УДК 519.642

**С. Г. Солодкий, Є. В. Семенова** (Ін-т математики НАН України, Київ)

# АПРОКСИМАЦІЙНІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ АСПЕКТИ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕСТІЙКИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ТА ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

We present a review of the latest results obtained in the field of numerical solution of unstable integral and pseudodifferential equations. New versions of fully discrete projection and collocation methods are constructed and justified. It is shown that these versions are characterized by the optimal accuracy and cost efficiency, as far as the use of computational resources is concerned.

Приведен обзор последних результатов в области численного решения неустойчивых интегральных и псевдодифференциальных уравнений. Построены и обоснованы новые версии полностью дискретных проекционного и коллокационного методов, которые являются оптимальными по точности и экономичными по объему использованных вычислительных ресурсов.

**1. Вступ.** Ідея впровадження оператора, який би розширював поняття диференціального оператора та об'єднував його з сингулярним інтегральним оператором, виникла в середині минулого століття (див., наприклад, [13]). У ранніх дослідженнях подібні об'єднані оператори мали різні назви, зокрема в [5] їх називали сингулярними інтегро-диференціальними операторами. Безпосередньо термін „псевдодиференціальний оператор" для позначення таких об'єктів уперше з'явився в 1965 році у статтях [14, 17, 19]. У подальшому цей термін став загальновизнаним і залишився у науковій літературі. Основи загальної теорії псевдодиференціальних операторів було закладено у подальших роботах, серед яких слід відзначити монографії [6, 10, 29]. Що стосується еліптичних псевдодиференціальних операторів, то розвиток відповідної теорії пов'язаний насамперед з роботами М. Вішика [3], Г. Ескіна [11], Буте де Монвеля [20]. Детально ознайомитися з дослідженнями у цій галузі можна в історичному огляді, що міститься у розділі 18 монографії [1].

Створення теорії псевдодиференціальних операторів надало потужний поштовх розвитку чисельних методів розв'язування відповідних рівнянь. Як відомо (див. [24]), еліптичні псевдодиференціальні рівняння (еліптичні ПДР) можуть бути нестійкими до малих збурень у вхідних даних. Такі задачі потребують застосування регуляризації при їх чисельному розв'язуванні. Специфіка еліптичних ПДР дозволяє досягати стійкості наближень за допомогою належного вибору пари просторів (наприклад, соболєвських або шаудерівських). У фаховій літературі такий підхід отримав назву саморегуляризації (див., наприклад, [2]). Його суттю (та принциповою відмінністю від тихоновської регуляризації) є можливість побудови стійких апроксимацій без використання окремого параметра регуляризації: потрібна точність розв'язування забезпечується шляхом „налаштування" параметра/ів дискретизації, в результаті чого відбувається регуляризація задачі. При цьому варто зазначити, що вибір завеликого значення параметра дискретизації призводить до нестійких наближень, а замалого — до збільшення похибки. В залежності від інформації про рівняння, що розглядається, розрізняють два типи технік вибору параметра дискретизації: апріорний та апостеріорний. Дану статтю присвячено побудові оптимальних за точністю чисельних методів розв'язування одного класу періодичних інтегральних рівнянь, що містить еліптичні ПДР. При цьому стійкість наближень досягається шляхом саморегуляризації з використанням апріорних та апостеріорних технік вибору параметрів дискретизації.

Опишемо коротко структуру статті. У пункті 2 досліджуються апроксимаційні та інформаційні властивості нових повністю дискретних версій проекційного методу для чисельного розв'язування періодичних інтегральних рівнянь. Докладний опис та приклади рівнянь, що розглядаються, наведено у підпункті 2.1. Дослідження точності запропонованого підходу в апріорному випадку проведено у підпункті 2.2, а в апостеріорному випадку — у підпункті 2.3. У пункті 3 досліджуються повністю дискретні версії проекційного та колокаційного методів для розв'язування інтегрального рівняння Сімма. Оцінки похибки для цих методів наведено у підпунктах 3.2 та 3.3. Оптимальності отриманих оцінок присвячено підпункт 3.4.

**2. Клас періодичних інтегральних рівнянь.** Наслідуючи [24] (§ 6.3), розглянемо клас періодичних інтегральних рівнянь, що містить еліптичні ПДР.

Нехай $H^\lambda$ та $H^{\lambda_1,\lambda_2}$, $-\infty < \lambda, \lambda_1, \lambda_2 < \infty$, — соболєвські простори 1-періодичних та 1-біперіодичних функцій із нормами

$$\|u\|_\lambda := \left( \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\underline{n}|^{2\lambda} |\hat{u}(n)|^2 \right)^{1/2} < \infty,$$

$$\|a\|_{\lambda_1,\lambda_2} := \left( \sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}^2} |\underline{k}|^{2\lambda_1} |\underline{l}|^{2\lambda_2} |\hat{a}(k,l)|^2 \right)^{1/2} < \infty,$$

де

$$\hat{u}(n) = \int_0^1 e_{-n}(t)u(t)\,dt, \qquad \hat{a}(k,l) = \int_0^1\int_0^1 e_{-k}(t)e_{-l}(s)a(t,s)\,dt\,ds$$

— коефіцієнти Фур'є функцій $u(t)$ та $a(t,s)$ за тригонометричним базисом $\{e_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, $e_k(t) = e^{i2\pi kt}$, $t \in [0,1]$. Тут $H^0 = L_2(0,1)$. Через $C^\infty = C^\infty([0,1]^2)$ позначимо простір, який складається з нескінченно гладких 1-біперіодичних функцій двох змінних.

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\mathcal{A}u(t) = f(t), \quad t \in [0,1], \tag{2.1}$$

де оператор $\mathcal{A}$ має вигляд

$$\mathcal{A} = \sum_{p=0}^{q} A_p, \qquad A_p u(t) = \int_0^1 k_p(t-s)a_p(t,s)u(s)\,ds, \tag{2.2}$$

$f$ та $k_p$ — 1-періодичні функції, а $a_p \in C^\infty([0,1]^2)$, $p = 0,\ldots,q$. Далі припускатимемо, що

$$a_0(t,t) \neq 0 \quad \forall t \in [0,1], \tag{2.3}$$

а для коефіцієнтів Фур'є $\hat{k}_p(n)$ при деяких $\alpha \in \mathbb{R}$ та $\beta > 0$ виконуються умови

$$c_{00}|n|^\alpha \le |\hat{k}_0(n)| \le c_0|n|^\alpha, \quad n \in \mathbb{Z}/0, \tag{2.4}$$

$$|\hat{k}_0(n) - \hat{k}_0(n-1)| \leq c\underline{n}^{\alpha-\beta}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.5}$$

$$|\hat{k}_p(n)| \leq c\underline{n}^{\alpha-\beta}, \quad n \in \mathbb{Z}, \, p = 1, \ldots, q. \tag{2.6}$$

Тут $c, \, c_0, \, c_{00} > 0$ і

$$\underline{n} = \begin{cases} |n|, & n \in \mathbb{Z}/0, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

Слід зауважити, що значення $\alpha = 0$ відповідає сингулярним рівнянням, а у випадку $\alpha = 1$ отримаємо гіперсингулярні рівняння. Найбільш змістовним є випадок, коли $\alpha < 0$. Такі $\alpha$ мають еліптичні ПДР.

