УДК 517.51

С. Я. Янченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАЙКРАЩЕ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ З АНІЗОТРОПНИХ КЛАСІВ НІКОЛЬСЬКОГО – БЄСОВА, ВИЗНАЧЕНИХ НА $\mathbb{R}^d$

We establish the exact-order estimates for the best approximations of the functions from anisotropic Nikol'skii – Besov classes of functions of several variables by entire functions in the Lebesgue spaces.

Получены точные по порядку оценки наилучшего приближения функций из анизотропных классов Никольского – Бесова функций многих переменных целыми функциями в пространствах Лебега.

У цій статті досліджується питання найкращого наближення функцій з анізотропних класів Нікольського – Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ [1, 2], де параметр $\boldsymbol{r}$ — d-вимірний вектор з додатними координатами ($r_j > 0,\ j = \overline{1, d}$). Похибка наближення при цьому вимірюється у метриці простору $L_q(\mathbb{R}^d),\ 1 < p \le q < \infty$. В якості апарату наближення використовуються цілі функції експоненціального типу (див., наприклад, [3]) з носіями їх перетворення Фур'є в d-вимірних паралелепіпедах.

1. Основні позначення та означення класів Нікольського – Бєсова. Нехай $\mathbb{R}^d,\ d \ge 1,$ — d-вимірний евклідів простір з елементами $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$; $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$, — простір вимірних на $\mathbb{R}^d$ функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_p := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|.$$

Для $k \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^d$ означимо модуль гладкості k-го порядку функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ за змінною x_i, який будемо позначати $\omega_k(f, te_i)_p$, формулою

$$\omega_k(f, te_i)_p = \sup_{|\boldsymbol{h}| \le t} \|\Delta^k(f, \boldsymbol{h} e_i)\|_p = \sup_{|\boldsymbol{h}| \le t} \left\| \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} C_k^l f(\boldsymbol{x} + l \boldsymbol{h} e_i) \right\|_p,$$

де $|\boldsymbol{h}| = \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_d^2}$ — евклідова норма вектора $\boldsymbol{h}$, а e_i — одиничний вектор, який направлений уздовж осі x_i.

Нехай $r_i > 0,\ r_i = \bar{r}_i + \alpha_i$, де $\bar{r}_i$ — ціле, $0 < \alpha_i \le 1,\ i = \overline{1, d}$.

Означення 1. *Будемо говорити, що функція $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ належить простору $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p,\ \theta \le \infty,\ \boldsymbol{r} > 0,$ якщо вона має інтегровні в степені p на $\mathbb{R}^d$ часткові, узагальнені в сенсі Соболєва, похідні вигляду*

$$D_i^k f = \frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}, \qquad k = \overline{0, \bar{r}_i}, \qquad i = \overline{1, d},$$

і при цьому

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} = \|f\|_p + \sum_{i=1}^{d} \left(\int\limits_0^\infty t^{-\theta\alpha_i - 1} \omega^\theta_{1+[\alpha_i]}(D_i^{\bar{r}_i} f, te_i)_p dt \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty \quad \textit{при} \quad 1 \le \theta < \infty$$

та

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}} = \|f\|_{H^{\boldsymbol{r}}_p} = \|f\|_\infty + \sum_{i=1}^{d} \sup_{t>0} t^{-\alpha_i - 1} \omega_{1+[\alpha_i]}(D_i^{\bar{r}_i} f, te_i)_p < \infty \quad \textit{при} \quad \theta = \infty.$$

Зазначимо, що з так введеною нормою простори $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ будуть банаховими.

Простори $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ були введені О. В. Бєсовим [2], $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d) = H^{\boldsymbol{r}}_p(\mathbb{R}^d)$, де $H^{\boldsymbol{r}}_p(\mathbb{R}^d)$ — простори, які ввів С. М. Нікольський [1]. Далі, зберігаючи ті самі позначення, будемо розглядати класи $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, тобто одиничні кулі у просторах $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$:

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d) : \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \le 1 \right\}.$$

Крім цього, для спрощення викладок замість $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ та $H^{\boldsymbol{r}}_p(\mathbb{R}^d)$ будемо використовувати позначення $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ та $H^{\boldsymbol{r}}_p$.

