УДК 517.572

О. В. Веселовська (Нац. ун-т „Львів. політехніка”)

ПРО АПРОКСИМАЦІЮ ТА ЗРОСТАННЯ ЦІЛИХ ГАРМОНІЧНИХ В $\mathbb{R}^n$ ФУНКЦІЙ

We establish a criterion of extendability of harmonic function in a ball of the n-dimensional space to harmonic entire function and study the growth of entire harmonic function in terms of the best approximation of these function by harmonic polynomials.

Установлен критерий продолжаемости гармонической в шаре функции n-мерного пространства к целой гармонической и исследован рост целой гармонической функции в терминах наилучшего приближения такой функции гармоническими полиномами.

Нехай $S^n = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| = 1\}$ — одинична сфера у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, з центром у початку координат, а $\omega_n = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ — площа її поверхні, де $\Gamma(x)$ — гамма-функція.

Через $Y^{(k)}$ будемо позначати сферичні гармоніки або сферичні функції Лапласа степеня k, які є звуженням на одиничну сферу S^n однорідного гармонічного многочлена степеня k [1, с. 157 – 174; 2].

Множину сферичних гармонік степеня k можна розглядати як підпростір простору $L^2(S^n)$ дійснозначних функцій зі скалярним добутком

$$(f, g) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{S^n} f(x) g(x) dS,$$

де dS — елемент площі сфери S^n. Якщо $Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}, \ldots, Y_{\gamma_k}^{(k)}$ — ортонормований базис у цьому підпросторі, то $\bigcup_{k=0}^{\infty} \left\{Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}, \ldots, Y_{\gamma_k}^{(k)}\right\}$ буде ортонормованим базисом у просторі $L^2(S^n)$. Тут $\gamma_k = \dfrac{(2k+n-2)(k+n-3)!}{k!(n-2)!}$ — кількість лінійно незалежних сферичних гармонік степеня k.

Нехай $K_R^n = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| \leq R\}$ — куля радіуса R у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, з центром у початку координат, а $\overline{K_R^n}$ — її замикання. Клас гармонічних у K_R^n і неперервних на $\overline{K_R^n}$ функцій позначимо через H_R, де $0 < R < \infty$.

Відомо [3, с. 94], що для функції $u \in H_R$ при всіх r, $0 < r < R$, має місце розклад у ряд Фурьє – Лапласа

$$u(rx) = \sum_{k=0}^{\infty} Y^{(k)}(x; u) r^k, \tag{1}$$

де $x \in S^n$,

$$Y^{(k)}(x; u) = a_1^{(k)} Y_1^{(k)}(x) + a_2^{(k)} Y_2^{(k)}(x) + \ldots + a_{\gamma_k}^{(k)} Y_{\gamma_k}^{(k)}(x),$$
$$a_j^{(k)} = \left(u, Y_j^{(k)}\right), \quad j = 1, \ldots, \gamma_k,$$

$\left(u, Y_j^{(k)}\right)$ — скалярний добуток в $L^2\left(S^n\right)$.

При $n = 2$ сферичні гармоніки зводяться до звичайних тригонометричних функцій кута, при $n \geq 3$ мають більш складну структуру і зв'язані з деякими многочленами спеціального вигляду.

Нехай $\nu = \dfrac{n-2}{2}$. Тоді [2]

$$Y^{(k)}(x;u) = \frac{k+\nu}{\nu\omega_n}\int\limits_{S^n} C_k^{\nu}\left[(x,y)\right]u(y)dS(y), \tag{2}$$

де $k \in Z_+,\ x \in S^n,\ (\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$, а C_k^{ν} — многочлени Гегенбауера або ультрасферичні многочлени степеня k і порядку ν [2], які визначаються із співвідношення

$$\left(1 - 2\tau t + \tau^2\right)^{-\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{\nu}(t)\tau^k,$$

де $|t| \leq 1,\ 0 \leq \tau < 1$.