Наслідуючи [24] (розд. 7), запишемо оператор $\mathcal{A}$ (2.2) у вигляді

$$\mathcal{A} = D + \sum_{p=1}^{q} A'_p,$$

де $D \in \mathcal{L}(H^\lambda, H^{\lambda-\alpha})$ утворює ізоморфізм між просторами $H^\lambda$ та $H^{\lambda-\alpha}$ при будь-якому $\lambda \in \in (-\infty, \infty)$, а оператори $A'_p \in \mathcal{L}(H^\lambda, H^{\lambda-\alpha+\beta})$, $p = 1, \ldots, q$, є компактними на парах просторів $H^\lambda$ та $H^{\lambda-\alpha}$. Тоді оператор $\mathcal{A}$ утворює ізоморфізм між просторами $H^\lambda$ та $H^{\lambda-\alpha}$, а рівняння (2.1) є однозначно розв'язуваним. Тобто існують сталі $c'_\lambda, c''_\lambda > 0$ такі, що для довільного $v \in H^\lambda$ виконується співвідношення

$$c'_\lambda \|v\|_\lambda \leq \|\mathcal{A}v\|_{\lambda-\alpha} \leq c''_\lambda \|v\|_\lambda. \tag{2.7}$$

Далі будемо вважати, що точний розв'язок рівняння (2.1) належить соболєвському простору $H^\mu$ при деякому $\mu > \alpha + 1/2$, $\|u\|_\mu \leq 1$. Тоді згідно з (2.7) маємо $f \in H^{\mu-\alpha}$ і $\|f\|_{\mu-\alpha} \leq c''_\mu$.

Наведемо приклади еліптичних ПДР (2.1), що задовольняють умови (2.3) – (2.6).

***Приклад* 2.1.** При дослідженні граничної задачі Діріхле для рівняння Гельмгольца в обмеженій області з гладкою жордановою межею виникає інтегральне рівняння

$$\int_0^1 [k_0(t-s) + k_1(t-s)a_1(t,s) + a_2(t,s)]u(s)\,ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.8}$$

де функції $a_1, a_2 \in C^\infty$ подано у вигляді рядів за тригонометричним базисом $\{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, а

$$k_0(t) = \log|\sin \pi t|, \qquad k_1(t) = \sin^2 \pi t \log|\sin \pi t|, \quad k_2(t) \equiv 1.$$

Для коефіцієнтів Фур'є маємо $\hat{k}_0(n) \asymp |n|^{-1}$ та $\hat{k}_1(n) \asymp |n|^{-3}$. Таким чином, для рівняння (2.8) умови (2.3) – (2.6) виконуються при $\alpha = -1$, $\beta = 1$ та $a_0(t,s) \equiv 1$.

***Приклад* 2.2.** Типовим представником класу задач, що розглядається, є інтегральне рівняння Сімма (більш докладно див. пункт 3):

$$\mathcal{A}u(t) := \int_0^1 k_0(t-s)u(s)\,ds + \int_0^1 a_1(t,s)u(s)\,ds = f(t),$$

$$k_0(t-s) = \log|\sin\pi(t-s)|,$$

$$a_1(t,s) = \begin{cases} \log\dfrac{|\gamma(t)-\gamma(s)|}{|\sin\pi(t-s)|}, & t\neq s, \\ \log\left(|\gamma'(t)/\pi|\right), & t = s. \end{cases}$$

Тут $\gamma$ — нескінченно гладка 1-періодична функція. Як відомо [24], ядро $a_1(t,s)$ є $C^\infty$-гладкою і 1-біперіодичною функцією, а коефіцієнти Фур'є функції $k_0$ мають вигляд

$$\hat{k}_0(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2|n|}, & n\in\mathbb{Z}/0, \\ \log 2, & n = 0. \end{cases}$$

Очевидно, що умови (2.3) – (2.6) виконуються при $a_0(t,s) = k_1(t,s)\equiv 1,\ \alpha=-1$ та будь-якому $\beta>0$.

***Приклад* 2.3.** Інтегральне рівняння

$$\int\limits_0^1 |x(t)-x(s)|^2\log|x(t)-x(s)|u(s)\,ds = f(t), \quad t\in[0,1],$$

виникає при розв'язуванні бігармонічної задачі Діріхле в обмеженій області з гладкою жордановою межею, де $x$ — нескінченно гладка 1-періодична параметризація межі така, що $x'(t)\neq 0$ $\forall t\in\mathbb{R}$. Запишемо це рівняння так:

$$\int\limits_0^1 k_0(t-s)a_0(t,s)u(s)\,ds + \int\limits_0^1 a_1(t,s)u(s)\,ds = f(t),$$

де

$$a_0(t,s) = \frac{|x(t)-x(s)|^2}{\sin^2\pi(t-s)} \qquad \text{для} \quad t\neq s, \qquad a_0(t,t) = \frac{|x'(t)|^2}{\pi^2},$$

$$a_1(t,s) = |x(t)-x(s)|^2\log\frac{|x(t)-x(s)|}{|\sin\pi(t-s)|} \qquad \text{для} \quad t\neq s, \qquad a_1(t,t)\equiv 0,$$

$$k_0(t) = \sin^2\pi t\log|\sin\pi t|.$$

Коефіцієнти Фур'є функції $k_0$ мають вигляд

$$\hat{k}_0(0) = -\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{4}, \qquad \hat{k}_0(\pm 1) = \frac{1}{4}\log 2-\frac{3}{16}, \qquad \hat{k}_0(n) = \frac{1}{4|n|(n^2-1)}, \quad |n|\geq 2.$$

Умови (2.4) – (2.6) виконуються при $\alpha=-3,\ \beta=1$.

Ці та інші приклади задач (2.1) – (2.6) можна знайти у підрозділі 6.4 [24].

З метою задання гладкості ядер $a_p,\ p=0,\ldots,q,$ введемо у розгляд простір функцій класу Жевре типу Рум'є (див. [4, c.112]):

$$G_{\eta_1,\eta_2} = \left\{ a\in C^\infty : \|a\|^2_{\eta_1,\eta_2} := \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} |\hat{a}(k,l)|^2 e^{2\eta_2(|k|^{1/\eta_1}+|l|^{1/\eta_1})} < \infty \right\}, \quad \eta_1,\eta_2>0. \quad (2.9)$$

Зазначимо, якщо в (2.9) $\eta_1 = 1$, то функція $a(t,s)$ має аналітичне продовження за обома змінними у смугу $\left\{z : z = t + is,\ |s| < \dfrac{\eta_2}{2\pi}\right\}$ комплексної площини.

Далі будемо вважати, що $a_p \in G_{\eta_1,\eta_2}$, $p = 0,\ldots,q$, при деяких $\eta_1 \geq 1$ та $\eta_2 > 0$.