Зазначимо, що важливим для встановлення результатів є той факт, що простори $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ зі зростанням параметра θ розширюються (див., наприклад, [3, с. 278]), тобто

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p,1} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta'} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty} = H^{\boldsymbol{r}}_p, \qquad 1 \le \theta < \theta' \le \infty. \tag{1}$$

Наведемо результат П. І. Лізоркіна (див. [4]), який дає можливість означити норму функцій із просторів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ в іншій формі, яка в подальшому зумовлює використання перетворення Фур'є в теорії даних просторів. Для цього попередньо наведемо необхідні означення.

Назвемо найкращим наближенням функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій степенів $\nu_1, \ldots, \nu_d$ величину

$$E_{\nu_1,\ldots,\nu_d}(f)_p = \inf_{g_{\nu_1,\ldots,\nu_d}} \|f - g_{\nu_1,\ldots,\nu_d}\|_p, \tag{2}$$

де інфімум береться по всіх цілих функціях $g_{\nu_1,\ldots,\nu_d}(x_1, \ldots, x_d) \in L_p(\mathbb{R}^d)$ степенів $\nu_1, \ldots, \nu_d$ відповідно за змінними $x_1, \ldots, x_d$.

Теорема А [4]. *Функція f належить простору $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, $\boldsymbol{r} > 0$, $1 \le p, \theta \le \infty$, тоді і тільки тоді, коли вона зображується збіжним у метриці простору $L_p(\mathbb{R}^d)$ рядом*

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{s=0}^{\infty} P_{\boldsymbol{a}^s}(\boldsymbol{x}), \qquad P_{\boldsymbol{a}^s}(\boldsymbol{x}) = P_{a_1^s,\ldots,a_d^s}(\boldsymbol{x}), \tag{3}$$

де $P_{\nu_1,\ldots,\nu_d}(\boldsymbol{x})$ — цілі функції степеня не вищого за $\nu_1, \ldots, \nu_d$ по кожній змінній $x_1, \ldots, x_d$ відповідно, і виконується умова

$$\left(\sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta} \|P_{\boldsymbol{a}^s}\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty, \quad \textit{де} \quad b = a_i^{r_i} > 1, \quad i = \overline{1,d}. \tag{4}$$

Окрім цього, має місце оцінка

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} \le C_1 \left(\sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta} \|P_{\boldsymbol{a}^s}\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}. \tag{5}$$

Якщо, крім того, частинні суми n-го порядку ряду (3) *реалізують найкраще наближення або дають порядок найкращого наближення, то вираз у лівій частині* (4) *і* $\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}}$ *еквівалентні, тобто разом із* (5) *має місце оцінка*

$$\left(\sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta} \|P_{\boldsymbol{a}^s}\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \le C_2 \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}}.$$

На основі теореми А дамо еквівалентне означення анізотропних просторів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, яким будемо користуватися у подальших міркуваннях. Для цього нагадаємо означення перетворення Фур'є (див., наприклад, [5]), з використанням якого дається відповідне означення.

Нехай $S = S(\mathbb{R}^d)$ — простір Л. Шварца основних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^d$ комплекснозначних функцій φ, що спадають на нескінченності разом зі своїми похідними швидше за будь-який степінь функції $|\boldsymbol{x}|^{-1}$ (див., наприклад, [5, 6] (гл. 2)). Через S' позначимо простір лінійних неперервних функціоналів на S. Зазначимо, що елементами простору S' є узагальнені функції. Якщо $f \in S'$ і $\varphi \in S$, то $\langle f, \varphi \rangle$ позначає значення f на φ.

