УДК 517.98+517.954

Ю. В. Богданский (Ин-т прикл. систем. анализа Нац. техн. ун-та Украины „КПИ им. И. Сикорского”, Киев)

ФОРМУЛА ГАУССА – ОСТРОГРАДСКОГО в L_2-ВЕРСИИ. ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ

We propose the L_2-version of the divergence theorem. The Green and Poisson operators associated with the infinite-dimensional version of the Dirichlet problem are investigated.

Запропоновано L_2-версію теореми Гаусса – Остроградського. Досліджуються оператори Гріна та Пуассона, що асоційовані з нескінченновимірним варіантом задачі Діріхле.

1. Предварительные сведения. Пусть H — сепарабельное вещественное гильбертово пространство $(\dim H \leq \infty)$, μ — неотрицательная конечная борелевская мера на H, G — ограниченная область в H с границей $S = \partial G$.

Пространство всех ограниченных непрерывных вещественных функций на H обозначим через $C_b = C_b(H)$; пространство всех непрерывных и ограниченных на H векторных полей $\mathbf{X}\colon H \to H$ — символом $C_b(H;H)$; пространство всех функций $f \in C_b$ (соответственно векторных полей $\mathbf{X} \in C_b(H;H)$), дифференцируемых по Фреше в каждой точке $x \in H$ с ограниченной и непрерывной на H производной $f'(\cdot)$ (соответственно $\mathbf{X}'(\cdot)$) — символом $C_b^1 = C_b^1(H)$ (соответственно $C_b^1(H;H)$). Символом $C^1(\overline{G})$ обозначим семейство всех функций на $\overline{G}$, допускающих продолжение на H до функций класса C_b^1; символом $C_0^1(G)$ — семейство функций из $C^1(\overline{G})$, которые равны нулю в некоторой ε-окрестности границы S. Аналогично определяем $C(\overline{G})$; $C(\overline{G};H)$ и $C^1(\overline{G};H)$.

Через $L^2(G) = L^2(G;\mu)$ обозначим пространство интегрируемых с квадратом функций на G по отношению к мере $\mu\,|_G$. Аналогично через $L^2(G;H) = L^2(G;H;\mu)$ обозначим пространство квадратично интегрируемых векторных полей на G. Норму в $L^2(G;H)$ задаем формулой $|||\mathbf{Z}|||^2 = \displaystyle\int_G \|\mathbf{Z}(x)\|^2\,d\mu$ (интегрируемость векторного поля понимаем в смысле конструкции Бохнера).

Через $\Phi_t = \Phi_t^{\mathbf{Z}}$ обозначим поток векторного поля $\mathbf{Z} \in C_b^1(H;H)$, через μ_t — сдвиг меры μ вдоль векторного поля $\mathbf{Z}$ $(\mu_t(A) = \mu(\Phi_t A)$ для каждого $A \in \mathcal{B}(H)$, $\mathcal{B}(H)$ — борелевская σ-алгебра в $H)$. Напомним, что дифференцируемость меры μ вдоль поля $\mathbf{Z}$ в сильном смысле (по Фомину) означает существование предела $\nu(A) = \lim_{t\to 0}\dfrac{1}{t}\big(\mu_t(A) - \mu(A)\big)$ для каждого $A \in \mathcal{B}(H)$. При этом $\nu = d_{\mathbf{Z}}\mu$ (производная меры μ вдоль поля $\mathbf{Z}$) является борелевской (знакопеременной) мерой, абсолютно непрерывной относительно меры μ. Соответствующую плотность $\dfrac{d\nu}{d\mu}$ принято называть логарифмической производной меры μ вдоль поля $\mathbf{Z}$, или дивергенцией поля $\mathbf{Z}$ (относительно меры μ): $\rho = \rho_\mu^{\mathbf{Z}} = \operatorname{div}\mathbf{Z} = \operatorname{div}_\mu \mathbf{Z} = \dfrac{d\nu}{d\mu}$.

Граница S области G предполагается гладким вложенным в H подмногообразием коразмерности 1, а поле единичной внешней нормали границы S — продолжимым до векторного поля $\mathbf{n} \in C_b^1(H;H)$. Дополнительно предполагаем также, что мера μ дифференцируема в сильном смысле вдоль поля $\mathbf{n}$. Существование поля $\mathbf{n}$ с указанными выше свойствами постулируем и говорим о *согласовании* (S *или* G) *с мерой* μ.

Для $\varepsilon > 0$ символом A_ε обозначаем ε-окрестность множества A. В работе [1] доказано, что при согласовании S с мерой μ имеет место равенство $\mu(S_\varepsilon) = O(\varepsilon)$ $(\varepsilon \to 0)$, поэтому [2] (предложение 1) $C_0^1(G)$ плотно в $L_2(G)$.

Согласованная с S мера μ индуцирует на S поверхностную меру [1, 2], которую обозначим μ_S или σ. Если u — ограниченная непрерывная функция на S и $\widehat{u}$ — ее продолжение до непрерывной ограниченной на H функции, то поверхностная мера σ корректно определяется формулой, которая должна выполняться для всех ограниченных непрерывных на S функций:

$$\int\limits_S u\,d\sigma = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}}G}\widehat{u}\,d\mu,$$

и при этом σ не зависит от выбора продолжения $\mathbf{n}$ поля единичной внешней нормали к S (см. [1 – 3]).

Если $u \in C_b^1$, то имеет место формула (см. [2])

$$\int\limits_S u\,d\sigma = \int\limits_G (\mathbf{grad}\,u, \mathbf{n})\,d\mu + \int\limits_G u\cdot\rho_\mu^{\mathbf{n}}\,d\mu. \tag{1}$$

Из результатов работы [1] следует возможность определения меры μ_S и в том случае, когда мера μ дифференцируема вдоль поля $\mathbf{Z} \in C_b^1(H;H)$, строго трансверсального к поверхности S. Последнее условие в терминах скалярного произведения означает, что

$$\inf\Big\{\big|\big(\mathbf{Z}(x), \mathbf{n}(x)\big)\big| \mid x \in S\Big\} > 0.$$

В этом случае равенство (1) для $u \in C_b^1$ переходит в следующее:

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{Z}}G} u\,d\mu = \int\limits_S (\mathbf{Z},\mathbf{n})u\,d\sigma = \int\limits_G (\mathbf{grad}\,u, \mathbf{Z})\,d\mu + \int\limits_G u\cdot \mathrm{div}_\mu\,\mathbf{Z}\,d\mu, \tag{2}$$

и мы также будем говорить о согласовании S (или G) с мерой μ.

