в слое для систем псевдодифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**, № 1. – С. 144 – 150.
15. *Чесалин В. И.* Задача с нелокальными граничными условиями для абстрактных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1979. – **15**, № 11. – С. 2104 – 2106.
16. *Ильків В. С., Пташник Б. И.* Некоторая нелокальная двухточечная задача для систем уравнений с частными производными // Сиб. мат. журн. – 2005. – **46**, № 1. – С. 119 – 129.
17. *Lazetic N. L.* On classical solutions of mixed boundary problems for one-demensional parabolic equation of second order // Publ. Inst. Math. – 2000. – **67**. – P. 53 – 75.
18. *Chabrowski J.* On the non-local problems with a functional for parabolic equation // Funkc. ekvacioj. – 1984. – **27**. – P. 101 – 123.
19. *Bouziani A., Benouar N. E.* Probleme mixed avec conditions integrales pour une class d'equations paraboliques // C. r. Acad. sci. Ser. J. – 1995. – **321**. – P. 1177 – 1182.
20. *Городецкий В. В., Мартынюк О. В.* Операторы обобщенного дифференцирования Гельфонда – Леонтьева в пространствах типа S // Сиб. мат. журн. – 2013. – **54**, № 3. – С. 569 – 584.
21. *Гуревич Б. Л.* Некоторые пространства основных и обобщенных функций и проблема Коши для конечно-разностных схем // Докл. АН СССР. – 1954. – **99**, № 6. – С. 893 – 896.
22. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.
23. *Готинчан Т. І., Атаманюк Р. М.* Різні форми означення просторів типу W // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – Чернівці: Рута, 2001. – Вип. 111. – С. 21 – 26.

Получено 14.04.17