Перетворення Фур'є $\mathfrak{F}\varphi \colon S \to S$ визначається згідно з формулою

$$(\mathfrak{F}\varphi)(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{t})} d\boldsymbol{t} \equiv \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda}).$$

Обернене перетворення Фур'є $\mathfrak{F}^{-1}\varphi \colon S \to S$ задається таким чином:

$$(\mathfrak{F}^{-1}\varphi)(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{t})} d\boldsymbol{\lambda} \equiv \widehat{\varphi}(\boldsymbol{t}).$$

Перетворення Фур'є узагальнених функцій $f \in S'$ (для нього ми зберігаємо те ж позначення) визначається згідно з формулою

$$\langle \mathfrak{F}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathfrak{F}\varphi \rangle \qquad (\langle \widetilde{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widetilde{\varphi} \rangle),$$

де $\varphi \in S$.

Обернене перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in S'$ також позначимо $\mathfrak{F}^{-1}f$, і визначається воно аналогічно прямому перетворенню Фур'є згідно з формулою

$$\langle \mathfrak{F}^{-1}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathfrak{F}^{-1}\varphi \rangle \qquad (\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle).$$

Зазначимо, що кожна функція $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$, визначає лінійний неперервний функціонал на S згідно з формулою

$$\langle f, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x}) \varphi(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}, \qquad \varphi \in S,$$

і, як наслідок, у цьому сенсі вона є елементом S'. Тому перетворення Фур'є функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$, можна розглядати як перетворення Фур'є узагальненої функції $\langle f, \varphi \rangle$.

Носієм узагальненої функції f будемо називати замикання $\overline{\mathfrak{N}}$ такої множини точок $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^d$, що для довільної $\varphi \in S$, яка дорівнює нулю в $\overline{\mathfrak{N}}$, виконується рівність $\langle f, \varphi \rangle = 0$. Носій узагальненої функції f будемо позначати через $\operatorname{supp} f$. Також будемо говорити, що функція f зосереджена на множині G, якщо $\operatorname{supp} f \subseteq G$.

У подальшому будемо користуватися такими позначеннями. Нехай функція f зображена інтегралом Фур'є

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x})} d\boldsymbol{\lambda}.$$

Тоді відрізком інтеграла Фур'є функції f назвемо вираз

$$S_{\boldsymbol{\sigma}}(f) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \ldots \int\limits_{-\sigma_d}^{\sigma_d} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x})} d\boldsymbol{\lambda},$$

де $\tilde{f}(\boldsymbol{\lambda})$ — перетворення Фур'є функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$.

Нехай $D_{\boldsymbol{a}^s} = D_{a_1^s, \ldots, a_d^s}$ — паралелепіпед: $|\lambda_j| < a_j^s$, $j = \overline{1, d}$, $s \geq 0$, а $\Gamma_{\boldsymbol{a}^s} = D_{\boldsymbol{a}^s} - D_{\boldsymbol{a}^{s-1}}$ при $s \geq 1$ і $\Gamma_{\boldsymbol{a}^0} = D_{\boldsymbol{a}^0}$. Покладемо

$$f_{\boldsymbol{a}^s} = S_{\boldsymbol{a}^s}(f) - S_{\boldsymbol{a}^{s-1}}(f) = \int\limits_{\Gamma_{\boldsymbol{a}^s}} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x})} d\boldsymbol{\lambda}, \qquad s \geq 0,$$

і

$$f_{\boldsymbol{a}^0} = S_{\boldsymbol{a}^0}(f) = \int\limits_{\Gamma_{\boldsymbol{a}^0}} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x})} d\boldsymbol{\lambda}.$$

Зображення функції f рядом

$$f = f_{\boldsymbol{a}^0} + \sum_{s=1}^{\infty} f_{\boldsymbol{a}^s} = \sum_{s=0}^{\infty} f_{\boldsymbol{a}^s}$$

будемо називати розшаруванням f ($\boldsymbol{a}$-розшаруванням f). У випадку, коли $f \in L_p$, $p > 2$, $S_{\boldsymbol{a}^s}(f)$ розуміють, взагалі кажучи, як результат дії на f деякого оператора, який в образах Фур'є зводиться до множення на характеристичну функцію області $D_{\boldsymbol{a}^s}$ (див. [5], § 3, гл. 1).