Положим $C^1(S) = \big\{u\big|_S \;\big|\; u \in C_b^1\big\}$. $C^1(S)$ плотно в $L_2(S,\sigma)$ (см. [4]).

Рассмотрим оператор $\mathbf{grad} = \mathbf{grad}_G : L_2(G) \to L_2(G;H)$ с естественной областью определения $C^1(\overline{G})$ $(C^1(\overline{G}) \ni u \mapsto \mathbf{grad}\,u \in C(\overline{G};H))$. Для корректности задания этого оператора должно быть выполнено условие $\big(u, v \in C^1(\overline{G});\; u = v \,(\mathrm{mod}\,\mu)\big) \Longrightarrow \big(\mathbf{grad}\,u = \mathbf{grad}\,v\,(\mathrm{mod}\,\mu)\big)$. Данное требование выполнено, в частности, для тех мер μ, для которых неравенство $\mu(U) > 0$ имеет место для любого непустого открытого множества $U \subset H$ (полнота носителя меры μ). Последнее условие имеет место для квазиинвариантной меры μ, т. е. такой меры, для которой множество квазиинвариантных сдвигов h $(\mu_h(A) := \mu(A+h);\ \mu_h \sim \mu)$ содержит плотное в H линейное подмногообразие. Примером такой меры является гауссова мера, ядерный корреляционный оператор которой имеет плотный образ в H.

Далее на меру μ и область G наложим следующие условия:

а) оператор $\mathbf{grad}\colon L_2(G) \supset C^1(\overline{G}) \ni u \mapsto \mathbf{grad}\,u \in L_2(G;H)$ корректно определен и допускает замыкание $\overline{\mathbf{grad}} = \overline{\mathbf{grad}}_G$;

б) $\mathrm{div}_\mu\,\mathbf{n}\,\big|_G \in L_\infty(G)$.

Модельный пример меры, согласованной с поверхностью S, для которой выполняются одновременно условия а) и б), предложен в работе [5]. Соответствующая мера μ_φ определена формулой

$$\mu_\varphi(A) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mu(\Phi_t^{\mathbf{n}} A)\, dt,$$

где μ — гауссова мера с невырожденным ядерным корреляционным оператором, $A \in \mathcal{B}(H)$, $\varphi \in C_b^1(\mathbb{R})$, $\varphi \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, dt < \infty$. Существует константа C, для которой при всех $s \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\left|\varphi'(s)\right| \leq C\varphi(s)$.

Совместное выполнение условий а) и б) позволяет корректно ввести оператор следа $\gamma :$ $L_2(G) \to L_2(S) = L_2(S, \sigma)$ с областью определения $D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big)$ (см. [2]). При этом для функций $u \in C^1(\overline{G})$ полагаем $\gamma(u) = u\,|_S$. В работе [2] доказано существование константы C_1, для которой при всех $u \in C^1(\overline{G})$ выполняется неравенство $\|u\,|_S\,\|_{L_2(S)} \leq C_1(\|u\|_{L_2(G)} + \||\mathbf{grad}\, u\||)$. Поэтому оператор $C^1(\overline{G}) \ni u \mapsto u\,|_S \in L_2(S)$ корректно продолжаем на $D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big)$ до оператора γ, который представляет собой ограниченный оператор из банахова в норме графика пространства $D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big)$ в $L_2(S)$ и не зависит от продолжения $\mathbf{n}$ поля единичной внешней нормали к S.

В работе [3] доказано, что $\operatorname{Ker}\gamma$ совпадает с замыканием $C_0^1(G)$ по норме графика оператора $\overline{\mathbf{grad}}$.

Оператор $\operatorname{div} : L_2(G; H) \to L_2(G)$ определим формулой

$$\operatorname{div} = -\Big(\overline{\mathbf{grad}}\,\big|_{\operatorname{Ker}\gamma}\Big)^* = -\Big(\mathbf{grad}\,\big|_{C_0^1(G)}\Big)^*. \tag{3}$$

Аргументацию для введения оператора div формулой (3) нетрудно получить из (2) подстановкой $u \in C_0^1(G)$.

Теперь лапласиан по мере в L_2-версии введем равенством

$$\triangle = \Delta_G = \operatorname{div} \circ\, \overline{\mathbf{grad}}\,.$$

Если рассматривать Δ как оператор из $D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big)$ в $L_2(G)$, то он замкнут, поэтому $\operatorname{Ker}\triangle$ замкнуто в $D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big)$.

Пространство $D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big)$ — бесконечномерный аналог классического соболевского пространства $H^1(G)$ — является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения $(u, v)_\Gamma = \int_G uv\, d\mu + \int_G \big(\overline{\mathbf{grad}}\, u, \overline{\mathbf{grad}}\, v\big)\, d\mu$ (таковым оно предполагается в дальнейшем изложении). $\operatorname{Im}\gamma$ алгебраически изоморфно пространству $D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big)/_{\operatorname{Ker}\gamma} \cong D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big) \ominus$ $\ominus \operatorname{Ker}\gamma$ и может быть наделено индуцированным скалярным произведением

$$\big(\gamma(u), \gamma(v)\big)_\gamma = (u, v)_\Gamma,$$

где $u, v \in D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big) \ominus \operatorname{Ker}\gamma$, относительно которого оно становится гильбертовым.

В работе [1] была получена формула Гаусса – Остроградского для „классической” версии оператора div. Имеется в виду оператор $\mathbf{Z} \mapsto \operatorname{div}_\mu \mathbf{Z}$. Далее исследованию подлежит L_2-версия оператора div, определенная формулой (3).

2. Слабый поверхностный интеграл. Следующая лемма аналогична лемме 1 из работы [3].

Лемма 1. *Пусть* $u, v \in D(\,\overline{\mathbf{grad}}\,)$. *Тогда существует*

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}} G} uv\, d\mu = \int\limits_S \gamma(u)\gamma(v)\, d\sigma.$$

Доказательство. Пусть последовательности $u_m, v_m \in C^1(\overline{G})$ сходятся соответственно к $u,\ v$ в норме графика пространства $D(\,\overline{\mathbf{grad}}\,)$. Из неравенства

$$\int\limits_G |u_m v_m - uv|\, d\mu \le \|u_m\|_{L_2(G)} \|v_m - v\|_{L_2(G)} + \|v\|_{L_2(G)} \|u_m - u\|_{L_2(G)} \tag{4}$$

следует сходимость $u_m v_m \to uv$ в $L_1(G)$.