У випадку тривимірного простору сферичні гармоніки, крім того, можуть бути виражені через многочлени Лежандра $P_k = P_k^0$ та приєднані многочлени Лежандра P_k^j (див., наприклад, [4, с. 151 – 155; 5, с. 179 – 184])

$$Y^{(k)}(x;u) = Y^{(k)}(\theta,\varphi;u) = \sum_{j=0}^{k}\left(a_{kj}^{(1)}\cos j\varphi + a_{kj}^{(2)}\sin j\varphi\right)P_k^j\left(\cos\theta\right),$$

де $k \in Z_+,\ \theta,\ \varphi$ — сферичні координати точки $x \in S^3,\ a_{kj}^{(i)},\ i = 1, 2,$ — коефіцієнти.

Функція U називається цілою гармонічною, якщо вона гармонічна у всьому просторі $\mathbb{R}^n$. Розглянемо функцію $M(r,U) = \max_{x\in S^m}|U(rx)|$, за допомогою якої будемо визначати зростання функції U.

Нехай функція γ визначена і диференційовна на проміжку $[a; +\infty)$ при деякому $a \geq 0$, строго монотонно зростає, при $t \to \infty$ прямує до ∞. Згідно з [6], вона належить класу L^0, якщо для будь-якої дійсної функції ψ такої, що $\psi(t) \to 0$ при $t \to \infty$, справджується рівність

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\gamma\left[\left(1+\psi(t)\right)t\right]}{\gamma(t)} = 1,$$

і належить класу Λ, якщо для всіх $c,\ 0 < c < \infty$,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\gamma(ct)}{\gamma(t)} = 1.$$

За допомогою функцій $\alpha,\ \beta$ із класів $L^0,\ \Lambda$ за аналогією з [6] визначимо узагальнений порядок і нижній порядок цілої гармонічної в $\mathbb{R}^n$ функції U рівностями

$$\rho_{\alpha\beta}(U) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\alpha(\ln M(r,U))}{\beta(r)},$$

$$\lambda_{\alpha\beta}(U) = \underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\alpha(\ln M(r,U))}{\beta(r)}.$$

Позначимо через Π_k множину гармонічних многочленів степеня не вищого за k. Похибку апроксимації функції $u \in H_R$ гармонічними многочленами $P \in \Pi_k$ визначимо як

$$E_R^k(u) = \inf_{P \in \Pi_k} \left\{ \max_{y \in \overline{K_R^n}} |u(y) - P(y)| \right\}. \tag{3}$$

У даній статті для функції з класу H_R, яка розкладається в ряд (1), встановлено необхідні та достатні умови, за яких її можна продовжити до цілої гармонічної в $\mathbb{R}^n$ функції, що формулюються в термінах найкращого наближення $E_R^k(u)$ цієї функції гармонічними многочленами, і досліджено зростання останньої. Аналогічне питання для гармонічних у тривимірному просторі функцій у випадку, коли вони зображуються рядом за приєднаними многочленами Лежандра, вивчено в [7].

Нехай

$$F(t,c) = \beta^{-1}(c\alpha(t)), \tag{4}$$

де β^{-1} — функція, обернена до β, c — стала.

Теорема 1. *Функція $u \in H_R$ продовжується до цілої гармонічної в $\mathbb{R}^n$ функції тоді і лише тоді, коли виконується рівність*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{E_R^k(u)} = 0, \tag{5}$$

де $E_R^k(u)$ визначені співвідношенням (3).

Якщо, крім того, для всіх c, $0 < c < \infty$, виконується одна з умов

а) $\alpha,\ \beta \in \Lambda,\ \dfrac{d\ln F(t,c)}{d\ln t} = O(1), \quad t \to \infty;$

б) $\alpha, \beta \in L^0,\ \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{d\ln F(t,c)}{d\ln t} = p, \quad 0 < p < \infty,$

де функція $F(t,c)$ визначена співвідношенням (4), *то узагальнений порядок $\rho_{\alpha\beta}(u)$ цілої гармонічної в $\mathbb{R}^n$ функції визначається рівністю*

$$\rho_{\alpha\beta}(u) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\alpha(pk))}{\beta\left(e^p R \left[E_R^k(u)\right]^{-1/k}\right)}, \tag{6}$$

причому при виконанні умови а) *число p вважається довільним додатним.*

Наведемо леми, необхідні для доведення цієї теореми.