***2.1. Повністю дискретний проекційний метод для інтегральних періодичних рівнянь.*** Введемо необхідні позначення. Розглянемо $n$-вимірний простір тригонометричних поліномів

$$\mathcal{T}_N = \left\{ u_N : u_N(t) = \sum_{k \in Z_N} c_k e_k(t) \right\},$$

$$Z_N = \left\{ k : -\frac{N}{2} < k \leq \frac{N}{2},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\}.$$

Нехай $\Omega$ — деяка обмежена множина координатної площини. Позначимо через $P_N$ та $P_{N,N}^{\Omega}$ ортогональні проектори вигляду

$$P_N u(t) = \sum_{k \in Z_N} \hat{u}(k) e_k(t) \in \mathcal{T}_N,$$

$$P_{N,N}^{\Omega} a(t,s) = \sum_{(k,l) \in \Omega} \hat{a}(k,l) e_k(t) e_l(s) \in \mathcal{T}_N \times \mathcal{T}_N,$$

а через $Q_N$ та $Q_{N,N}$ інтерполяційні проектори такі, що $Q_N u(t) \in \mathcal{T}_N$, $Q_{N,N} a(t,s) \in \mathcal{T}_N \times \mathcal{T}_N$ і на рівномірної сітці виконується

$$(Q_N u)(jN^{-1}) = u(jN^{-1}), \quad j = 1,2,\ldots,N,$$

$$(Q_{N,N} a)(jN^{-1}, iN^{-1}) = a(jN^{-1}, iN^{-1}), \quad j,i = 1,2,\ldots,N.$$

Наведемо опис повністю дискретного проекційного методу (ПДПМ), в межах якого шукатимемо наближення до точного розв'язку рівняння (2.1). З цією метою побудуємо наближення до оператора $\mathcal{A}$ таким чином:

$$\mathcal{A}_M = \sum_{p=0}^{q} A_{p,M}, \tag{2.10}$$

де оператори $A_{p,M}$, $p = 0,\ldots,q$, визначаються за формулою

$$A_{p,M} u(t) = \int\limits_0^1 k_p(t-s) a_{p,M}(t,s) u(s)\, ds, \quad a_{p,M} = Q_{M,M} a_p, \tag{2.11}$$

а $M$ — параметр дискретизації. Праву частину рівняння (2.1) апроксимуємо так:

$$f_N := Q_N f,$$

де $N > M$. Тоді у рамках ПДПМ наближений розв'язок знаходиться із рівняння

$$P_N \mathcal{A}_M u_{M,N} := \sum_{p=0}^{q} P_N A_{p,M} u_{M,N} = Q_N f, \tag{2.12}$$

де $A_{p,M}$ мають форму (2.11), а $u_{M,N} \in \mathcal{T}_N$ вибирається за наближений розв'язок рівняння (2.1). Зазначимо, що внаслідок умов (2.4) та (2.5) справджується $A_{0,M} \in \mathcal{L}(H^\lambda, H^{\lambda-\alpha})$ та $A_{p,M} \in \in \mathcal{L}(H^\lambda, H^{\lambda-\alpha+\beta})$, $p = 1, \ldots, q$.

Оцінку точності ПДПМ на класі рівнянь (2.1) – (2.6) у випадку точних вхідних даних встановлено в наступному твердженні.

**Теорема 2.1.** *Нехай виконуються умови* (2.3) – (2.6), *а оператор* $\mathcal{A}_M$ *має вигляд* (2.10). *Тоді для довільних* $\alpha \le \lambda \le \mu$, $\mu > \alpha + 1/2$ *та всіх* $M$ *таких, що*

$$(M/2)^{1/\eta_1} \ge \frac{\mu - \lambda}{2\eta_2} \log N + \frac{c_\lambda \eta_1}{2\eta_2} \log\log N,$$

*де* $c_\lambda > 0$ *— деяка стала, що залежить від* $\lambda$, *справджується*

$$\|u - u_{N,M}\|_\lambda = O(N^{\lambda-\mu}).$$

Далі розглянемо випадок, коли вхідні дані рівняння (2.1) задано з похибкою. А саме, наслідуючи [24], будемо вважати, що замість точних функцій $a_p(t,s)$, $p = 0, \ldots, q$, та $f(t)$ нам відомі лише деякі їх збурення $a_{p,\varepsilon}(t,s)$, $p = 0, \ldots, q$, та $f_\delta(t)$ такі, що в точках рівномірної сітки маємо

$$\left( \frac{1}{M^2} \sum_{i,j=1}^{M} |a_{p,\varepsilon}(iM^{-1}, jM^{-1}) - a_p(iM^{-1}, jM^{-1})|^2 \right)^{1/2} \le \varepsilon, \quad p = 0, \ldots, q,$$

$$\left( N^{-1} \sum_{j=1}^{N} \left| f_\delta(jN^{-1}) - f(jN^{-1}) \right|^2 \right)^{1/2} \le \delta \|f\|_{\mu-\alpha}.$$

Відомо (див., наприклад, [24, с. 280]), що наведені нерівності еквівалентні умовам

$$\|Q_{M,M}(a_p - a_{p,\varepsilon})\|_{0,0} \le \varepsilon, \quad p = 0, \ldots, q, \tag{2.13}$$

$$\|Q_N(f_\delta - f)\|_0 \le \delta \|f\|_{\mu-\alpha}. \tag{2.14}$$

Тоді з урахуванням збурення у вхідних даних ПДПМ набирає вигляду

$$P_N \mathcal{A}_{M,\varepsilon} u_{M,N,\varepsilon,\delta} = Q_N f_\delta, \tag{2.15}$$

де $u_{M,N,\varepsilon,\delta} \in \mathcal{T}_N$ і

$$\mathcal{A}_{M,\varepsilon} = \sum_{p=0}^{q} A_{p,\varepsilon,M}, \qquad A_{p,\varepsilon,M} v(t) = \int_0^1 k(t-s) Q_{M,M} a_{p,\varepsilon}(t,s) v(s)\, ds.$$

Варіанти ПДПМ (2.12) та (2.15) у випадку $M = N$ (тобто з використанням одного параметра дискретизації) широко застосовувалися раніше при розв'язуванні періодичних інтегральних рівнянь (2.1) з умовами (2.3) – (2.6) (докладніше про це див. [24]). Відмінність побудованого нами підходу від згаданих методів полягає в тому, що в (2.12) та (2.15) впроваджено ідею розподілу параметрів дискретизації для правої частини та оператора. Раніше така ідея використовувалася при розв'язуванні еліптичних ПДР тільки для рівняння Сімма в [22].

Поставимо за мету оцінити точність ПДПМ (2.15) з різними рівнями дискретизації для рівнянь (2.1), що задовольняють умови (2.3) – (2.6) у метриці просторів $H^\lambda$.

Наступне твердження містить оцінку похибки ПДПМ (2.15) у випадку збурених вхідних даних.

**Теорема 2.2.** *Нехай* $M \in \mathbb{N}$ *задовольняє умови*

$$2\varepsilon < \max_p \left\{\|a_p\|_{\eta_1,\eta_2}\right\} e^{-2\eta_2\left(\frac{M}{2}\right)^{1/\eta_1}}, \qquad e^{-2\eta_2\left(\frac{M}{2}\right)^{1/\eta_1}} \left(\frac{M}{2}\right)^{\lambda'} \leq 1/2,$$

*де*

$$\lambda' = \begin{cases} \max\{\lambda-\alpha,\nu\} + \max\{|\lambda|,\nu\}, & \textit{якщо} \quad 1/2+\alpha<\lambda, \\ \max\{|\lambda|,\nu\}+\nu, & \textit{якщо} \quad \alpha<\lambda\leq 1/2, \end{cases}$$

*а* $\nu > 1/2$ — *деякий параметр, що вибирається заздалегідь. Тоді при* $2 \leq N \leq \delta^{-\frac{1}{\lambda-\alpha}}$ *і* $\lambda \in [\alpha,\mu]$ *виконується*

$$\|u - u_{N,M,\delta,\varepsilon}\|_\lambda =$$

$$= O\left(\left(\frac{N}{2}\right)^{\lambda-\mu} + e^{-2\eta_2\left(\frac{M}{2}\right)^{1/\eta_1}}\left(\frac{M}{2}\right)^{\lambda'} + \delta\left(\frac{N}{2}\right)^{\lambda-\alpha} + \varepsilon\left(\frac{M}{2}\right)^{\lambda'}\right), \tag{2.16}$$

*де* $u_{M,N,\varepsilon,\delta} \in \mathcal{T}_N$ *є розв'язком рівняння* (2.15) *та вибирається за наближення до точного розв'язку рівняння* (2.1).