Сходимость $u_m\ \mathbf{grad}\, v_m \to u\, \overline{\mathbf{grad}}\, v$ в $L_1(G;H)$ следует из неравенства

$$\int\limits_G \|u_m\ \mathbf{grad}\, v_m - u\,\overline{\mathbf{grad}}\, v\|\, d\mu \le \|u_m - u\|_{L_2(G)}\, |||\mathbf{grad}\, v_m||| + \|u\|_{L_2(G)}\, \Big|\Big|\Big|\mathbf{grad}\, v_m - \overline{\mathbf{grad}}\, v\Big|\Big|\Big|\,.$$

Аналогично получим сходимость $v_m\ \mathbf{grad}\, u_m \to v\,\overline{\mathbf{grad}}\, u$ в $L_1(G;H)$, поэтому

$$\mathbf{grad}(u_m v_m) \to u\,\overline{\mathbf{grad}}\, v + v\,\overline{\mathbf{grad}}\, u \quad \text{в} \quad L_1(G;H). \tag{5}$$

Для $t \le 0$ обозначим

$$g_m(t) = \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}} G} u_m v_m\, d\mu, \qquad g(t) = \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}} G} uv\, d\mu.$$

Из неравенства (4) следует равномерная на $(-\infty; 0]$ сходимость последовательности функций g_m к g.

Поскольку в силу (2) для $t \le 0$ выполнено равенство

$$g_m'(t) = \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}} G} \big(\mathbf{grad}(u_m v_m), \mathbf{n}\big)\, d\mu + \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}} G} u_m v_m\, \mathrm{div}_\mu\, \mathbf{n}\, d\mu, \qquad \mathrm{div}_\mu\, \mathbf{n} \in L_\infty(G),$$

то из (4), (5) следует непрерывность функций g_m' и равномерная на $(-\infty; 0]$ сходимость последовательности функций g_m' к функции

$$\int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}} G} \big((u\,\overline{\mathbf{grad}}\, v + v\,\overline{\mathbf{grad}}\, u, \mathbf{n}) + uv \cdot \mathrm{div}_\mu\, \mathbf{n}\big)\, d\mu.$$

На основании классической теоремы анализа делаем вывод о существовании на $(-\infty; 0]$ функции

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}} G} uv\, d\mu = \lim_{m\to\infty} g_m'(t).$$

При этом имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}}G} uv\,d\mu = \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}}G}\Big((u\,\overline{\mathbf{grad}}\,v + v\,\overline{\mathbf{grad}}\,u, \mathbf{n}) + uv\cdot \operatorname{div}_\mu \mathbf{n}\Big)\,d\mu.$$

Поскольку последовательность $\gamma(u_m) = u_m|_S$ сходится в $L_2(S;\sigma)$ к функции $\gamma(u)$ и, аналогично, $\gamma(v_m)\to\gamma(v)$, то $\gamma(u_m v_m) = \gamma(u_m)\cdot\gamma(v_m)$ сходится в $L_1(S;\sigma)$ к $\gamma(u)\cdot\gamma(v)$. А поскольку $\int_S \gamma(u_m)\cdot\gamma(v_m)\,d\sigma = g_m'(0)$, то

$$\int\limits_S \gamma(u)\cdot\gamma(v)\,d\sigma = \lim_{m\to\infty} g_m'(0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}}G} uv\,d\mu.$$

Лемма 1 доказана.

Тем самым след γ сопоставляет функции $u\in D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big)$ непрерывный относительно нормы $L_2(S)$ функционал на $\operatorname{Im}\gamma$.

Зафиксируем $f\in L_2(G)$, и пусть для любой функции $u\in D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big)$ существует число

$$\varphi(u) = \varphi_f(u) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}}G} uf\,d\mu. \tag{6}$$

В силу леммы 5 из работы [3] для функции $u\in\operatorname{Ker}\gamma$ имеет место равенство $\int_{G\setminus\Phi_t^{\mathbf{n}}G} u^2\,d\mu = o(t^2),\ t\to 0-0$, поэтому значение $\varphi_f(u)$ зависит лишь от $\gamma(u)$.

Для фиксированного $t<0$ функционал $\varphi_t\colon u\mapsto \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_{G\setminus\Phi_t^{\mathbf{n}}G} uf\,d\mu$ непрерывен на $D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big)$ в норме $L_2(G)$, поэтому и в норме $D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big)$. Обозначив через $\Phi:\operatorname{Im}\gamma\to D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big)\ominus\operatorname{Ker}\gamma$ естественный изоморфизм, привносящий в $\operatorname{Im}\gamma$ структуру гильбертова пространства (см. п. 1), на основании теоремы Банаха – Штейнгауса приходим к выводу о непрерывности функционала $\alpha_f(h) = \varphi_f(\Phi h)$ на гильбертовом пространстве $\operatorname{Im}\gamma$.

Пусть функция $\widehat{\gamma}(f)\in\operatorname{Im}\gamma$ определена в соответствии с теоремой Рисса равенством $\big(\widehat{\gamma}(f), h\big)_\gamma = \alpha_f(h)$, справедливым для каждой функции $h\in\operatorname{Im}\gamma$.

Определение 1. *Обозначим через $D(\widehat{\gamma})$ множество функций из $L_2(G)$, для которых при всех $u\in D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big)$ определено число $\varphi_f(u)$ согласно формуле* (6), *не зависящее от продолжения $\mathbf{n}$ поля единичной внешней нормали к S. Для $f\in D(\widehat{\gamma})$ и $u\in D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big)$ число $w\displaystyle\int_S uf\,d\sigma := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\int_{\Phi_t^{\mathbf{n}}G} uf\,d\mu$ назовем слабым поверхностным интегралом на S функции uf.*

Линейный оператор $\widehat{\gamma}\colon D(\widehat{\gamma})\to\operatorname{Im}\gamma$ связан со слабым поверхностным интегралом соотношением

$$w\int\limits_S uf\,d\sigma = \big(\widehat{\gamma}(f), \gamma(u)\big)_\gamma. \tag{7}$$

При этом $D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big)\subset D(\widehat{\gamma})$, $\operatorname{Ker}\widehat{\gamma}\cap D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big) = \operatorname{Ker}\gamma$.

