УДК 517.927

Г. О. Маслюк (Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, Київ),
В. А. Михайлець (Ін-т математики НАН України, Київ)

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ЗА ПАРАМЕТРОМ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОВИМІРНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ У ПРОСТОРАХ СЛОБОДЕЦЬКОГО

We introduce the most general class of linear boundary-value problems for systems of ordinary differential equations of order $r \geq 2$ whose solutions belong to the Slobodetsky space $W_p^{s+r}\big((a,b),\mathbb{C}^m\big)$, where $m \in \mathbb{N},\ s > 0$ and $p \in (1,\infty)$. We also establish sufficient conditions under which the solutions of these problems are continuous functions of the parameter in the Slobodetsky space $W_p^{s+r}\big((a,b),\mathbb{C}^m\big)$.

Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $r \geq 2$ введен наиболее широкий класс линейных краевых задач, решения которых принадлежат комплексному пространству Слободецкого $W_p^{s+r}\big((a,b),\mathbb{C}^m\big)$, где $m \in \mathbb{N},\ s > 0$ и $p \in (1,\infty)$. Найдены достаточные условия, при которых решения этих задач однозначно определены и непрерывно зависят от параметра в пространстве Слободецкого $W_p^{s+r}\big((a,b),\mathbb{C}^m\big)$.

1. Вступ. Питання, пов'язані з граничним переходом у системах диференціальних рівнянь, виникають у багатьох задачах аналізу та його застосувань. Ці питання найкраще досліджено стосовно задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Більш складний випадок загальних лінійних крайових задач вивчав І. Т. Кігурадзе [1, 2]. У роботах [3, 4] отримано суттєві узагальнення цих результатів. Вони стосуються неперервності за параметром розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Для систем лінійних диференціальних рівнянь високого порядку ці питання досліджено в [4, 5].

Найбільш широкий клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку щодо комплексних просторів Гельдера та просторів Слободецького введено і досліджено в [6, 7]. Для залежних від параметра задач із вказаних класів отримано конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків у цих просторах.

Граничний перехід для широких класів лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь високих порядків у просторах Соболєва, просторах неперервно диференційовних функцій та просторах Гельдера обґрунтовано у роботах [8 – 10]. Такі задачі названо тотальними щодо вказаних функціональних просторів. Доведено фредгольмовість цих задач, знайдено достатні умови їх коректної розв'язності та неперервної залежності за параметром їх розв'язків у вказаних просторах.

Мета даної роботи – поширити вказані результати на системи диференціальних рівнянь вищих порядків у просторах Слободецького.

Варто зазначити, що використаний у роботі підхід можна застосувати і для інших функціональних просторів.

2. Постановка задачі. Нехай задано скінченний інтервал $(a,b) \subset \mathbb{R}$ і числа

$$p \in (1,\infty), \quad m \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}_+, \quad s := [s] + \{s\},$$

де $[s] \in \mathbb{Z}_+$ – ціла частина числа, а $\{s\} \in (0,1)$ – дробова частина. Будемо використовувати комплексні простори Слободецького $W_p^s := W_p^s\big((a,b),\mathbb{C}\big)$, $(W_p^s)^m := W_p^s\big((a,b),\mathbb{C}^m\big)$

та $(W_p^s)^{m\times m} := W_p^s\big((a,b),\mathbb{C}^{m\times m}\big)$, що складаються відповідно з функцій, вектор-функцій і матриць-функцій.

Простір Слободецького W_p^s з нецілим додатним s означається [11] (п. 2.5.1, зауваження 4) як простір функцій f, які належать простору Соболєва $W_p^{[s]}$ і додатково задовольняють умову

$$\|f\|_{s,p} := \|f\|_{[s],p} + \left(\int\limits_a^b\int\limits_a^b \frac{|f^{([s])}(x) - f^{([s])}(y)|^p}{|x-y|^{1+\{s\}p}}\,dx\,dy\right)^{1/p} < +\infty,$$

де $\|f\|_{[s],p}$ — норма у просторі Соболєва $W_p^{[s]}$. Тут, звісно, $W_p^0 := L_p$. Функціонал $\|f\|_{s,p}$ є нормою на просторі W_p^s.