Лема 1. *Якщо $u \in H_R$, то для всіх $k \in N$*

$$\max_{\xi \in S^n} \left| Y^{(k)}(\xi; u) \right| R^k \le \frac{4(k+2\nu)^{2\nu}}{(2\nu)!} E_R^{k-1}(u), \tag{7}$$

де $\nu = \dfrac{n-2}{2}$, а $E_R^{k-1}(u)$ визначені співвідношенням (3).

Доведення. Оскільки гармонічний многочлен є сумою однорідних гармонічних многочленів, то на підставі теореми додавання [5, с. 235] для многочленів Гегенбауера C_k^ν маємо

$$\int_{S^n} C_k^\nu\left[(\xi,\eta)\right] P(\tau\eta) dS(\eta) = 0,$$

де $P \in \Pi_{k-1}$, $0 < \tau < R$, $\xi \in S^n$. Враховуючи це, записуємо співвідношення (2) так:

$$Y^{(k)}(\xi;u)\tau^k = \frac{k+\nu}{\nu\omega_n}\int\limits_{S^n} C_k^\nu\left[(\xi,\eta)\right]\left\{u(\tau\eta)-P(\tau\eta)\right\}dS(\eta).$$

Звідси, враховуючи співвідношення $\max_{-1\le t\le 1}|C_k^\nu(t)| = C_k^\nu(1)$, де $C_k^\nu(1) = \dfrac{(k+2\nu-1)!}{(2\nu-1)!k!}$ [5, с. 176], знаходимо

$$\left|Y^{(k)}(\xi;u)\right|\tau^k \le \frac{k+\nu}{\nu\omega_n}\max_{\tau\eta\in\overline{K_R^n}}|u(\tau\eta)-P(\tau\eta)|\,C_k^\nu(1)\omega_n \le$$

$$\le \frac{2(k+2\nu)!}{(2\nu)!k!}\max_{\tau\eta\in\overline{K_R^n}}|u(\tau\eta)-P(\tau\eta)| \le \frac{2(k+2\nu)^{2\nu}}{(2\nu)!}\max_{\tau\eta\in\overline{K_R^n}}|u(\tau\eta)-P(\tau\eta)|\,. \qquad (8)$$

Далі, з визначення похибки $E_R^k(u)$ випливає, що існує многочлен $P^*\in\Pi_{k-1}$, для якого

$$\max_{\tau\eta\in\overline{K_R^n}}|u(\tau\eta)-P^*(\tau\eta)| \le 2E_R^{k-1}(u). \qquad (9)$$

Покладаючи в нерівності (8) $P = P^*$ і враховуючи нерівність (9), а також те, що τ є довільним, отримуємо твердження леми 1.

Нехай

$$B_k = \sqrt{\frac{(2\nu)!}{2}}\frac{1}{(k+2\nu)^\nu}\max_{\xi\in S^n}\left|Y^{(k)}(\xi;u)\right|.$$

Лема 2 [8]**.** *Для цілої гармонічної в* $\mathbb{R}^n$ *функції* u, *яка задана рядом* (1), *виконуються нерівності*

$$B_k \le M(r,u)r^{-k}$$

для всіх $k\in Z_+$ *і* $r>0$.

Лема 3. *Для цілої гармонічної в* $\mathbb{R}^n$ *функції* u *справедливою є оцінка*

$$E_R^k(u) \le \sqrt{\frac{2}{(2\nu)!}}(2\nu+1)!(k+2\nu)^{2\nu}M(r,u)\left(\frac{R}{r}\right)^k \qquad (10)$$

для всіх $r > eR$ *і* $k\in Z_+$.