3. Основная теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\boldsymbol{X} \in D(\mathrm{div})$, $\mathbf{n} \in C_b^1(H;H)$ — *продолженное на* H *поле единичной внешней нормали к* S. *Тогда* $(\boldsymbol{X}, \mathbf{n}) \in D(\widehat{\gamma})$ *и для любой функции* $u \in D\big(\overline{\mathbf{grad}}\,\big)$ *имеет место равенство*

$$w \int\limits_S u(\boldsymbol{X}, \mathbf{n})\, d\sigma = \int\limits_G (u \cdot \mathrm{div}\, \boldsymbol{X} + (\overline{\mathbf{grad}}\, u, \boldsymbol{X}))\, d\mu. \tag{8}$$

Доказательство. *Шаг* 1. Функцию $t(\cdot)$ задаем формулой $\Phi\big(t(x), x\big) \in S$ (здесь $\Phi(t,x) = \Phi_t(x) = \Phi_t^{\mathbf{n}}(x)$). Функция $t(\cdot)$ определена в некоторой ε-окрестности S_ε поверхности S; $t(\cdot) \in C^1(S_\varepsilon)$ и (см. [2])

$$\mathbf{grad}\, t(x) = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\big(t(x), x\big)\right)^* \mathbf{n}(\Phi\big(t(x), x\big)). \tag{9}$$

Дифференцируя по s при $s = 0$ тождество $t(\Phi(s,x)) = t(x) - s$, получаем равенство $(\mathbf{grad}\, t(x), \mathbf{n}(x)) = -1$ всюду в S_ε. Поэтому

$$\mathbf{grad}\, t(x) = -a(x)\mathbf{n}(x) + \boldsymbol{\xi}(x), \tag{10}$$

где $\boldsymbol{\xi}(x) \perp \mathbf{n}(x)$ и $a(x) = \dfrac{1}{\|\mathbf{n}(x)\|^2}$.

Поскольку в S_ε имеет место равенство

$$\mathbf{n}(x) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\big(t(x), x\big)\right)^{-1} \mathbf{n}(\Phi\big(t(x), x\big)), \tag{11}$$

а $\|\mathbf{n}(\Phi\big(t(x), x\big))\| = 1$, то из (9)–(11) получим оценку

$$\big\|\boldsymbol{\xi}(x)\big\| \leq \left\| \frac{1}{\|\mathbf{n}(x)\|^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\big(t(x), x\big)\right)^{-1} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\big(t(x), x\big)\right)^* \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\big(t(x), x\big)\right)^{-1} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\big(t(x), x\big)\right)^* \right\| + \frac{\big|\|\mathbf{n}(x)\|^2 - 1\big|}{\|\mathbf{n}(x)\|^2} \left\| \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\big(t(x), x\big)\right)^{-1} \right\|. \tag{12}$$

Для каждого фиксированного $x \in H$ однопараметрическое операторное семейство $Y(t) = \dfrac{\partial}{\partial x}\, \Phi_t x$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{d}{dt}\, Y(t) = A(t)Y(t)$, где $A(t) = \mathbf{n}'(\Phi_t x)$, и начальному условию $Y(0) = I$.

При достаточно малых t существует $Y(t)^{-1}$ и имеют место равенства

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\,(Y(t))^* = (Y(t))^*(A(t))^*,\\
&\frac{d}{dt}\, Y(t)^{-1} = -Y(t)^{-1} \frac{d}{dt}\, Y(t) Y(t)^{-1} = -Y(t)^{-1} A(t),\\
&\frac{d}{dt}\,(Y(t)^{-1} - Y(t)^*) = -Y(t)^* A(t)^* - Y(t)^{-1} A(t).
\end{aligned} \tag{13}$$

Существует $\alpha > 0$ такое, что при всех $t \in (-\alpha, \alpha)$ и $x \in H$ выполняются неравенства $\|Y(t)\| \leq 2$, $\|(Y(t))^{-1}\| \leq 2$ (см. [6, 7]). Полагая $K = \sup_{x \in H} \|\mathbf{n}'(x)\| < +\infty$, из (13) при всех

$x \in H$ и $t \in (-\alpha, \alpha)$ получаем оценку

$$\left\| \frac{d}{dt}\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(t,x)\right)^{-1} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(t,x)\right)^{*}\right)\right\| \leq 4K,$$

откуда при всех $x \in G \setminus \Phi_{-\delta}G$ ($\delta \in (0,\alpha)$) следует выполнение неравенства

$$\left\| \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(t,x)\right)^{-1} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(t,x)\right)^{*}\right\| \leq 4K\delta. \tag{14}$$

Поскольку $\dfrac{d}{dt}\,\mathbf{n}(\Phi_t x) = \mathbf{n}'(\Phi_t x)\mathbf{n}(\Phi_t x)$ и $\|\mathbf{n}(\Phi_0 x)\| = 1$ для $x \in S$, получаем для $x \in S$ оценку $\|\mathbf{n}(\Phi_t x)\| \leq e^{K|t|}$.

Уменьшив при необходимости $\alpha > 0$, для $\delta \in (0,\alpha)$, $x \in G \setminus \Phi_{-\delta}G$ получим также оценки

$$\begin{gathered} \frac{1}{2} \leq \|\mathbf{n}(x)\| \leq 2, \\ \big|\|\mathbf{n}(x)\| - 1\big| \leq e^{K\delta} - 1 \leq 2K\delta, \end{gathered} \tag{15}$$

поэтому для $x \in G \setminus \Phi_{-\delta}G$ справедлива оценка

$$\frac{\big|\|\mathbf{n}(x)\|^2 - 1\big|}{\|\mathbf{n}(x)\|^2} \left\| \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\big(t(x), x\big)\right)^{-1}\right\| \leq 48K\delta. \tag{16}$$

Теперь из (12), (14), (16) получаем равенство

$$\|\boldsymbol{\xi}(x)\| = O(t(x)) \quad \text{при} \quad t(x) \to 0. \tag{17}$$

Шаг 2. Пусть для $\delta > 0$ непрерывная функция $\beta_\delta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задана условиями $\beta_\delta(t) = 0$ при $t \leq 0$, $\beta_\delta(t) = \dfrac{1}{\delta}\,t$ при $t \in [0,\delta]$ и $\beta_\delta(t) = 1$ при $t \geq \delta$. Тогда $\beta'_\delta(t) = 0$ при $t \in$ $\in (-\infty, 0) \cup (\delta, +\infty)$, $\beta'_\delta(t) = \dfrac{1}{\delta}$ при $t \in (0,\delta)$.