Розглянемо лінійну крайову задачу для систем m диференціальних рівнянь r-го порядку на інтервалі (a,b)

$$Ly(t) \equiv y^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t)y^{(r-j)}(t) = f(t), \quad t\in(a,b), \tag{1}$$

$$B_j y(\cdot) = c_j, \quad j\in\{1,\ldots,r\}. \tag{2}$$

Тут вектор-функція $y(\cdot)\in(W_p^{s+r})^m$ є шуканою, а всі матриці-функції $A_{r-j}(\cdot)\in(W_p^s)^{m\times m}$, вектор-функція $f(\cdot)\in(W_p^s)^m$, лінійний неперервний оператор

$$B_j\colon (W_p^{s+r})^m \to \mathbb{C}^m \tag{3}$$

і вектор $c_j\in\mathbb{C}^m$ є заданими. Вектори і вектор-функції вважаємо поданими у вигляді стовпців.

Крайова умова (2) з неперервним оператором (3) є найбільш загальною для рівняння (1), розв'язок якого належить простору $(W_p^{s+r})^m$. Вона охоплює як усі класичні види крайових умов (задачі Коші, багатоточкові умови, інтегральні умови, умови мішаних крайових задач), так і некласичні умови, що містять похідні аж до порядку $r+[s]\ge r$.

За аналогією з роботами [8 – 10] задачу (1), (2) називаємо тотальною щодо функціональних просторів W_p^{s+r}.

Якщо крайова задача (1), (2) залежить від малого параметра $\varepsilon\ge 0$, то постає важливе питання про неперервну залежність розв'язку $y = y(\cdot,\varepsilon)$ такої задачі за параметром ε у банаховому просторі $(W_p^{s+r})^m$, тобто коли

$$\big\|y(\cdot,\varepsilon) - y(\cdot,0)\big\|_{s+r,p} \to 0 \qquad \text{при} \quad \varepsilon\to 0+\,. \tag{4}$$

Основна мета даної роботи полягає у знаходженні конструктивних достатніх умов для однозначної розв'язності цих задач для малих $\varepsilon>0$ і виконання граничної властивості (4). Вони наведені в теоремах 2 і 3.

3. Основні результати. Сформулюємо результати статті. Їх доведення наведено в пп. 4, 5.

Крайову задачу (1), (2) коротко запишемо у вигляді операторного рівняння

$$(L,B)y = (f,c), \qquad B=(B_1,\ldots,B_r), \quad c=(c_1,\ldots,c_r),$$

де (L,B) — лінійний оператор у парі банахових просторів

$$(L,B)\colon (W_p^{s+r})^m \to (W_p^s)^m\times\mathbb{C}^{rm}. \tag{5}$$

Нагадаємо, що лінійний неперервний оператор $B\colon E_1 \to E_2$, де E_1 і E_2 — банахові простори, називають фредгольмовим, якщо його ядро $\ker B$ і коядро $E_2/B(E_1)$ скінченновимірні. Якщо цей оператор фредгольмовий, то його область значень $B(E_1)$ замкнена в E_2 (див., наприклад, [12], лема 19.1.1). Індекс фредгольмового оператора B визначається за формулою

$$\operatorname{ind} B := \dim\ker B - \dim\big(E_2/B(E_1)\big) \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 1. *Лінійний оператор* (5) *обмежений і фредгольмовий з індексом нуль.*