Для функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ розглянемо величину

$$\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(f)_p = \|f - S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(f)\|_p, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

яка називається наближенням функції f $\boldsymbol{a}^n$-відрізками інтеграла Фур'є.

У випадку $1 < p < \infty$ величини (2) і (6) мають один і той же порядок (див., наприклад, [4]), тобто для функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(f)_p \asymp E_{\boldsymbol{a}^n}(f)_p. \tag{7}$$

Далі для вектора $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, введемо величину

$$g(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\frac{1}{r_j}\right)^{-1}. \tag{8}$$

Зауважимо, що при $r_1 = r_2 = \ldots = r_d = r$ маємо $g(\boldsymbol{r}) = r$.

Тоді для норми функцій з анізотропних просторів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, згідно з теоремою А, можна записати співвідношення [4]

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta}\|f_{\boldsymbol{a}^s}\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty \quad \text{при} \quad 1 \leq \theta < \infty, \tag{9}$$

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{s\geq 0} b^s\|f_{\boldsymbol{a}^s}\|_p < \infty, \tag{10}$$

де $b = 2^{g(\boldsymbol{r})}$, тобто $a_j = 2^{g(\boldsymbol{r})/r_j}$, $j = \overline{1,d}$.

2. Наближення класів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ у метриці простору $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < p \leq q < \infty$. Попередньо сформулюємо твердження, яке буде істотно використовуватися при встановленні результатів.

Теорема Б [3, с. 150]. *Якщо $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, то для цілої функції експоненціального типу $g = g_{\boldsymbol{\nu}} \in L_{p_1}(\mathbb{R}^d)$ має місце „нерівність різних метрик”*

$$\|g_{\boldsymbol{\nu}}\|_{L_{p_2}(\mathbb{R}^d)} \leq 2^d \left(\prod_{j=1}^{d}\nu_k\right)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}} \|g_{\boldsymbol{\nu}}\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^d)}. \tag{11}$$

Наведемо одержані результати.

Теорема 1. *Нехай $1 < p \leq q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$. Тоді для $g(\boldsymbol{r}) > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ мають місце порядкові співвідношення*

$$\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta})_q \asymp E_{\boldsymbol{a}^n}(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta})_q \asymp 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r})-d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)}, \tag{12}$$

де $a_j = 2^{g(\boldsymbol{r})/r_j}$, $j = \overline{1,d}$.

Доведення. Спочатку встановимо в (12) оцінки зверху. Оскільки $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty} = H^{\boldsymbol{r}}_p$, $1 \leq \theta < \infty$, то шукану оцінку достатньо отримати для величини $\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(H^{\boldsymbol{r}}_p)_q$. В залежності від співвідношення між параметрами p і q розглянемо два випадки.

1. Нехай $1 < p = q < \infty$. Оскільки для $f \in H^{\boldsymbol{r}}_p$ згідно з (10) $\|f_{\boldsymbol{a}^s}\|_p \ll 2^{-sg(\boldsymbol{r})}$, то, скориставшись нерівністю Мінковського, будемо мати

$$\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(f)_p = \|f - S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(f)\|_p = \left\|\sum_{s=0}^{\infty} f_{\boldsymbol{a}^s} - S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(f)\right\|_p =$$

$$= \left\|\sum_{s=n}^{\infty} f_{\boldsymbol{a}^s}\right\|_p \leq \sum_{s=n}^{\infty}\|f_{\boldsymbol{a}^s}\|_p \leq \sum_{s=n}^{\infty} 2^{-sg(\boldsymbol{r})} \ll 2^{-ng(\boldsymbol{r})}.$$