Пусть $\delta \in (0,\varepsilon)$ и функция v_δ определена в $\overline{G}$ условием $v_\delta(x) = \beta_\delta(t(x))$ для тех x, для которых функция $t(x)$ определена, и $v_\delta(x) = 1$ для остальных $x \in G$. Покажем, что $v_\delta \in \operatorname{Ker}\gamma$.

Возьмем последовательность функций $\varphi_m \in C^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющую условиям $\varphi_m(t) =$ $= 0$ при $t \leq \dfrac{1}{m} < \dfrac{\delta}{3}$, $\varphi_m(t) = 1$ при $t \geq \delta$, $\varphi'_m \to \beta'_\delta$ в $L_2(\mathbb{R})$ и последовательность $\{\varphi'_m\}$ равномерно ограничена. Тогда $\varphi_m \circ t \in C_0^1(G)$. В качестве $\{\varphi_m\}$ можно использовать последовательность функций

$$\varphi_m(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \omega_m(s)\,ds,$$

где

$$\omega_m(s) = 0 \quad \text{при} \quad s \in \left(-\infty, \frac{1}{m}\right] \cup [\delta, +\infty),$$

$$\omega_m(s) = \frac{m^2}{m\delta - 2}\left(s - \frac{1}{m}\right) \quad \text{при} \quad s \in \left[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}\right],$$

$$\omega_m(s) = -\frac{m^2}{m\delta - 2}\,(s - \delta) \quad \text{при} \quad s \in \left[\delta - \frac{1}{m}, \delta\right],$$

и

$$\omega_m(s) = \frac{m}{m\delta - 2} \quad \text{при} \quad s \in \left[\frac{2}{m}, \delta - \frac{1}{m}\right].$$

Поскольку для $s \in [0, \delta]$ выполнено неравенство

$$|\varphi_m(s) - \beta_\delta(s)| \le \int\limits_0^s |\varphi'_m(s) - \beta'_\delta(s)|\, ds \le \sqrt{\delta}\, \|\varphi'_m - \beta'_\delta\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

то последовательность функций $\varphi_m \circ t$ равномерно на $\overline{G}$ сходится к v_δ.

Осталось доказать сходимость в $L_2(G;H)$ последовательности $\mathbf{grad}(\varphi_m \circ t)$.

Положим $\mathbf{Z} = (\beta'_\delta \circ t)\, \mathbf{grad}\, t(\cdot) \in L_2(G;H)$. Здесь и далее используем тот факт, что $\mu(S) = \mu(\Phi_{-\delta}S) = 0$ (см. [1]). Тогда

$$\int\limits_G \|\,\mathbf{grad}(\varphi_m \circ t) - \mathbf{Z}\|^2\, d\mu = \int\limits_G \left\|\varphi'_m(t(x)) \cdot \mathbf{grad}(t(x)) - \beta'_\delta(t(x)) \cdot \mathbf{grad}(t(x))\right\|^2 d\mu \to 0$$

(в силу (9) и теоремы Лебега об ограниченной сходимости).

Итак, $v_\delta \in \operatorname{Ker}\gamma$, $\overline{\mathbf{grad}}\, v_\delta = (\beta'_\delta \circ t) \cdot \mathbf{grad}\, t$.

Шаг 3. Пусть $u \in D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big)$ и $u_m \in C^1(\overline{G})$ такова, что $u_m \to u$ в $D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big)$. Поскольку $\mathbf{X} \in D(\operatorname{div})$, то $u_m\mathbf{X} \in D(\operatorname{div})$ и при этом (см. [5])

$$\operatorname{div}(u_m\mathbf{X}) = u_m \cdot \operatorname{div}\mathbf{X} + (\mathbf{grad}\, u_m, \mathbf{X}).$$

Переходя в обеих частях равенства

$$\int\limits_G \big(u_m \cdot \operatorname{div}\mathbf{X} + (\mathbf{grad}\, u_m, \mathbf{X})\big) v\, d\mu = -\int\limits_G u_m(\mathbf{X}, \overline{\mathbf{grad}}\, v)\, d\mu,$$

справедливого при всех $v \in \operatorname{Ker}\gamma$ (см. (3)), к пределу $m \to \infty$, убеждаемся, что для достаточно малых $\delta > 0$ имеет место равенство

$$\int\limits_G \big(u \cdot \operatorname{div}\mathbf{X} + (\,\overline{\mathbf{grad}}\, u, \mathbf{X})\big) v_\delta\, d\mu = -\int\limits_G u(\mathbf{X}, \overline{\mathbf{grad}}\, v_\delta)\, d\mu, \tag{18}$$

так как $v_\delta \in \operatorname{Ker}\gamma$.

Левая часть равенства (18) при $\delta \to 0$ стремится к $\int_G \big(u \cdot \operatorname{div}\mathbf{X} + (\,\overline{\mathbf{grad}}\, u, \mathbf{X})\big)\, d\mu$.

Поскольку $\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\, v_\delta\big)(x) = \beta'_\delta(t(x)) \left(-\dfrac{1}{\|\mathbf{n}(x)\|^2}\, \mathbf{n}(x) + \boldsymbol{\xi}(x)\right)$, то правая часть равенства (18) раскладывается в сумму:

$$-\int\limits_G (u\mathbf{X}, \overline{\mathbf{grad}}\, v_\delta)\, d\mu = \frac{1}{\delta}\int\limits_{G\setminus\Phi_{-\delta}G}\left(u\mathbf{X}, \frac{1}{\|\mathbf{n}(\cdot)\|^2}\,\mathbf{n}(\cdot)\right)d\mu - \frac{1}{\delta}\int\limits_{G\setminus\Phi_{-\delta}G}(u\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})\, d\mu. \tag{19}$$

В силу (17) и неравенства

$$\left|\frac{1}{\delta}\int\limits_{G\setminus\Phi_{-\delta}G}(u\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})\, d\mu\right| \le \frac{1}{\delta}\sup_{G\setminus\Phi_{-\delta}G}\|\boldsymbol{\xi}(\cdot)\|\, d\mu\int\limits_{G\setminus\Phi_{-\delta}G}|u|\|\mathbf{X}(\cdot)\|\, d\mu$$

второе слагаемое в правой части равенства (19) стремится к нулю при $\delta\to 0$, поэтому существует предел

$$\lim_{\delta\to 0+}\frac{1}{\delta}\int\limits_{G\setminus\Phi_{-\delta}G}\left(u\mathbf{X}, \frac{1}{\|\mathbf{n}(\cdot)\|^2}\,\mathbf{n}(\cdot)\right)d\mu.$$