Позначимо через $Y_k(\cdot) \in (W_p^{s+r})^{m\times m}$ єдиний розв'язок відповідного рівнянню (1) лінійного однорідного диференціального рівняння

$$Y_k^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) Y_k^{(r-j)}(t) = 0, \quad t \in (a,b), \tag{6}$$

$$Y_k^{(j)}(t_0) = \delta_{k,j} I_m, \quad k, j \in \{0, \ldots, r-1\}. \tag{7}$$

У початкових умовах (7) точка $t_0 \in (a,b)$ фіксована, $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера, а I_m — одинична матриця порядку $m\times m$. Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння (1) з $f\equiv 0$ можна записати у вигляді

$$y(\cdot) = \sum_{k=0}^{r-1} Y_k(\cdot) q_k, \tag{8}$$

де вектор-стовпці $q_k \in \mathbb{C}^m$ довільні.

Числова квадратна матриця $[BY]$ порядку $rm\times rm$ утворюється в результаті дії оператора $B = (B_1, \ldots, B_r)$ на відповідний стовпець (з тим же номером) матриці-функції $Y = (Y_0, \ldots, Y_{r-1})$. Покладемо

$$[BY] := \big([B_1 Y_0]\ \ldots\ [B_r Y_{r-1}]\big). \tag{9}$$

Теорема 2. *Оператор* (L, B) *оборотний тоді і тільки тоді, коли матриця* $[BY]$ *є невиродженою, тобто* $\det[BY] \neq 0$.

Розглянемо тепер сім'ю крайових задач вигляду (1), (2), залежних від числового параметра ε:

$$L(\varepsilon) y(t,\varepsilon) \equiv y^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t,\varepsilon) y^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad t\in(a,b), \tag{10}$$

$$B_j(\varepsilon) y(\cdot,\varepsilon) = c_j(\varepsilon), \quad j \in \{1, \ldots, r\}, \tag{11}$$

де $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, а число $\varepsilon_0 > 0$ є фіксованим. Тут вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{s+r})^m$ є невідомою, а всі $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^s)^{m\times m}$, $f(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^s)^m$, лінійний неперервний оператор $B_j(\varepsilon)\colon (W_p^{s+r})^m \to \mathbb{C}^m$ і $c_j(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ — заданими. Крайова задача (10), (11) також є тотальною щодо простору Слободецького W_p^{s+r}.

Для того щоб співвідношення (4) мало сенс, скрізь далі будемо вважати, що виконується таке припущення.

Припущення. *Однорідна гранична крайова задача*

$$y^{(r)}(t,0) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t,0)y^{(r-j)}(t,0) = 0, \quad t \in (a,b),$$

$$B_j(0)y(\cdot,0) = 0, \quad j \in \{1,\ldots,r\},$$

має лише тривіальний розв'язок.

Умови, достатні для однозначної розв'язності задачі (10), (11) і неперервної залежності її розв'язку за малим параметром, дає така теорема.

Теорема 3. *Нехай виконується припущення і при* $\varepsilon \to 0+$ *та* $j \in \{1,\ldots,r\}$ *умови*:

(i) $\|A_{r-j}(\cdot,\varepsilon) - A_{r-j}(\cdot,0)\|_{s,p} \to 0$;

(ii) $B_j(\varepsilon)y \to B_j(0)y$ *для кожного* $y \in (W_p^{s+r})^m$.

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ *оператор* $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ *є оборотним.*

Якщо, крім цього,

(iii) $\|f(\cdot,\varepsilon) - f(\cdot,0)\|_{s,p} \to 0$;

(iv) $c_j(\varepsilon) \to c_j(0)$,

то при малих ε *єдиний розв'язок* $y(\cdot,\varepsilon)$ *крайової задачі* (10), (11) *задовольняє граничну властивість* (4).

4. Доведення теорем 1 і 2. Обмеженість лінійного оператора $L\colon (W_p^{s+r})^m \to (W_p^s)^m$ випливає з означення норм у просторах Слободецького і неперервності добутку в банахових алгебрах, які утворюють простори Слободецького. Оператор B обмежений за означенням.