2. Нехай тепер $1 < p < q < \infty$. Тоді для $f \in H_p^{\boldsymbol{r}}$, врахувавши (10) та скориставшись нерівностями Мінковського і різних метрик Нікольського (11), можемо записати

$$\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(f)_q = \|f - S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(f)\|_q = \left\| \sum_{s=n}^{\infty} f_{\boldsymbol{a}^s} \right\|_q \leq \sum_{s=n}^{\infty} \|f_{\boldsymbol{a}^s}\|_q \ll$$

$$\ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{sd\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|f_{\boldsymbol{a}^s}\|_p \ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{sd\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} 2^{-sg(\boldsymbol{r})} =$$

$$= \sum_{s=n}^{\infty} 2^{-s\left(g(\boldsymbol{r}) - d\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\right)} \ll 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r}) - d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)}.$$

Оцінку зверху для величини $\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(H_p^{\boldsymbol{r}})_q$ і, таким чином, згідно з (7) для найкращого наближення $E_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(H_p^{\boldsymbol{r}})_q$ встановлено.

Встановимо тепер у (12) оцінки знизу. Оскільки має місце вкладення $B_{p,1}^{\boldsymbol{r}} \subset B_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}}$, $1 < \theta \leq \infty$, то шукану оцінку достатньо отримати для величини $\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(B_{p,1}^{\boldsymbol{r}})_q$. Іншими словами, достатньо оцінити знизу величину $\|f - S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(f)\|_q$ для деякої функції $f \in B_{p,1}^{\boldsymbol{r}}$.

З цією метою розглянемо функцію $F_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$, на основі якої побудуємо функцію, для якої досягається оцінка (12).

Нехай $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^d$, $\boldsymbol{k} = (k, \ldots, k)$,

$$F_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} - \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j}$$

та

$$F_0(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin x_j}{x_j}.$$

Тоді для перетворення Фур'є функції $F_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ має місце співвідношення

$$\mathfrak{F} F_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \chi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\lambda}) = \prod_{j=1}^{d} \chi_k(\lambda_j),$$

де

$$\chi_k(\lambda_j) = \begin{cases} 1, & a_j^{k-1} < |\lambda_j| < a_j^k, \\ \frac{1}{2}, & |\lambda_j| = a_j^{k-1} \text{ або } |\lambda_j| = a_j^k, \\ 0 & \text{— в інших випадках,} \end{cases} \qquad \chi_0(x_j) = \begin{cases} 1, & |\lambda_j| < 1, \\ \frac{1}{2}, & |\lambda_j| = 1, \\ 0, & |\lambda_j| > 1. \end{cases}$$

Відповідно для оберненого перетворення будемо мати

$$\mathfrak{F}^{-1} \chi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\lambda}) = F_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}).$$

Зауважимо, що $F_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ — ціла функція з $L_p(\mathbb{R}^d)$, носій перетворення Фур'є якої зосереджено в $\Gamma_{\boldsymbol{a}^k}$.

Перш ніж безпосередньо перейти до встановлення оцінки знизу в (12), одержимо порядок величини

$$\|F_{\boldsymbol{k}}\|_p = \left\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} - \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right\|_p . \tag{13}$$

Для оцінки зверху будемо мати

$$\|F_{\boldsymbol{k}}\|_p = \left\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} - \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right\|_p \leq$$

$$\leq \left\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} \right\|_p + \left\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right\|_p =$$

$$= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} \right|^p \prod_{j=1}^{d} dx_j \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right|^p \prod_{j=1}^{d} dx_j \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^{d} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} \right|^p dx_j \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^{d} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right|^p dx_j \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^{d} \left(a_j^{k(p-1)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\sin x_j}{x_j} \right|^p dx_j \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^{d} \left(a_j^{(k-1)(p-1)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\sin x_j}{x_j} \right|^p dx_j \right)^{\frac{1}{p}} \ll$$

$$\ll \prod_{j=1}^{d} a_j^{\frac{k(p-1)}{p}} + \prod_{j=1}^{d} a_j^{(k-1)(p-1)/p} \ll \prod_{j=1}^{d} a_j^{k\left(1-\frac{1}{p}\right)} = \prod_{j=1}^{d} a_j^{k/p'} . \tag{14}$$