Доведення теорем 2.1 та 2.2 наведено у статтях [7] та [28] відповідно.

***2.2. Вибір параметрів дискретизації. Апріорний випадок.*** Розглянемо задачу вибору рівнів дискретизації $N$ та $M$ з метою мінімізації оцінки похибки (2.16). При цьому будемо досліджувати два випадки: коли параметр гладкості $\mu$ відомий точно (апріорний випадок) та коли значення $\mu$ є невідомим (апостеріорний випадок).

Введемо позначення $f_1(N,M) := \left(\frac{N}{2}\right)^{\lambda-\mu} + e^{-2\eta_2\left(\frac{M}{2}\right)^{1/\eta_1}}\left(\frac{M}{2}\right)^{\lambda'}$ ($f_1$ — спадна функція при $N,M\to\infty$) та $f_2(N,M) := \left(\frac{N}{2}\right)^{\lambda-\alpha}\delta + \left(\frac{M}{2}\right)^{\lambda'}\varepsilon$ ($f_2$ — зростаюча функція при $N,M\to\infty$). Очевидно, що своє мінімальне значення функція $f_1+f_2$ набуває у точці $(\bar N,\bar M)$, координати якої можна знайти з умов

$$\left(\frac{N}{2}\right)^{\lambda-\mu} = \left(\frac{N}{2}\right)^{\lambda-\alpha}\delta,$$

$$e^{-2\eta_2\left(\frac{M}{2}\right)^{1/\eta_1}}\left(\frac{M}{2}\right)^{\lambda'} = \left(\frac{M}{2}\right)^{\lambda'}\varepsilon.$$

Внаслідок цього отримуємо апріорні правила для вибору параметрів дискретизації $N$, $M$.

**Теорема 2.3.** *Нехай умови* (2.3) – (2.6) *виконуються, а вхідні дані збурені згідно з* (2.13) *та* (2.14). *Тоді для будь-яких* $\lambda\in[\alpha,\mu]$, $\mu>\alpha+1/2$, *у випадку вибору параметрів дискретизації за формулами*

$$\bar M = O\left(\log^{\eta_1}\frac{1}{\varepsilon}\right), \tag{2.17}$$

$$\bar{N} = O\left(\delta^{\frac{1}{\alpha-\mu}}\right) \tag{2.18}$$

*має місце оцінка похибки методу* (2.15)

$$\|u - u_{\bar{N},\bar{M},\delta,\varepsilon}\|_\lambda = O\left(\delta^{\frac{\mu-\lambda}{\mu-\alpha}} + \varepsilon \log^{\eta_1 \lambda'} \frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{2.19}$$

***Зауваження* 2.1.** Уперше ПДПМ (2.15) для класу періодичних інтегральних рівнянь (2.1) з умовами (2.3) – (2.6) було досліджено у роботі [24] у випадку $M = N$. У монографії [24] було встановлено, що при виборі параметра дискретизації згідно з умовою

$$N(\varepsilon, \delta) \asymp \min\left\{\delta^{-\frac{1}{\mu-\alpha}}, \varepsilon^{-1/(\mu-\lambda+\sigma\max(\lambda-\alpha,|\lambda|,\nu))}\right\}$$

точність ПДПМ має порядок

$$O\left(\delta^{\frac{\mu-\lambda}{\mu-\alpha}} + \varepsilon^{\frac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda+\sigma\max(\lambda-\alpha,|\lambda|,\nu)}}\right), \tag{2.20}$$

де $0 < \sigma < 1$ і $\nu > 1/2$. Очевидно, що оцінка (2.19) за порядком величини $\varepsilon$ менша, ніж (2.20). Іншими словами, запропонований нами варіант ПДПМ дозволяє покращити точність методу з роботи [24] саме за рахунок введення додаткового параметра дискретизації $M$.

***Зауваження* 2.2.** Припустимо $\varepsilon \geq c\delta$ та обчислимо обсяг необхідної дискретної інформації для розв'язування рівнянь (2.1) у межах запропонованого методу (2.15) з точністю (2.19). Очевидно, що значення параметра $M$ не перевищує величину $O(\log N)$. Тоді для дискретизації (2.11) необхідно використовувати не більш ніж $O(\log^2 N)$ значень ядер $a_{p,\varepsilon}(t,s)$ у точках рівномірної сітки. З іншого боку, для реалізації ПДПМ у роботі [24] задіяно $O(N \log N)$ значень ядер у вузлах сітки. Таким чином, перевага запропонованого нами методу за обсягом інформаційних витрат у порівнянні з відомим раніше методом є очевидною.

***Зауваження* 2.3.** Для скорочення обсягу арифметичних дій у [25] побудовано таку модифікацію ПДПМ: за наближення до $\mathcal{A}$ вибирається оператор

$$\mathcal{A}'_M = D + P_l \sum_{p=0}^{q} A'_{p,M} P_l,$$

де $l = N^\tau$ для деякого $0 < \tau < 1$, апроксимації $A'_{p,M}$ мають вигляд

$$A'_{p,M} u(t) = \int_0^1 k_p(t-s) a'_{p,M}(t,s) u(s)\, ds, \quad a'_{p,M} = P^{\Omega}_{M,M} Q_{M,M} a'_p,$$

$$\Omega = D^{\eta_1}_M = \left\{(k,l) \colon |k|^{1/\eta_1} + |l|^{1/\eta_1} < \left(\frac{M}{2}\right)^{1/\eta_1}, \ \ k,l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\}.$$

Таким чином, модифікований ПДПМ набирає вигляду

$$\mathcal{A}'_M u'_N := D u'_N + P_l \sum_{p=0}^{q} A'_{p,M} P_l u'_N = f'_N, \tag{2.21}$$

де $f'_N = Q_N f$. Для прискорення обчислень рівняння (2.21) розв'язується методом градієнтного спуску, тобто будується послідовність наближень $u'_{n,N}$, $n = 1, 2, \ldots$, що задовольняють умову

$$\left\| \mathcal{A}'_M u'_{n,N} - f'_N \right\|_0 = \min_{u \in \mathcal{K}_n(\mathcal{A}'_M, f'_N)} \| \mathcal{A}'_M u - f'_N \|_0, \tag{2.22}$$

де $\mathcal{K}_n(S_N, f_N)$ — відомі простори Крилова. За правило зупинки вибрано принцип нев'язки, згідно з яким вихід з обчислювальної процедури здійснюється при найменшому $\bar{n}$ такому, що

$$\left\| \mathcal{A}'_M u'_{\bar{n},N} - f'_N \right\|_0 \leq c\delta \| f'_N \|_0. \tag{2.23}$$

Встановлено, що побудований модифікований метод (2.21) дозволяє скоротити обсяг арифметичних дій до $O(N \log^2 N)$ (для порівняння — ПДПМ (2.15) потребує $O(N^3)$ арифметичних дій). При цьому доведено, що метод (2.21) – (2.23) зберігає точність (2.19).