Доведемо фредгольмовість оператора (L,B).

Означимо лінійний обмежений оператор $C : (W_p^{s+r})^m \to \mathbb{C}^{rm}$, поклавши

$$Cy = \big(y(a), y'(a), \ldots, y^{(r-1)}(a)\big).$$

Оскільки неоднорідна задача Коші

$$(L,C)y = (f,c) \in (W_p^s)^m \times \mathbb{C}^{rm}$$

має єдиний розв'язок $y \in (W_p^{s+r})^m$ при будь-якому значенні правої частини рівняння, то оператор (L,C) є бієктивним. За теоремою Банаха про обернений оператор він є оборотним. З іншого боку, оператор (L,B) допускає зображення

$$(L,B) = (L,C) + (0, B-C), \tag{12}$$

де другий доданок — це скінченновимірний обмежений оператор. Тому за теоремою Нікольського [13] (§ 21.5) оператор (L,B) є фредгольмовим з індексом 0.

Теорему 1 доведено.

Встановимо допоміжне твердження, яке буде використано у доведенні теореми 2.

Лема 1. *Для довільних матриці-функції* $Y_k(\cdot) \in (W_p^{s+r})^{m\times m}$, *вектора* $q_k \in \mathbb{C}^m$ *та лінійного неперервного оператора* $B_j : (W_p^{s+r})^m \to \mathbb{C}^m$ *справджується рівність*

$$B_j(Y_k(\cdot)\cdot q_k) = [B_jY_k(\cdot)]q_k, \tag{13}$$

де $j \in \{1,\ldots,r\}$, $k \in \{0,\ldots,r-1\}$.

Ця рівність перевіряється безпосередньо.

За теоремою 1 оператор (5) оборотний тоді і тільки тоді, коли $\ker(L,B)=\{0\}$. Тому для доведення теореми 2 достатньо показати, що

$$\ker(L,B)\neq\{0\}\Leftrightarrow\det[BY]=0.$$

Нехай $\ker(L,B)\neq\{0\}$. Тоді існує нетривіальний розв'язок однорідного рівняння $(L,B)y=$ $=(0,0)$, який можна записати у вигляді (8), де хоча б один із вектор-стовпців $q_0,q_1,\ldots,q_{r-1}\in$ $\in\mathbb{C}^m$ відмінний від нуля. За лемою 1

$$0=B_jy(\cdot)=\sum_{k=0}^{r-1}B_j(Y_k(\cdot)q_k)=\sum_{k=0}^{r-1}[B_jY_k(\cdot)]q_k.$$

Отже, стовпці матриці (9) є лінійно залежними і вона є виродженою.

Навпаки, нехай матриця (9) є виродженою. Тоді її стовпці є лінійно залежними і

$$\sum_{k=0}^{r-1}[B_jY_k(\cdot)]q_k=0 \tag{14}$$

для деяких вектор-стовпців $q_0,q_1,\ldots,q_{r-1}\in\mathbb{C}^m$, серед яких принаймні один відмінний від нуля. Означимо ненульову функцію $y(\cdot)\in(W_p^{s+r})^m$ за формулою (8). Для неї $Ly=0$ і

$$B_jy(\cdot)=\sum_{k=0}^{r-1}B_j(Y_k(\cdot)q_k)=\sum_{k=0}^{r-1}[B_jY_k(\cdot)]q_k=0$$

на підставі леми 1 і рівності (14). Отже, $y\in\ker(L,B)$ і тому $\ker(L,B)\neq\{0\}$.

Теорему 2 доведено.