Врахувавши, що $a_j = 2^{g(\boldsymbol{r})/r_j}$, та співвідношення (8), оцінку (14) продовжимо таким чином:

$$\|F_{\boldsymbol{k}}\|_p \ll \prod_{j=1}^{d} a_j^{k/p'} = \prod_{j=1}^{d} 2^{kg(\boldsymbol{r})/r_j p'} = 2^{\frac{kg(\boldsymbol{r})}{p'} \sum\limits_{j=1}^{d} \frac{1}{r_j}} = 2^{\frac{kg(\boldsymbol{r})}{p'} \frac{d}{g(\boldsymbol{r})}} = 2^{\frac{dk}{p'}} . \tag{15}$$

При оцінюванні норми $\|F_{\boldsymbol{k}}\|_p$ знизу отримаємо

$$\|F_{\boldsymbol{k}}\|_p = \left\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} - \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right\|_p \geq$$

$$\geq \left| \left\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} \right\|_p - \left\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right\|_p \right| =$$

$$= \left| \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} \right|^p \prod_{j=1}^{d} dx_j \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right|^p \prod_{j=1}^{d} dx_j \right)^{\frac{1}{p}} \right| =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \left| \prod_{j=1}^{d} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} \right|^p dx_j \right)^{\frac{1}{p}} - \prod_{j=1}^{d} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right|^p dx_j \right)^{\frac{1}{p}} \right| \gg$$

$$\gg \left| \prod_{j=1}^{d} a_j^{\frac{k(p-1)}{p}} - \prod_{j=1}^{d} a_j^{\frac{(k-1)(p-1)}{p}} \right| \gg \left(2^{\frac{dk}{p'}} - 2^{\frac{d(k-1)}{p'}} \right) \gg 2^{\frac{dk}{p'}}. \qquad (16)$$

Співставивши (15) і (16), для $\|F_{\boldsymbol{k}}\|_p$ можемо записати порядкове співвідношення

$$\|F_{\boldsymbol{k}}\|_p \asymp 2^{\frac{dk}{p'}}. \qquad (17)$$

Далі розглянемо функцію

$$g_1(\boldsymbol{x}) = C_1 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r}) + \frac{d}{p'}\right)} F_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}),$$

де $\boldsymbol{n} = (n, \ldots, n) \in \mathbb{N}^d$, $1/p + 1/p' = 1$, $C_1 > 0$.

Покажемо, що з деякою сталою $C_1 > 0$ функція g_1 належить класу $B^{\boldsymbol{r}}_{p,1}(\mathbb{R}^d)$. Згідно з (9) та (17) маємо

$$\|g_1\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,1}} \asymp \sum_s 2^{sg(\boldsymbol{r})} \|f_{\boldsymbol{a}^s}(g_1)\|_p \asymp$$

$$\asymp \sum_s 2^{sg(\boldsymbol{r})} 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r}) + \frac{d}{p'}\right)} \|F_{\boldsymbol{n}}\|_p = 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r}) + \frac{d}{p'}\right)} \sum_s 2^{sg(\boldsymbol{r})} 2^{\frac{dn}{p'}} \ll$$

$$\ll 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r}) + \frac{d}{p'}\right)} 2^{ng(\boldsymbol{r})} 2^{\frac{dn}{p'}} = 1.$$

Оскільки за вибором функції g_1 для неї має місце співвідношення $S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(g_1) = 0$, то

$$\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(B^{\boldsymbol{r}}_{p,1})_q \geq \mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(g_1)_q = \|g_1 - S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(g_1)\|_q = \|g_1\|_q \gg$$

$$\gg 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r}) + \frac{d}{p'}\right)} \|F_{\boldsymbol{n}}\|_q \gg 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r}) + \frac{d}{p'}\right)} 2^{\frac{dn}{q'}} = 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r}) - d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\right)}.$$

Оцінку знизу в (12) встановлено.

Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** У випадку $r_1 = \ldots = r_d = r$, тобто для ізотропних класів Нікольського – Бєсова $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, оцінку (12) встановлено у [8]. Зазначимо також, що апроксимативні характеристики ізотропних класів $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ досліджувались у роботі [9].

***Зауваження* 2.** Анізотропні класи Нікольського – Бєсова функцій багатьох змінних, що визначені на $\mathbb{R}^d$, з точки зору знаходження точних за порядком значень деяких апроксимативних характеристик досліджувалися, зокрема, у роботах [10, 11], а ізотропні та анізотропні класи Нікольського – Бєсова періодичних функцій багатьох змінних — у роботах [12 – 15].

***Зауваження* 3.** В одномірному випадку $(d = 1)$ анізотропні класи Нікольського – Бєсова збігаються з класами Нікольського – Бєсова мішаної гладкості, які досліджувалися в роботах [16, 17]. Розв'язанню ряду екстремальних проблем апроксимації функцій, визначених на прямій, присвячено роботи С. Б. Вакарчука [18, 19], де також проведено детальний порівняльний аналіз завершених результатів, які пов'язані з розв'язком екстремальних задач теорії наближення в періодичному випадку і випадку всієї дійсної осі.

Література

1. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 244 – 278.
2. *Бесов О. В.* Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **60**. – С. 42 – 81.
3. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
4. *Лизоркин П. И.* Обобщенные гельдеровы пространства $B_{p,\theta}^{(r)}$ и их соотношения с пространствами Соболева $L_p^{(r)}$ // Сиб. мат. журн. – 1968. – **9**, № 5. – С. 1127 – 1152.
5. *Лизоркин П. И.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1969. – **105**. – С. 89 – 167.
6. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1967. – 436 с.
7. *Никольский С. М.* Теоремы вложения для классов обобщенных функций // Сиб. мат. журн. – 1968. – **9**, № 5. – С. 1107 – 1126.
8. *Янченко С. Я.* Наближення функцій з класів Бєсова цілими функціями у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$ // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 1. – С. 380 – 391.
9. *Янченко С. Я.* Наближення функцій з ізотропних класів Нікольського – Бєсова у рівномірній та інтегральній метриках // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 10. – С. 1423 – 1433.
10. *Jiang Yanjie, Liu Yongping.* Average widths and optimal recovery of multivariate Besov classes in $L_p(\mathbb{R}^d)$ // J. Approxim. Theory. – 2000. – **102**. – P. 155 – 170.
11. *Jiang Yanjie.* Optimal recovery of anisotropic Besov – Wiener classes // Anal. Math. – 2002. – **28**. – P. 77 – 88.
12. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики изотропных классов периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 4. – С. 513 – 523.
13. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Тригонометрические и ортопроекционные поперечники классов периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 10. – С. 1348 – 1366.
14. *Gensun Fang, Fred J. Hickernell, Huan Li.* Approximation on anisotropic Besov classes with mixed norms by standard information // J. Complexity. – 2005. – **21**. – P. 294 – 313.
15. *Миронюк В. В.* Тригонометричні наближення та колмогоровські поперечники анізотропних класів Бєсова періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 8. – С. 1117 – 1132.
16. *Wang Heping, Sun Yongsheng.* Approximation of multivariate functions with certain mixed smoothness by entire functions // Northeast. Math. J. – 1995. – **11**, № 4. – P. 454 – 466.
17. *Янченко С. Я.* Наближення класів $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$ функцій багатьох змінних цілими функціями спеціального вигляду // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 8. – С. 1124 – 1138.
18. *Вакарчук С. Б.* О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации функций на вещественной оси. I // Укр. мат. вісн. – 2012. – **9**, № 3. – С. 401 – 429.
19. *Вакарчук С. Б.* О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации функций на вещественной оси. II // Укр. мат. вісн. – 2012. – **9**, № 4. – С. 578 – 602.

Одержано 29.03.17