Доведення теореми 2.3 наведено у статтях [7, 28].

***2.3. Вибір параметрів дискретизації. Апостеріорний випадок.*** У випадку, коли параметр $\mu$ є невідомим, апріорне правило (2.18) для вибору $N$ не може бути використаним. Але існують апостеріорні схеми вибору оптимального значення $N$, що дозволяють зберегти точність (2.19). Скористаємось одним із таких правил, а саме, принципом рівноваги [21].

Наведемо опис цього підходу. Позначимо через

$$D_N = \left\{ N : N = 1, \ldots, N_A, \ N_A = [\delta^{-\frac{1}{\lambda - \alpha}}] \right\}$$

множину можливих значень параметра $N$, де $[b]$ — ціла частина $b$. Параметр дискретизації $N$ вибиратимемо згідно з формулою

$$\hat{N} = \min\{ N : N \in D_N^+ \}, \tag{2.24}$$

де

$$D_N^+ = \left\{ N \in D_N : \| u_{N,\bar{M},\delta,\varepsilon} - u_{j,\bar{M},\delta,\varepsilon} \|_\lambda \leq C \left( \left( \frac{j}{2} \right)^{\lambda - \alpha} \delta + \varepsilon \log^{\eta_1 \lambda'} \frac{1}{\varepsilon} \right) \ \forall j > N \right\},$$

а $C > 0$ — відома стала. Тут і далі символом $C$ будемо позначати, можливо, різні сталі, що не залежать від рівнів похибки $\delta$, $\varepsilon$ та параметрів дискретизації.

Тоді справджується така теорема.

**Теорема 2.4.** *Нехай виконуються умови* (2.3) – (2.6) *та* (2.13), (2.14). *Крім того, припустимо, що* $a_p \in G_{\eta_1, \eta_2}$, $\eta_1 \geq 1$, $\eta_2 > 0$. *Параметри дискретизації* $M$ *та* $N$ *вибиратимемо згідно з умовами* (2.17) *та* (2.24). *Тоді для будь-яких* $\lambda \in [\alpha, \mu]$ *і* $\mu > \alpha + 1/2$ *має місце оцінка похибки ПДПМ* (2.15)

$$\| u - u_{\hat{N},\bar{M},\delta,\varepsilon} \|_\lambda = O\left( \delta^{\frac{\mu - \lambda}{\mu - \alpha}} + \varepsilon \log^{\eta_1 \lambda'} \frac{1}{\varepsilon} \right). \tag{2.25}$$

***Зауваження* 2.4.** Порівняння теорем 2.3 та 2.4 дозволяє зробити висновок, що незважаючи на відсутність інформації про точне значення параметра $\mu$ (в апостеріорному випадку) вдається зберегти той самий порядок точності (2.25), що і в апріорному випадку. Величина $N$ в теоремі 2.4 має більший порядок, ніж в теоремі 2.3. Таким чином, в апостеріорному випадку спостерігається збільшення обсягу дискретної інформації, необхідної для забезпечення оцінки (2.25). Цей ефект можна розглядати як своєрідний „штраф" за відмову від знання гладкості шуканого розв'язку.

Доведення теореми 2.4 наведено у статті [28].

**3. Інтегральне рівняння Сімма.** У даному пункті буде досліджено точність ПДПМ та повністю дискретного методу колокацій (ПДМК) при розв'язуванні інтегрального рівняння Сімма у шкалі соболєвських просторів $H^\lambda$. Слід зазначити, що інтегральні рівняння такого типу виникають при дослідженні плоскої граничної задачі Діріхле

$$\triangle F(X) = 0, \quad X \in \Omega,$$
$$F(X)|_\Gamma = f(x), \quad x \in \Gamma = \partial\Omega,$$

де $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ є замкненою областю з гладкою межею $\Gamma$, а функція $f(x)$ — неперервною. Нагадаємо, що рівняння Сімма належить до еліптичних ПДР, одна з важливих властивостей яких полягає в тому, що оператор такого рівняння утворює ізоморфізм між певними парами соболєвських просторів. Згадана властивість дозволяє саморегуляризувати подібні рівняння за рахунок „належного" підбору рівня дискретизації і розв'язувати їх без застосування додаткової регуляризації.

В роботах [22, 26] було встановлено стійкість ПДПМ при розв'язуванні інтегрального рівняння Сімма у шкалі $\{H^\lambda\}$. Аналогічні результати було отримано і для деяких варіантів методу колокацій. Зокрема, в роботі [23] розглянуто дискретний спектральний колокаційний метод, а в роботі [12] — ПДМК.

Як відомо (див., наприклад, [15], § 4.1, 7.3), досягнення заданої точності методу тісно пов'язане з вибором параметра регуляризації (у розглядуваному випадку останній збігається з параметром дискретизації). Для рівняння Сімма при апріорному виборі оцінку точності для ПДМК було встановлено у [12] (у шкалах соболєвських просторів), а для ПДПМ — у [22] (на парі просторів $H^0$ та $H^1$).

Слід зазначити, що для рівняння Сімма дослідження точності чисельних методів при апостеріорному виборі раніше проводилися лише в рамках проекційних методів і тільки у випадку точно заданого оператора (див. [16]). Наша мета полягає в продовженні дослідження апроксимаційних властивостей ПДМК та ПДПМ у шкалі соболєвських просторів для апріорного та апостеріорного виборів параметра дискретизації і збурення в обох частинах рівняння Сімма. За правило зупинки виберемо принцип рівноваги. Як буде показано нижче, застосування зазначеного принципу дозволяє зберегти порядки точності ПДМК та ПДПМ, відомі раніше лише в апріорному випадку. Більш того, буде встановлено, що отримані оцінки точності є також оптимальними за величиною $\delta$, тобто у випадку збурення лише у правій частині рівняння.

Наведемо докладний опис інтегрального рівняння Сімма, яке має вигляд

$$\int\limits_\Gamma \log|x-y| v(y)\, ds_y = g(x), \quad x \in \Gamma, \tag{3.1}$$

де $\Gamma$ — замкнена $C^\infty$-гладка межа однозв'язної області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Припустимо, що $\gamma(t) : [0,1] \to \Gamma$ — нескінченно гладка 1-періодична параметризація межі $\Gamma$ така, що $|\gamma'(t) \neq 0|$ для будь-якого $t \in [0,1]$. Будемо вважати, що логарифмічна ємність межі $\Gamma$ не дорівнює 1. Як відомо (див. [18]), це гарантує існування і єдиність розв'язку рівняння (3.1).

Розглянемо стандартний розклад для (3.1)

$$Au := A_0 u + A_1 u = f, \tag{3.2}$$

де $u(t) = v(\gamma(t))|\gamma'(t)|,\ f(t) = g(\gamma(t)),$

$$(A_0)(t) = \int_0^1 \log|\sin \pi(t-s)| u(s)\, ds,$$

$$(A_1 u)(t) = \int_0^1 a_1(t,s) u(s)\, ds, \qquad a_1(t,s) = \begin{cases} \log \dfrac{|\gamma(t) - \gamma(s)|}{|\sin \pi(t-s)|}, & t \neq s, \\ \log\left(|\gamma'(t)/\pi|\right), & t = s. \end{cases} \tag{3.3}$$

Відомо (див. [23]), що ядро $a_1(t,s)$ оператора $A_1$ є $C^\infty$-гладкою 1-біперіодичною функцією, а власними функціями оператора $A_0$ є такі тригонометричні поліноми, що

$$A_0 e^{2\pi i k t} = \begin{cases} -(2|k|)^{-1} e^{2\pi i k t}, & k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ -\log 2, & k = 0. \end{cases}$$

Як і у пункті 2, будемо вважати, що ядро інтегрального оператора (3.3) $a_1(t,s) \in G_{\eta_1, \eta_2}$, $\eta_1 \geq 1, \eta_2 > 0$. Нехай

$$u \in M_{\nu,\rho} := \left\{ u \colon u = (-A_0)^\nu v, \|v\|_0 \leq \rho \right\} \tag{3.4}$$

при деякому $\nu > 0$.