5. Доведення теореми 3. Розглянемо спочатку параметричну сім'ю неоднорідних задач Коші для системи $k\geq 1$ лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$y'(t,\varepsilon)=A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon)+g(t,\varepsilon),\qquad t\in(a,b),\quad y(a,\varepsilon)=h(\varepsilon). \tag{15}$$

Тут для кожного $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$ вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon)\in(W_p^{s+1})^k$ є шуканою, а матриця-функція $A(\cdot,\varepsilon)\in(W_p^s)^{k\times k}$, вектор-функція $g(\cdot,\varepsilon)\in(W_p^s)^k$ і вектор $h(\varepsilon)\in\mathbb{C}^k$ — заданими. Як відомо, ця задача має єдиний розв'язок для кожного фіксованого ε.

Лема 2. *Нехай при $\varepsilon\to 0+$ виконуються такі умови*:

(a) $A(\cdot,\varepsilon)\to A(\cdot,0)$ *у* $(W_p^s)^{k\times k}$;

(b) $g(\cdot,\varepsilon)\to g(\cdot,0)$ *у* $(W_p^s)^k$;

(c) $h(\varepsilon)\to h(0)$.

Тоді при $\varepsilon\to 0+$

$$\big\|y(\cdot,\varepsilon)-y(\cdot,0)\big\|_{s+1,p}\to 0. \tag{16}$$

Це твердження є безпосереднім наслідком теореми 3 із статті [8].

Доведемо спочатку теорему 3 щодо задач Коші

$$L(\varepsilon)x(t,\varepsilon)=f(t,\varepsilon),\quad t\in(a,b), \tag{17}$$

$$x^{(j-1)}(a,\varepsilon)=h_j(\varepsilon),\quad j\in\{1,\ldots,r\}, \tag{18}$$

де параметр $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$. Єдиний розв'язок $x(\cdot,\varepsilon)$ такої задачі належить простору $(W_p^{s+r})^m$.

Лема 3. *Нехай виконуються умови* (i), (iii) *теореми* 3 *і, крім того,*

$$h_j(\varepsilon) \to h_j(0) \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+ \quad \textit{для кожного} \quad j \in \{1, \ldots, r\}. \tag{19}$$

Тоді

$$\left\| x(\cdot, \varepsilon) - x(\cdot, 0) \right\|_{s+r,p} \to 0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{20}$$

Доведення. При $r = 1$ лема 3 рівносильна лемі 2. Нехай $r \geq 2$. Як відомо (див., наприклад, [14] (п. 2.5), крайова задача (17), (18) рівносильна задачі (15), в якій

$$A(\cdot, \varepsilon) := \begin{pmatrix} 0_m & I_m & 0_m & \ldots & 0_m \\ 0_m & 0_m & I_m & \ldots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_m & 0_m & 0_m & \ldots & I_m \\ -A_0(\cdot;\varepsilon) & -A_1(\cdot;\varepsilon) & -A_2(\cdot;\varepsilon) & \ldots & -A_{r-1}(\cdot;\varepsilon) \end{pmatrix} \in (W_p^s)^{rm \times rm},$$

де 0_m і I_m позначають відповідно нульову і одиничну матриці порядку m, а

$$g(\cdot, \varepsilon) := \mathrm{col}(0, f(\cdot, \varepsilon)), \qquad h(\varepsilon) := \mathrm{col}(h_1(\varepsilon), \ldots, h_r(\varepsilon)).$$

Розв'язки цих задач пов'язані між собою співвідношенням

$$y(\cdot, \varepsilon) = \mathrm{col}\big(x(\cdot, \varepsilon), x'(\cdot, \varepsilon) \ldots, x^{(r-1)}(\cdot, \varepsilon)\big). \tag{21}$$

При цьому умови (i), (iii) теореми 3 і умова (19) рівносильні відповідно умовам (a), (b) і (c) леми 2. Крім того, (20) $\Leftrightarrow$ (16) за умови (21). Отже, твердження леми 3 випливає з леми 2.

Встановимо існування і єдиність розв'язку крайової задачі (10), (11) при малих значеннях параметра ε.