Покажем, что последний предел совпадает с $\lim_{\delta\to 0+}\dfrac{1}{\delta}\displaystyle\int_{G\setminus\Phi_{-\delta}G}(u\mathbf{X}, \mathbf{n})\, d\mu$. Имеем

$$\left|\frac{1}{\delta}\int\limits_{G\setminus\Phi_{-\delta}G}\left(u\mathbf{X}, \left(1 - \frac{1}{\|\mathbf{n}(\cdot)\|^2}\right)\mathbf{n}(\cdot)\right)d\mu\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\delta}\sup_{G\setminus\Phi_{-\delta}G}\frac{\big|\|\mathbf{n}(x)\|^2 - 1\big|}{\|\mathbf{n}(x)\|}\int\limits_{G\setminus\Phi_{-\delta}G}|u|\,\|\mathbf{X}(\cdot)\|\, d\mu \to 0$$

при $\delta\to 0$, поскольку из (15) следует равенство

$$\sup_{G\setminus\Phi_{-\delta}G}\frac{\big|\|\mathbf{n}(x)\|^2 - 1\big|}{\|\mathbf{n}(x)\|} = O(\delta), \quad \delta\to 0+.$$

Тем самым для $u\in D\big(\overline{\mathbf{grad}}\,\big)$, $\mathbf{X}\in D(\mathrm{div})$ получено равенство

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}}G} u(\mathbf{X}, \mathbf{n})\, d\mu = \int\limits_G\big(u\cdot\mathrm{div}\,\mathbf{X} + \big(\,\overline{\mathbf{grad}}\, u, \mathbf{X}\big)\big)\, d\mu. \tag{20}$$

Шаг 4. Поскольку правая часть равенства (20) не зависит от выбора поля $\mathbf{n}$, то для доказательства принадлежности функции $(\mathbf{X}, \mathbf{n})$ области определения $D(\widehat{\gamma})$ оператора $\widehat{\gamma}$ достаточно проверить равенство

$$\int\limits_{G\setminus\Phi_{-t}^{\mathbf{n}}G} u(\mathbf{X}, \mathbf{n} - \mathbf{n}_1)\, d\mu = o(t), \quad t\to 0, \tag{21}$$

где $\mathbf{n}, \mathbf{n}_1 \in C_b^1(H; H)$ — два различных продолжения поля единичной внешней нормали к поверхности S.

Равенство (21) непосредственно следует из липшицевости функции $\|\mathbf{n}(\cdot) - \mathbf{n}_1(\cdot)\|$, равенства $\|\mathbf{n}(x) - \mathbf{n}_1(x)\| = 0$ для $x\in S$ и оценки

$$\left|\int\limits_{G\setminus\Phi_{-t}^{\mathbf{n}}G} u(\mathbf{X}, \mathbf{n} - \mathbf{n}_1)\, d\mu\right| \le \sup_{G\setminus\Phi_{-t}^{\mathbf{n}}G}\|\mathbf{n}(\cdot) - \mathbf{n}_1(\cdot)\|\int\limits_{G\setminus\Phi_{-t}^{\mathbf{n}}G}|u|\|\mathbf{X}(\cdot)\|\, d\mu.$$

Теорема 1 доказана.

4. Формула Гаусса – Остроградского. Формулы Грина. В силу формулы (7) формулу (8) можно представить в виде

$$(\gamma(u),\widehat{\gamma}((\mathbf{X},\mathbf{n})))_\gamma = \int\limits_G \big(u\cdot \operatorname{div}\mathbf{X} + \big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,u,\mathbf{X}\big)\big)\,d\mu.$$

В случае, когда $u,v\in D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big)$, лемма 1 и равенство (6) приводят к тождествам

$$\big(\widehat{\gamma}(u),\gamma(v)\big)_\gamma = \big(\gamma(u),\gamma(v)\big)_{L_2(S)} = \big(\gamma(u),\widehat{\gamma}(v)\big)_\gamma. \tag{22}$$

Поэтому в случае, когда $\operatorname{div}\mathbf{X}\in D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big)$, формула (8) принимает вид

$$\int\limits_S \gamma(u)\gamma((\mathbf{X},\mathbf{n}))\,d\sigma = \int\limits_G \big(u\cdot \operatorname{div}\mathbf{X} + \big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,u,\mathbf{X}\big)\big)\,d\mu. \tag{23}$$

Следующие утверждения являются непосредственными следствиями теоремы 1.

***Следствие* 1** (формула Гаусса – Остроградского)**.** *Пусть $\boldsymbol{X}\in D(\operatorname{div})$. Тогда $(\boldsymbol{X},\mathbf{n})\in D(\widehat{\gamma})$ и имеет место равенство*

$$(1,\widehat{\gamma}((\boldsymbol{X},\mathbf{n})))_\gamma = w\int\limits_S (\boldsymbol{X},\mathbf{n})\,d\sigma = \int\limits_G \operatorname{div}\boldsymbol{X}\,d\mu.$$

Если же $(\mathbf{X},\mathbf{n})\in D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big)$, то в силу (23) получим равенство

$$\int\limits_S \gamma((\mathbf{X},\mathbf{n}))\,d\sigma = \int\limits_G \operatorname{div}\mathbf{X}\,d\mu.$$

Для $u\in D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big)$ введем обозначение $\dfrac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} := (\overline{\mathbf{grad}}\,u,\mathbf{n})$. В силу теоремы 1, если $u\in D(\Delta)$, то $\dfrac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\in D(\widehat{\gamma})$.