Наслідуючи [12], припустимо, що замість точних значень функцій $f(t)$ і $\gamma(t,s)$ відомі лише деякі їхні збурення $f_\delta(t)$ і $\gamma_\varepsilon(t,s)$ у вузлах рівномірної сітки, для яких справджуються оцінки

$$\left( n^{-1} \sum_{j=1}^{n} |f_\delta(jn^{-1}) - f(jn^{-1})|^2 \right)^{1/2} \leq \delta \|f\|_{\nu+1}, \tag{3.5}$$

$$|\gamma_\varepsilon(im^{-1}) - \gamma(im^{-1})| \leq \varepsilon, \qquad |\gamma'_\varepsilon(im^{-1}) - \gamma'(im^{-1})| \leq m\varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{3.6}$$

а ядро неточно заданого оператора $A_{1,\varepsilon}$ має вигляд

$$a_{1,\varepsilon}(t,s) = \begin{cases} \log \dfrac{|\gamma_\varepsilon(t) - \gamma_\varepsilon(s)|}{|\sin \pi(t-s)|}, & t \neq s, \\ \log\left(|\gamma'_\varepsilon(t)/\pi|\right), & t = s. \end{cases}$$

Відмітимо (див. [12]), що з (3.6) випливає

$$\left| a_{1,\varepsilon}(km^{-1}, lm^{-1}) - a_1(km^{-1}, lm^{-1}) \right| \leq \begin{cases} \dfrac{c\varepsilon}{\left|\sin \dfrac{\pi(k-l)}{m}\right|}, & 1 \leq k, \quad l \leq m, \quad k \neq l, \\ cm\varepsilon, & k = l, \quad 1 \leq l \leq m. \end{cases}$$

Цей факт свідчить, що умова (3.6) є більш слабкою, ніж (2.13).

***3.1. Повністю дискретні методи. Апріорний випадок.*** Наближений розв'язок $u_{n,m,\varepsilon,\delta}$ задачі (3.1) у рамках ПДПМ будемо знаходити з рівняння

$$A_{m,\varepsilon} u_{n,m,\varepsilon,\delta} := A_0 u_{n,m,\varepsilon,\delta} + A_{1,m,\varepsilon} u_{n,m,\varepsilon,\delta} = Q_n f_\delta, \quad n > m, \tag{3.7}$$

де

$$(A_{1,m,\varepsilon}u)(t) = \int_0^1 a_{1_{m},\varepsilon}(t,s)u(s)\,ds,$$

$$a_{1,m,\varepsilon}(t,s) = (Q_{m,t} \otimes Q_{m,s}b_\varepsilon)(t,s) = \sum_{k,l \in Z_m} \hat{a}_{1,m,\varepsilon}(k,l)e^{2\pi i(kt+ls)},$$

$$\hat{a}_{1,m,\varepsilon}(k,l) = m^{-2} \sum_{p,q=1}^{m} e^{-\frac{2\pi i}{m}(kp+lq)} a_{1,\varepsilon}(pm^{-1}, qm^{-1}).$$

Наша мета полягає у встановленні оцінки похибки ПДПМ (3.7) у шкалі просторів $H^\lambda$.

**Теорема 3.1.** *Нехай $f$ належить $H^{\nu+1}$ та виконуються оцінки* (3.5), (3.6), *а* $a_1(t,s)$ *задовольняє умову* (2.9). *Тоді при* $0 \le \lambda \le \nu$ *для ПДПМ* (3.7) *має місце оцінка похибки*

$$\|u - u_{n,m,\varepsilon,\delta}\|_\lambda = O(n^{-\nu+\lambda} + n^{\lambda+1}\delta + m^{\lambda+1}e^{-\chi m^{1/\eta_1}} + m^{3/2+\lambda}\varepsilon). \tag{3.8}$$

Наступне твердження містить правила вибору параметрів дискретизації $m$ і $n$, що забезпечують найкращий порядок для оцінки (3.8) за величинами $\delta$ і $\varepsilon$.

**Теорема 3.2.** *Нехай параметри дискретизації* $m$ *і* $n$ *задовольняють співвідношення*

$$m = O\left(\log_1^\eta \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

$$n = O\big(\delta^{-\frac{1}{\nu+1}}\big).$$

*Тоді при* $0 \le \lambda \le \nu$ *для похибки методу* (3.7) *справджується оцінка*

$$\|u - u_{n,m,\varepsilon,\delta}\|_\lambda = O\left(\delta^{\frac{\nu-\lambda}{\nu+1}} + \varepsilon \log^{\eta_1(3/2+\lambda)} \frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{3.9}$$

***Зауваження* 3.1.** Результат, аналогічний теоремі 3.2 при $\lambda = 0$, було отримано у [22]. Таким чином, результати цього підпункту є узагальненням результатів [22] на випадок довільного $0 \le \lambda \le \nu$.

Розглянемо варіант ПДМК, що був запропонований для розв'язування рівняння Сімма у [12]. Суть цього методу полягає у заміні (3.1) наближеним рівнянням

$$A'_{n,\varepsilon}u_{n,\varepsilon,\delta} := A_0 u_n + Q_n A'_{1,n,\varepsilon}u_{n,\varepsilon,\delta} = Q_n f_\delta, \quad u_n \in \mathcal{T}_n, \tag{3.10}$$

де

$$(A'_{1,n,\varepsilon}u)(t) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} a_{1,\varepsilon}(t, jn^{-1})u(jn^{-1}).$$

Для методу (3.10) відомо (див. [12]), що при $n = O\big((\varepsilon+\delta)^{-\frac{1}{\nu+1}}\big)$ має місце оцінка похибки

$$\|u - u_{n,\varepsilon,\delta}\|_\lambda = O\left(\delta^{\frac{\nu-\lambda}{\nu+1}} + \varepsilon^{\frac{\nu-\lambda}{\nu+1}} \log \frac{1}{\delta+\varepsilon}\right) \tag{3.11}$$

у шкалі просторів $H^\lambda$, $-1 \le \lambda \le \nu$.

***Зауваження* 3.2.** Порівняємо оцінки точності (3.11) для ПДМК і (3.9) для ПДПМ у шкалах просторів $H^\lambda$. Очевидно, що за рівнем $\delta$ обидва методи дають однаковий порядок похибки, а величина компоненти, що залежить від $\varepsilon$, суттєво менша за порядком в (3.9), тобто для ПДПМ.