Лема 4. *Нехай виконуються умови* (i) *та* (ii) *теореми* 3 *і припущення. Тоді для достатньо малих* $\varepsilon > 0$ *оператор* $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ *є оборотним.*

Доведення. Розглянемо при кожному $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ і $k \in \{0, \ldots, r-1\}$ задачу Коші (6), (7), де

$$Y_k^{(r)}(\cdot) = Y_k^{(r)}(\cdot, \varepsilon), \qquad A_{r-j}(\cdot) = A_{r-j}(\cdot, \varepsilon).$$

Вона складається з m задач Коші вигляду (17), (18) з $f = 0$ відносно вектор-функцій $x(\cdot, \varepsilon)$, які є стовпцями матриці $Y_k(\cdot, \varepsilon)$. Тоді за лемою 3

$$\left\| Y_k(\cdot, \varepsilon) - Y_k(\cdot, 0) \right\|_{s+r,p} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{22}$$

Звідси на підставі умови (ii) теореми 3 випливає збіжність при $\varepsilon \to 0+$ блочних числових матриць

$$\Big(\big[B_1(\varepsilon) Y_0(\cdot, \varepsilon) \big] \ldots \big[B_r(\varepsilon) Y_{r-1}(\cdot, \varepsilon) \big] \Big) \to \Big(\big[B_1(0) Y_0(\cdot, 0) \big] \ldots \big[B_r(0) Y_{r-1}(\cdot, 0) \big] \Big). \tag{23}$$

Тут гранична матриця невироджена згідно зі зробленим припущенням і теоремою 2. Тому для достатньо малих $\varepsilon \geq 0$

$$\det\Big(\big[B_1(\varepsilon)Y_0(\cdot,\varepsilon)\big]\dots\big[B_r(\varepsilon)Y_{r-1}(\cdot,\varepsilon)\big]\Big)\neq 0. \tag{24}$$

Отже, за теоремою 2 оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ є оборотним.

Лему 4 доведено.

Розглянемо напіводнорідну крайову задачу

$$L(\varepsilon)\upsilon(\cdot,\varepsilon)\equiv 0, \qquad B_j(\varepsilon)\upsilon(\cdot,\varepsilon)=c_j(\varepsilon), \quad j\in\{1,\dots,r\}, \tag{25}$$

залежну від параметра $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$.

Лема 5. *Нехай виконуються умови* (i), (ii), (iv) *теореми* 3. *Тоді*

$$\big\|\upsilon(\cdot,\varepsilon)-\upsilon(\cdot,0)\big\|_{s+r,p}\to 0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon\to 0+. \tag{26}$$

Доведення. Запишемо при кожному $\varepsilon\to 0+$ розв'язок однорідного диференціального рівняння (25) у вигляді

$$\upsilon(\cdot,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{r-1}Y_k(\cdot,\varepsilon)q_k(\varepsilon) \tag{27}$$

з довільними вектор-функціями $q_0(\varepsilon),\dots,q_{r-1}(\varepsilon)\in\mathbb{C}^m$, де кожна матриця-функція $Y_k(\cdot,\varepsilon)$ належить простору $(W_p^{s+r})^{m\times m}$. За лемою 1 маємо

$$B_j(\varepsilon)\upsilon(\cdot,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{r-1}B_j(\varepsilon)\big(Y_k(\cdot,\varepsilon)q_k(\varepsilon)\big)=\sum_{k=0}^{r-1}\big[B_j(\varepsilon)Y_k(\cdot,\varepsilon)\big]q_k(\varepsilon).$$

Тому друга рівність у формулі (25) рівносильна, тому що

$$\sum_{k=0}^{r-1}\big[B_j(\varepsilon)Y_k(\cdot,\varepsilon)\big]q_k(\varepsilon)=c_j(\varepsilon). \tag{28}$$

Рівність (28) можна записати у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\Big(\big[B_1(\varepsilon)Y_0(\cdot,\varepsilon)\big]\dots\big[B_r(\varepsilon)Y_{r-1}(\cdot,\varepsilon)\big]\Big)q(\varepsilon)=c_j(\varepsilon) \tag{29}$$

відносно координат стовпця $q(\varepsilon):=\mathrm{col}\big(q_0(\varepsilon),\dots,q_{r-1}(\varepsilon)\big)$.