***Следствие* 2** (первая формула Грина)**.** *Пусть $v\in D(\Delta)$, $u\in D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big)$. Тогда имеет место равенство*

$$\left(\gamma(u),\widehat{\gamma}\left(\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}\right)\right)_\gamma = w\int\limits_S u\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}\,d\sigma = \int\limits_G \big(u\cdot\Delta v + \big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,u,\overline{\mathbf{grad}}\,v\big)\big)\,d\mu. \tag{24}$$

В случае, когда $\dfrac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}\in D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big)$, равенство (24) принимает вид

$$\int\limits_S \gamma(u)\,\gamma\left(\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}\right)d\sigma = \int\limits_G \big(u\cdot\Delta v + \big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,u,\overline{\mathbf{grad}}\,v\big)\big)\,d\mu.$$

***Следствие* 3** (вторая формула Грина)**.** *Пусть $u,v\in D(\Delta)$. Тогда имеет место равенство*

$$\left(\gamma(u),\widehat{\gamma}\left(\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}\right)\right)_\gamma - \left(\gamma(v),\widehat{\gamma}\left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)\right)_\gamma = w\int\limits_S \left(u\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}} - v\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)d\sigma = \int\limits_G (u\cdot\Delta v - v\cdot\Delta u)\,d\mu.$$

5. Операторы Грина и Пуассона. $\operatorname{Ker}\gamma \supset C_0^1(G)$, поэтому $\operatorname{Ker}\gamma$ плотно в $L_2(G)$ (см. [2]). Оператор $\overline{\mathbf{grad}}\,\big|_{\operatorname{Ker}\gamma}$ замкнут, поэтому в силу теоремы фон Неймана (см. [8]) оператор $\Delta\,\big|_{\operatorname{Ker}\gamma} = -\left(\overline{\mathbf{grad}}\,\big|_{\operatorname{Ker}\gamma}\right)^*\overline{\mathbf{grad}}\,\big|_{\operatorname{Ker}\gamma}$ является самосопряженным отрицательно определенным оператором в $L_2(G)$.

Далее заменим условие а) из п. 1 на условие а$'$):

а$'$) оператор $\mathbf{grad} = \mathbf{grad}_H : L_2(H;\mu) \to L_2(H;H;\mu)$ с областью определения $D(\mathbf{grad}) = C_b^1(H)$ корректно определен, допускает замыкание $\overline{\mathbf{grad}}$ и выполнено свойство $\big(\overline{\mathbf{grad}}\,u = 0\,(\operatorname{mod}\mu)\big) \Longrightarrow \big(u = \operatorname{const}(\operatorname{mod}\mu)\big)$.

В работе [4] приведены примеры мер, удовлетворяющих одновременно условиям (а$'$) и (б), а в работе [9] доказано, что условие а$'$) влечет за собой условие а).

При выполнении условий а$'$), б) в силу принципа максимума (см. [4]) 0 не является собственным числом оператора $\Delta\,\big|_{\operatorname{Ker}\gamma}$. Поэтому $\operatorname{Im}\left(\Delta\,\big|_{\operatorname{Ker}\gamma}\right)$ плотен в $L_2(G)$ и существует плотно определенный оператор (оператор Грина) $\mathcal{G} = \left(\Delta\,\big|_{\operatorname{Ker}\gamma}\right)^{-1}$ в $L_2(G)$.

Для $f \in D(\mathcal{G})$ функция $v = \mathcal{G}f$ является (единственным) решением краевой задачи $\Delta v = f$, $\gamma(v) = 0$ в области G.

Пусть $v \in \operatorname{Ker}\gamma,\ \Delta u = 0$. Тогда $\int_G \big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,u, \overline{\mathbf{grad}}\,v\big)\,d\mu = -\int_G \Delta u \cdot v\,d\mu = 0$, и из (24) получаем

$$\left(\gamma(u), \widehat{\gamma}\left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\right)\right)_\gamma = \int_G u \cdot \Delta v\,d\mu.$$

Поэтому из равенства $\Delta u = 0$ следует равенство

$$\left(\gamma(u), \widehat{\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\mathcal{G}f\right)\right)_\gamma = \int_G u \cdot f\,d\mu, \tag{25}$$

справедливое для каждой функции $f \in D(\mathcal{G})$.

Обратно, пусть $u \in D(\Delta)$ и равенство (25) выполнено для всех $f \in D(\mathcal{G})$. Тогда из (24) получим равенство

$$\int_G \Delta u \cdot \mathcal{G}f\,d\mu = -\int_G \big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,u, \overline{\mathbf{grad}}\,(\mathcal{G}f)\big)\,d\mu = 0,$$

справедливое для всех $f \in D(\mathcal{G})$. А поскольку $\operatorname{Im}\mathcal{G}$ плотен в $L_2(G)$, то $\Delta u = 0$. Тем самым доказана следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $u \in D(\Delta)$. Тогда $\Delta u = 0$ в том и только в том случае, когда для каждой функции $f \in D(\mathcal{G})$ имеет место равенство* (25).

Задача $\Delta u = 0$, $\gamma(u) = g$ в силу принципа максимума [4] имеет не более одного решения. Соответствие $g \mapsto u$ определяет линейный оператор $\mathcal{P}$ (оператор Пуассона), действующий из $\operatorname{Im}\gamma$ в $L_2(G)$.

В силу (25) имеет место равенство

$$\left(g, \widehat{\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\mathcal{G}f\right)\right)_\gamma = \int_G \mathcal{P}g \cdot f\,d\mu,$$

которое приводит к следующему соотношению между операторами Грина и Пуассона:

$$\mathcal{P} \subset \left(\widehat{\gamma} \circ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \circ \mathcal{G}\right)^{*}. \tag{26}$$

Следует заметить, что здесь и далее $\operatorname{Im}\gamma$ — гильбертово пространство относительно скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_{\gamma}$.

Отметим, что (единственное) решение задачи $\Delta u = f \in D(\mathcal{G})$; $\gamma(u) = g \in D(\mathcal{P})$ определено формулой $u = \mathcal{G}f + \mathcal{P}g$.

6. Случай ограниченного оператора Грина. В случае, когда оператор Грина ограничен, он определен на всем $L_2(G)$ (0 — регулярное значение оператора $\Delta\,\big|_{\operatorname{Ker}\gamma}$).

Лемма 3. $\gamma(D(\Delta)) = \operatorname{Im}\gamma$.

Доказательство. Рассмотрим задачу

$$\Delta u = u, \qquad \gamma(u) = g.$$

Достаточно доказать, что она имеет решение для любой функции $g \in \operatorname{Im}\gamma$.

Функция u удовлетворяет уравнению $\Delta u = u$ тогда и только тогда, когда для каждого $v \in \operatorname{Ker}\gamma$ выполнено равенство

$$(u,v)_{\Gamma} = \int\limits_{G} \big(uv + \big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,u, \overline{\mathbf{grad}}\,v\big)\big)\,d\mu = 0.$$

Если $\widehat{g} \in \gamma^{-1}(\{g\})$, то искомое решение u получаем как ортогональную проекцию в $D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big)$ функции $\widehat{g}$ на $D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big) \ominus \operatorname{Ker}\gamma$.

Лемма 3 доказана.