***Зауваження* 3.3.** У рамках ПДМК (3.10) за дискретну інформацію вибрано набір значень функціоналів

$$f_\delta(t_i), \quad \int\limits_0^1 a_{1,\varepsilon}(t,\tau_i)e_j(t)dt, \quad i,j = 1,\dots,n,$$

а для реалізації ПДПМ (3.7) необхідно використовувати значення функцій $f_\delta$ та $a_{1,\varepsilon}$ у вузлах рівномірної сітки. Оцінимо обсяг дискретної інформації, задіяної в межах обох згаданих методів. Отже, для ПДМК (3.10) і ПДПМ (3.7) маємо оцінки інформаційних витрат

$$O\Big((\varepsilon+\delta)^{-\frac{2}{\nu+1}}\Big),$$

$$O\left(\log^{2\eta_1}\frac{1}{\varepsilon}+\delta^{-\frac{2}{\nu+1}}\right)$$

відповідно. Очевидно, що за величиною $\varepsilon$ ПДПМ (3.7) є більш економічним.

Доведення теорем 3.1 та 3.2 наведено у статті [26].

***3.2. Повністю дискретні методи. Апостеріорний випадок.*** Мета наших досліджень у цьому підпункті полягає в знаходженні оцінок точності ПДПМ та ПДМК у випадку апостеріорного вибору параметра $n$. Для цього скористаємося принципом рівноваги, який у даному випадку набирає такого вигляду. Отже, через $D_N$ позначимо множину можливих значень параметра дискретизації $n$:

$$D_N = \Big\{n : n = 1,\dots,N, \quad N = \big[\delta^{-\frac{1}{\lambda+1}}\big]\Big\}.$$

Принцип рівноваги полягає у виборі номера $n_+$ за правилом

$$n_+ = \min\big\{n : n \in D_N^+\big\}, \tag{3.12}$$

де

$$D_N^+ = \left\{n \in D_N : \|u_{n,m,\delta,\varepsilon} - u_{j,m,\delta,\varepsilon}\|_\lambda \le 4j^{\lambda+1}\delta + \varepsilon\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^{\eta_1(\lambda+1)}, \ \ j > n\right\}.$$

Знайдемо оцінку похибки ПДПМ (3.7) у випадку вибору параметра $n$ згідно з принципом рівноваги (3.12).

**Теорема 3.3.** *Нехай $a_1(t,s)$ належить $G_{\eta_1,\eta_2}$, $\eta_1 \ge 1$, та виконуються оцінки* (3.5) *і* (2.13). *Якщо для методу* (3.7) *рівні дискретизації $n$ та $m$ вибрані згідно з правилом* (3.12) *та*

$$m = O\left(\log^{\eta_1}\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

*відповідно, то для $0 \le \lambda \le \nu$ маємо*

$$\|u - u_{\bar n,\bar m,\delta,\varepsilon}\|_\lambda = O\left(\delta^{\frac{\nu-\lambda}{\nu+1}} + \varepsilon\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^{\eta_1(\lambda+1)}\right). \tag{3.13}$$

***Зауваження* 3.4.** Якщо порівняти оцінки (3.9) та (3.13), які характеризують точність ПДПМ для рівняння Сімма в апріорному та апостеріорному випадках відповідно, то можна зробити висновок, що основні (степеневі) порядки по $\delta$ та $\varepsilon$ в обох оцінках збігаються, проте степінь логарифмічного множника більший у (3.9). Цей факт пояснюється різними умовами на похибку оператора: умова (3.6) є більш слабкою у порівнянні з (2.13).

***Зауваження* 3.5.** ПДПМ розглядався нами як для загального класу інтегральних рівнянь (див. пункт 2), так і окремо для рівняння Сімма (див. пункт 3). При цьому відповідні оцінки точності (2.25) та (3.13) відрізняються на степінь логарифмічного множника при $\varepsilon$. Додамо, що оцінка (3.13) є кращою, ніж (2.25), оскільки $\lambda' \geq \lambda + 1$. Покращити оцінку (2.25) вдалося за рахунок звуження можливих значень параметра $\lambda$ у шкалі просторів $H^\lambda$. Більш докладно, в теоремі 3.3 $0 \leq \lambda$, тоді як теорема 2.4 справджується при $-1 \leq \lambda$ для рівняння Сімма. Таке звуження розглядуваних $\lambda$ дозволяє застосувати іншу техніку доведення, що призводить до вказаного зменшення оцінки точності. Питання про можливість покращення оцінки (2.25) у випадку $-1 \leq \lambda < 0$ для рівняння Сімма залишається відкритим.

Перейдемо до ПДМК (3.10) і знайдемо його похибку у випадку вибору рівня дискретизації $n$ за принципом рівноваги (3.12), де множина $D_N^+$ в межах зазначеного методу набирає вигляду

$$D_N^+ = \Big\{ n \in D_N : \|u_{n,\delta,\varepsilon} - u_{j,\delta,\varepsilon}\|_\lambda \leq 4Cj^{\lambda+1}(\varepsilon \log j + \delta),\ j > n \Big\}. \tag{3.14}$$

**Теорема 3.4.** *Нехай* $a_1(t,s)$ *належить* $G_{\eta_1,\eta_2}$, $\eta_1 \geq 1$, *та виконуються оцінки* (3.5) *і* (3.6), *а параметр дискретизації* $n$ *вибрано згідно з* (3.12), (3.14). *Тоді для* $0 \leq \lambda \leq \nu$ *маємо*

$$\|u - u_{n_+,\delta,\varepsilon}\|_\lambda = O\Big( \delta^{\frac{\nu-\lambda}{\nu+1}} + \varepsilon^{\frac{\nu-\lambda}{\nu+1}} \log(\varepsilon+\delta)^{-1} \Big). \tag{3.15}$$

***Зауваження* 3.6.** Як випливає з оцінок (3.15) та (3.13), застосування принципу рівноваги в апостеріорному випадку надає можливість зберегти порядки точності обох повністю дискретних методів (пор. (3.15) та (3.9)), відомі в апріорному випадку.

***Зауваження* 3.7.** Теореми 3.3 та 3.4 дозволяють провести порівняльний аналіз апроксимаційних та інформаційних властивостей ПДПМ та ПДМК. Виявилося, що висновки, які викладено в зауваженнях 3.2, 3.3 в апріорному випадку, також справджуються і в апостеріорному випадку: ПДПМ (3.7) є більш точним та економічним, ніж ПДМК (3.10). Цей ефект досягається завдяки тому, що в межах ПДПМ проводиться розподіл параметрів дискретизації ядра та правої частини.

Доведення результатів цього підпункту див. у роботах [8, 9, 27].

***3.3. Оптимальність за порядком оцінок точності для ПДПМ та ПДМК.*** При наявності багатьох чисельних методів розв'язування тієї чи іншої задачі їх ефективність прийнято оцінювати шляхом порівняння за двома основними характеристиками: точністю наближення та обсягом використаних обчислювальних ресурсів (об'єм машинної пам'яті і час обчислень). Ефективність запропонованих нами методів в сенсі обсягу обчислювальних ресурсів вже обговорювалася вище. Що стосується оцінювання точності методів, то найбільш привабливими з цієї точки зору є оптимальні алгоритми. Нижче буде встановлено оптимальність досліджуваних нами варіантів ПДПМ та ПДМК.