Звідси на підставі умови (iv) теореми 3 і формул (23), (24) випливає, що система (29) має єдиний розв'язок при достатньо малих ε і він задовольняє граничну умову $q(\varepsilon)\to q(0)\in\mathbb{C}^m$ при $\varepsilon\to 0+$. Із нього і співвідношення (22) отримуємо формулу (26).

Лему 5 доведено.

Доведемо тепер виконання граничної рівності без припущення про однорідність диференціального рівняння (10). Для кожного достатньо малого $\varepsilon\geq 0$ покладемо

$$z(\cdot,\varepsilon)=y(\cdot,\varepsilon)-x(\cdot,\varepsilon),$$

де вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon)$ є розв'язком неоднорідної крайової задачі (10), (11), а вектор-функція $x(\cdot,\varepsilon)$ – розв'язком задачі Коші (17), (18) з $h_j(\varepsilon)\equiv 0$. Тоді $z(\cdot,\varepsilon)$ є розв'язком напіводнорідної крайової задачі

$$L(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon)\equiv 0, \qquad B_j(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon)=\tilde{c}(\varepsilon), \qquad \tilde{c}(\varepsilon):=c_j(\varepsilon)-B_j(\varepsilon)x(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^m.$$

На підставі зроблених припущень і леми 3 $\tilde{c}(\varepsilon)\to\tilde{c}(0)$ при $\varepsilon\to 0+$. Таким чином, у відповідності з лемою 5

$$\left\|z(\cdot,\varepsilon)-z(\cdot,0)\right\|_{s+r,p}\to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0+. \tag{30}$$

Із (20) і (30) випливає гранична властивість (4).

Теорему 3 доведено.

Література

1. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальних уравнений // Совр. пробл. математики. Новейшие достижения / ВИНИТИ. – 1987. – **30**. – С. 3 – 103.
2. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975. – 352 с.
3. *Kodlyuk T. I. , Mikhailets V. A., Reva N. V.* Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 1. – P. 77 – 90.
4. *Михайлец В. А., Пелехата О. В., Рева Н. В.* Предельные теоремы для решений краевых задач // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 2. – С. 216 – 223.
5. *Mikhailets V. A., Chehanova G. A.* Limit theorems for general one-dimensional boundary-value problems // J. Math. Sci. – 2015. – **204**, № 3. – P. 333 – 342.
6. *Mikhailets V. A., Murach A. A., Soldatov V. A.* Continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems // Electron. J. Qual. Theory Different. Equat. – 2016. – № 87. – P. 1 – 16.
7. *Gnyp E. V.* Continuity of the solutions of one-dimensional boundary-value problems with respect to the parameter in Slobodetsky spaces // Ukr. Math. J. – 2016. – **68**, № 6. – P. 746 – 756.
8. *Gnyp E. V., Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Fredholm boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces // Ukr. Math. J. – 2015. – **67**, № 5. – P. 658 – 667.
9. *Soldatov V. A.* On the continuity in a parameter for the solutions of boundary-value problems total with respect to the spaces $C^{(n+r)}[a,b]$ // Ukr. Math. J. – 2015. – **67**, № 5. – P. 785 – 794.
10. *Maslyuk H. O.* Continuity of the solutions of one-dimensional boundary-value problems in Hölder spaces with respect to the parameter // Ukr. Math. J. – 2017. – **69**, № 1. – P. 83 – 91.
11. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
12. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы. – М.: Мир, 1987. – 696 с.
13. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 495 с.
14. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. – М.: Мир, 1971. – 392 с.

Одержано 26.11.17