Доведення. Нехай

$$Q_k(r\xi) = \sum_{j=0}^{k} Y^{(j)}(\xi;u)r^j,$$

де $r>0$, $\xi\in S^n$. Функція Q_k є гармонічним многочленом степеня не вищого за k, тобто $Q_k\in\Pi_k$. Виходячи з означення похибки $E_R^k(u)$ та враховуючи розклад (1) і лему 2, знаходимо

$$E_R^k(u) \le \max_{\tau\xi\in\overline{K_R^n}}|u(\tau\xi)-Q_k(\tau\xi)| \le \sum_{j=k+1}^{\infty}\max_{\xi\in S^n}\left|Y^{(j)}(\xi;u)\right|R^j \le$$

$$\le \sqrt{\frac{2}{(2\nu)!}} M\left(r;u\right) \sum_{j=k+1}^{\infty} (j+2\nu)^{\nu} \left(\frac{R}{r}\right)^{j} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{(2\nu)!}} M\left(r;u\right) \left(\frac{R}{r}\right)^{k} \sum_{j=k+1}^{\infty} (j+2\nu)^{\nu} \left(\frac{R}{r}\right)^{j-k}.$$

Оцінимо останню суму. Для $r > eR$ маємо

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} (j+2\nu)^{\nu} \left(\frac{R}{r}\right)^{j-k} \le e^{k} \sum_{j=k+1}^{\infty} (j+2\nu)^{2\nu} e^{-j} \le e^{k} \int\limits_{k}^{\infty} (t+2\nu)^{2\nu} e^{-t} dt.$$

Вибираючи $s = 2\nu$ і $h_s(t) = (t+s)^s$ та інтегруючи $s+1$ раз частинами, отримуємо

$$\int\limits_{k}^{\infty} h_s(t) e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \left(h_s(t) + h_s'(t) + \ldots + h_s^{(s)}(t) \right) \right] \Big|_{k}^{\infty}.$$

Враховуючи, що $h_s^{(i)}(t) = \dfrac{s!}{(s-i)!}(t+s)^{s-i}$ для $i = \overline{1,s}$, знаходимо

$$\int\limits_{k}^{\infty} h_s(t) e^{-t} dt = e^{-k} \sum_{i=0}^{s} \frac{s!(k+s)^{s-i}}{(s-i)!} = e^{-k} \sum_{i=0}^{2\nu} \frac{(2\nu)!(k+2\nu)^{2\nu-i}}{(2\nu-i)!}.$$

Остання сума не перевищує $(2\nu+1)!(k+2\nu)^{2\nu}$, що й доводить лему 3.

***Доведення теореми* 1.** Припустимо, що функція $u \in H_R$ продовжується до цілої гармонічної в $\mathbb{R}^n$ функції, яку також позначимо через u. Тоді співвідношення (5) безпосередньо випливає з оцінки (10). Навпаки, використовуючи нерівність (7), отримуємо

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} Y^{(k)}(\xi;u) r^k \right| \le \left| Y^{(0)}(\xi;u) \right| + \frac{4}{(2\nu)!} \sum_{k=1}^{\infty} (k+2\nu)^{2\nu} E_R^{k-1}(u) \left(\frac{r}{R}\right)^{k}, \tag{11}$$

звідки, згідно зі співвідношенням (5), випливає рівномірна збіжність на компактних підмножинах з $\mathbb{R}^n$ ряду в правій частині рівності (1). Отже, задавши функцію $u \in H_R$ рядом (1), продовжимо її на весь простір $\mathbb{R}^n$.

Доведемо співвідношення (6). Для цього розглянемо цілі функції комплексної змінної

$$f_1\left(z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(2\nu)!}}{\sqrt{2}\,(2\nu+1)!\,(k+2\nu)^{2\nu}} E_R^{k}(u) \left(\frac{z}{R}\right)^{k},$$

$$f_2\left(z\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2\nu)!} (k+2\nu)^{2\nu} E_R^{k-1}(u) \left(\frac{z}{R}\right)^{k}.$$

Використовуючи нерівності (10) та (11), для $r > eR$ отримуємо

$$\mu\left(r;f_1\right) \le M\left(r;u\right) \le \left| Y^{(0)}\left(\xi;u\right) \right| + M\left(r;f_2\right),$$

де $\mu\left(r;f_1\right)$ — максимальний член степеневого ряду функції $f_1\left(z\right)$, а $M\left(r;f_2\right)$ — максимум модуля функції $f_2\left(z\right)$. Звідси

$$\rho_{\alpha\beta}\left(f_1\right) \leq \rho_{\alpha\beta}(u) \leq \rho_{\alpha\beta}\left(f_2\right). \tag{12}$$