Далі будемо вважати, що оператор $A_1$ (3.2) (а отже, і $A$) відомий точно, тобто $\varepsilon = 0$. Введемо величини, що характеризують точність наближеного розв'язування рівняння Сімма. Через $e_\lambda(M_{\nu,\rho}, \delta, \mathcal{G})$ позначимо найбільше відхилення будь-якого методу $\mathcal{G} : \mathcal{T}_n \to H^\lambda$, $\lambda \leq \nu$, на множині $M_{\nu,\rho}$ (див. (3.4)):

$$e_\lambda(M_{\nu,\rho}, \delta, \mathcal{G}) := \sup_{\substack{f^\delta \in \mathcal{T}_{n,\delta} \\ u \in M_{\nu,\rho}}} \|\mathcal{G}f^\delta - u\|_\lambda, \tag{3.16}$$

а через $E_\lambda(M_{\nu,\rho}, \delta)$ — найкращу точність наближення розв'язків із $M_{\nu,\rho}$ :

$$E_\lambda(M_{\nu,\rho}, \delta) := \inf_{\mathcal{G}} e_\lambda(M_{\nu,\rho}, \delta, \mathcal{G}).$$

Крім того, введемо допоміжну величину

$$\omega_{\lambda,\nu}(\delta) := \sup_{\substack{u \in M_{\nu,\rho} \\ \|Q_n Au\|_0 \le \delta}} \|u\|_\lambda,$$

яка традиційно називається модулем неперервності оберненого оператора і для якої виконується нерівність (див. [9])

$$\omega_{\lambda,\nu}(\delta) \le E_\lambda(M_{\nu,\rho}, \delta). \tag{3.17}$$

Наступне твердження містить оцінку знизу для модуля неперервності, яка підтверджує оптимальність (за порядком) оцінок, що були встановлені у теоремах 3.4 та 3.3.

**Теорема 3.5.** *Для будь-яких $\rho > 0$, $\lambda < \nu$ і достатньо малих $\delta$ виконується*

$$C\delta^{\frac{\nu-\lambda}{\nu+1}} \rho^{\frac{\lambda+1}{\nu+1}} \le \omega_{\lambda,\nu}(\delta).$$

З теореми 3.5 та співвідношення (3.17) безпосередньо випливає таке твердження.

**Теорема 3.6.** *Для будь-яких $\rho > 0$, $0 \le \lambda < \nu$ і достатньо малих $\delta$ виконується*

$$E_\lambda(M_{\nu,\rho}, \delta) = O\Big(\delta^{\frac{\nu-\lambda}{\nu+1}}\Big).$$

***Зауваження* 3.8.** Як випливає з теорем 3.3, 3.4 та 3.6, ми встановили, що ПДМК (3.10) та ПДПМ (3.7) забезпечують при $\lambda \in [0, \nu)$ оптимальну за порядком точність розв'язування рівняння Сімма (3.1) на множині розв'язків $M_{\nu,\rho}$ зі збуреною правою частиною $f_\delta$.

Доведення результатів цього підпункту див. у статті [9].

## Література


1. *Агранович М. С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. – М.: МЦНМО, 2013. – 379 с.
2. *Вайникко Г. М., Хаамярик У. А.* Проекционные методы и саморегуляризация некорректных задач // Изв. вузов. Математика. – 1985. – **29**. – С. 1 – 17.
3. *Вишик М. И., Грушин В. В.* Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы // Успехи мат. наук. – 1970. – **25**, № 4. – С. 29 – 56.
4. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
5. *Дынин А. С.* Сингулярные операторы произвольного порядка на многообразии // Докл. АН СССР. – 1961. – **141**, № 1. – С. 21 – 23.
6. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Итоги науки и техники. Сер. Математика. Мат. анализ / ВИНИТИ. – 1971. – С. 7 – 252.

7. *Семенова Е. В., Волынец Е. А.* Точность полностью дискретного проекционного метода на классе псевдодифференциальных уравнений // Динам. системы. – 2012. – **2**, № 3-4. – С. 309 – 321.
8. *Солодкий С. Г., Семенова Є. В.* Про апостеріорний вибір параметра дискретизації при розв'язуванні рівняння Сімма повністю дискретним проекційним методом колокації // Доп. НАН України. – 2012. – **21**, № 1. – С. 40 – 53.
9. *Солодкий С. Г., Семенова Е. В.* Об оптимальном порядке точности приближенного решения интегрального уравнения Симма // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2012. – **52**, № 3. – С. 472 – 482.
10. *Трев Ф.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. – М.: Мир, 1984. – 398 с.
11. *Эскин Г. И.* Краевые задачи и параметрикс для эллиптических систем псевдодифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1973. – **28**. – С.75 – 116.
12. *Bruckner G., Prossdorf S., Vainikko G.* Error bounds of discretization methods for boundary integral equations with noisy data // Appl. Anal. – 1996. – **63**, № 1-2. – P. 25 – 37.
13. *Calderon A.-P.* Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations // Amer. J. Math. – 1958. – **80**. – P. 16 – 36.
14. *Friedrichs K. O., Lax P. D.* Boundary value problems for first order operators // Communs Pure and Appl. Math. – 1965. – **18**. – P. 355 – 388.
15. *Engl H. W., Hanke M., Neubauer A.* Regularization of inverse problems. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1996. – 321 p.
16. *Harbrecht H., Pereverzev S., Schneider R.* Self-regularization by projection for noisy pseudodifferential equations of negative order // Numer. Math. – 2003. – **95**, № 1. – P. 123 – 143.
17. *Hörmander L.* Pseudo-differential operators // Communs Pure and Appl. Math. – 1965. – **18**. – P. 501 – 517.
18. *Hsiao G. C., Wendland W. L.* A finite element method for some integral equations of the first kind // J. Math. Anal. and Appl. – 1977. – **58**. – P. 449 – 481.
19. *Kohn J. J., Nirenberg L.* An algebra of pseudo-differential operators // Communs Pure and Appl. Math. – 1965. – **18**. – P. 269 – 305.
20. *Monvel, Louis Boutet.* Boundary problems for pseudo-differential operators // Acta Math. – 1971. – **126**. – P. 11 – 51.
21. *Pereverzev S., Schock E.* On the adaptive selection of the parameter in regularization of ill-posed problems // SIAM J. Numer. Anal. – 2005. – **43**, № 5. – P. 2060 – 2076.
22. *Pereverzev S. V., Prossdorf S.* On the characterization of self-regularization properties of a fully discrete projection method for Symm's integral equation // J. Integral Equat. and Appl. – 2000. – **12**, № 2. – P. 113 – 130.
23. *Saranen J.* A modified discrete spectral collocation method for first kind integral equations with logarithmic kernel // J. Integral Equat. and Appl. – 1993. – **5**, № 4. – P. 547 – 567.
24. *Saranen J., Vainikko G.* Periodic integral and pseudodifferential equations with numerical approximation. – Berlin: Springer, 2002. – 452 p.
25. *Semenova E. V.* Arithmetical complexity of modified fully discrete projection method for the periodic integral equations // J. Comput. and Appl. Math. – 2015. – **119**, № 2. – P. 60 – 77.
26. *Solodky S. G., Lebedeva E. V.* Error bounds of a fully discrete projection method for Symm's integral equation // Comput. Method and Appl. Math. – 2007. – **7**, № 3. – P. 255 – 263.
27. *Solodky S. G., Semenova E. V.* On accuracy of solving Symm's equation by a fully discrete projection method // J. Inverse and III-Posed Probl. – 2013. – **21**. – P. 781 – 797.
28. *Solodky S. G., Semenova E. V.* A class of periodic integral equation with numerical solving by a fully discrete projection method // Укр. мат. вісн. – 2014. – **11**, № 3. – С. 400 – 416.
29. *Taylor M.* Pseudo differential operators // Lect. Notes Math. – 1974. – **416**. – 155 p.

Одержано 21.11.17