Пусть $g \in \operatorname{Im}\gamma$ и функция $\widehat{g} \in D(\Delta)$ такова, что $\gamma(\widehat{g}) = g$. Если оператор Грина ограничен, то $D(\mathcal{G}) = L_2(G)$, поэтому существует $v \in \operatorname{Ker}\gamma$, для которого $\Delta v = \Delta\widehat{g}$. В этом случае $\widehat{g} - v \in \operatorname{Ker}\Delta$, а следовательно,

$$\gamma(\operatorname{Ker}\Delta) = \operatorname{Im}\gamma.$$

Поэтому $D(\mathcal{P}) = \operatorname{Im}\gamma$, а из (26) следует ограниченность операторов $\mathcal{P}$ и $\widehat{\gamma} \circ \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \circ \mathcal{G} : \mathcal{P} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im}\gamma, L_2(G))$, $\widehat{\gamma} \circ \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \circ \mathcal{G} \in \mathcal{L}(L_2(G), \operatorname{Im}\gamma)$ и их взаимная сопряженность:

$$\mathcal{P} = \left(\widehat{\gamma} \circ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \circ \mathcal{G}\right)^{*}. \tag{27}$$

В случае, когда для $g \in L_2(G)$ функция $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\mathcal{G}g)$ принадлежит $D\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big)$, из (27) и (22) следует равенство

$$(\mathcal{P}h, g)_{L_2(G)} = \left(h, \gamma\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\,\mathcal{G}g\right)\right)_{L_2(S)}, \tag{28}$$

справедливое для всех $h \in \operatorname{Im}\gamma$.

Равенство (28) соответствует известной связи операторов Грина и Пуассона в случае конечномерного пространства H и инвариантной меры Лебега μ.

7. Достаточное условие ограниченности оператора Грина.

Теорема 2 (неравенство Фридрихса). *Пусть существует поле $\boldsymbol{Z} \in C^1(H;H)$, вдоль которого мера μ дифференцируема и на шарах V выполнено условие $\operatorname{div}_\mu \boldsymbol{Z}\,\big|_V \in L_\infty(V,\mu)$. Пусть существует $t_0 \in \mathbb{R}$, для которого $\Phi_{t_0}G \cap G = \varnothing$ (здесь Φ_t — поток поля $\boldsymbol{Z}$). Тогда существует $C > 0$, для которого при всех $v \in \operatorname{Ker}\gamma$ выполнено неравенство*

$$\|v\|_{L_2(G)} \leq C\, \left|\left|\left| \overline{\mathbf{grad}}\, v \right|\right|\right|. \tag{29}$$

Доказательство. Неравенство (29) достаточно доказать лишь для функций $v \in C_0^1(G)$. Далее, не теряя общности, считаем $t_0 > 0$.

Доопределим нулем вне $\overline{G}$ функцию $v \in C_0^1(G)$. Тогда для каждой точки $x \in G$ имеет место равенство

$$-v^2(x) = v^2(\Phi_{t_0}x) - v^2(x) = \int_0^{t_0} \frac{d}{dt}\, v^2(\Phi_t x)\, dt = 2\int_0^{t_0} v(\Phi_t x)\big(\,\mathbf{grad}\, v(\Phi_t x), \mathbf{Z}(\Phi_t x)\big)\, dt.$$

Отсюда следует неравенство

$$\int_H v^2\, d\mu \leq 2\int_H d\mu \int_0^{t_0} |v(\Phi_t x)|\, \|\,\mathbf{grad}\, v(\Phi_t x)\|\, \|\mathbf{Z}(\Phi_t x)\|\, dt =$$

$$= 2\int_0^{t_0} dt \int_H |v(x)|\, \|\,\mathbf{grad}\, v(x)\|\, \|\mathbf{Z}(x)\|\, \frac{d\mu_{-t}}{d\mu}\, d\mu. \tag{30}$$

Поскольку $\mathbf{Z} \in C_b^1(H;H)$, то существует шар $V \subset H$, для которого $\Phi_{[0,t_0]}G := \{\Phi_t x \mid x \in \in G;\ t \in [0,t_0]\} \subset V$. Пусть $K = \|\operatorname{div}_\mu \mathbf{Z}\|_{L_\infty(V,\mu)}$. Тогда для $t \in [0,t_0]$ имеет место неравенство (см. [3], лемма 2)

$$\frac{d\mu_{-t}}{d\mu}\,\Big|_V \leq e^{Kt}\, (\operatorname{mod} \mu).$$

Поэтому из (30) получаем неравенство

$$\int_G v^2\, d\mu \leq 2t_0\, e^{Kt_0} \sup_H \|\mathbf{Z}(\cdot)\| \|v\|_{L_2(G)}\, |||\mathbf{grad}\, v|||\,,$$

откуда следует утверждение теоремы с постоянной

$$C = 2t_0\, e^{Kt_0} \sup_H \|\mathbf{Z}(\cdot)\|.$$

Теорема 2 доказана.

В условиях доказанной теоремы оператор $\overline{\mathbf{grad}}\,\big|_{\operatorname{Ker}\gamma}$ имеет ограниченный обратный, откуда и следует ограниченность оператора $\mathcal{G} = \left(\Delta\,\big|_{\operatorname{Ker}\gamma}\right)^{-1}$.

Заметим, что в случае $\dim H < \infty$ и инвариантной меры Лебега μ условия теоремы 2 очевидным образом выполнены.

Литература

1. *Богданский Ю. В.* Банаховы многообразия с ограниченной структурой и формула Гаусса – Остроградского // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 10. – С. 1299 – 1313.
2. *Богданский Ю. В.* Лапласиан по мере на гильбертовом пространстве и задача Дирихле для уравнения Пуассона в L_2-версии // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 9. – С. 1169 – 1178.
3. *Богданский Ю. В.* Граничный оператор следа в области гильбертова пространства и характеристическое свойство его ядра // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 11. – С. 1450 – 1460.
4. *Богданский Ю. В.* Принцип максимума для лапласиана по мере в области гильбертова пространства // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 4. – С. 460 – 468.
5. *Богданский Ю. В., Санжаревский Я. Ю.* Задача Дирихле с лапласианом по мере на гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 6. – С. 733 – 739.
6. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.
7. *Богданский Ю. В., Потапенко А. Ю.* Лапласиан по мере на римановом многообразии и задача Дирихле. I // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 7. – С. 897 – 907.
8. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
9. *Богданский Ю. В., Потапенко А. Ю.* Лапласиан по мере на римановом многообразии и задача Дирихле. II // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 11. – С. 1443 – 1449.

Получено 06.07.17