Використовуючи формулу, яка виражає узагальнений порядок цілої функції однієї комплексної змінної через коефіцієнти її степеневого ряду, знаходимо

$$\rho_{\alpha\beta}\left(f_1\right) = \rho_{\alpha\beta}\left(f_2\right) = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\alpha\left(pk\right)}{\beta\left(e^p R\left[E_R^k(u)\right]^{-1/k}\right)}.$$

Звідси, враховуючи нерівність (12), отримуємо рівність (6).

Теорему 1 доведено.

Зауважимо, що з теореми 1 для цілої гармонічної в $\mathbb{R}^n$ функції u можна отримати:

1) при $\alpha(t) = \beta(t) = \ln t$ формулу для порядку $\rho(u)$:

$$\rho(u) = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{k\ln k}{\ln \dfrac{1}{E_R^k(u)}};$$

2) при $\alpha(t) = t,\ \beta(t) = t^\rho,\ p = \dfrac{1}{\rho}$, де ρ — порядок функції u, формулу для типу $\sigma(u)$:

$$R\left(\sigma(u)\rho e\right)^{1/\rho} = \varlimsup_{k\to\infty} k^{1/\rho}\sqrt[k]{E_R^k(u)};$$

3) при $\alpha(t) = t,\ \beta(t) = t^{\rho(t)}$, де $\rho(t)$ — уточнений порядок функції u, формулу для типу $\sigma^*(u)$ відносно уточненого порядку $\rho(t)$:

$$R\left(\sigma^*(u)\rho e\right)^{1/\rho} = \varlimsup_{k\to\infty} \psi(k)\sqrt[k]{E_R^k(u)},$$

де $t = \psi\left(\tau\right)$ — функція, обернена до $\tau = t^{\rho(t)}$.

Теорема 2. *Нехай $u \in H_R$. Якщо виконується умова* (5), *то функція u продовжується до цілої гармонічної функції і*

$$\lambda_{\alpha\beta}(u) \geq \varliminf_{k\to\infty} \frac{\alpha(pk))}{\beta\left(e^p R\left[E_R^k(u)\right]^{-1/k}\right)}. \tag{13}$$

Якщо, крім того, частка $\dfrac{E_R^k(u)}{E_R^{k+1}(u)}$ є неспадною функцією від k і виконується одна з умов а), б) *теореми* 1, *то нерівність* (13) *перетворюється в рівність.*

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 1.

Наслідок. *Нехай u — ціла гармонічна в $\mathbb{R}^n$ функція. Тоді*

$$\lambda(u) \geq \varliminf_{k\to\infty} \frac{k\ln k}{\ln \dfrac{1}{E_R^k(u)}}. \tag{14}$$

Нерівність (14) *перетворюється у рівність, коли частка $\dfrac{E_R^k(u)}{E_R^{k+1}(u)}$ є неспадною функцією від k.*

Література

1. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 336 с.
2. *Berens H., Butzer P. L., Pawelke S.* Limitierungs verfahren von Reihen mehrdimensionaler Kugelfunktionen und deren Saturationsverhalten // Publ. Res. Inst. Math. Sci. – 1968. – P. 201 – 268.
3. *Тиман А. Ф., Трофимов В. Н.* Введение в теорию гармонических функций. – М.: Наука, 1968. – 208 с.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – 2-е изд. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 296 с.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – 2-е изд. – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 296 с.
6. *Шеремета М. Н.* Связь между асимптотикой аналитических функций и коэффициентами их степенных разложений: Автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук. – Ростов-на-Дону, 1969. – 14 с.
7. *Kapoor C. P., Nautiyal A.* Approximation of entire harmonic functions in R^3//Indian J. Pure and Appl. Math. – 1982. – **13**, № 9. – P. 1024 – 1030.
8. *Веселовская О. В.* О росте целых гармонических в $\mathbb{R}^n$ функций // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 10. – С. 13 – 17.

Одержано 10.02.17