УДК 517.9

О. Д. Кічмаренко (Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова)

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ ДО ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НА ПІВОСІ

The method of averaging is applied to the nonlinear and linear (with respect to control) problems of optimal control on the semiaxis with small parameter and rapidly oscillating coefficients. It is shown that the solutions of the exact problem converge to the solutions of the averaged problem.

Метод усреднения применен к нелинейным и линейным по управлению задачам оптимального управления на полуоси с малыми параметром и быстро осциллирующими коэффициентами. Доказана сходимость решений точной задачи к решениям усредненной.

1. Вступ. У даній роботі розглянуто дві задачі оптимального керування на півосі зі швидко осцилюючими коефіцієнтами:

а) нелінійну

$$\dot{x} = X\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, u\left(t\right)\right), \quad x\left(0, u\left(0\right)\right) = x_0, \tag{1.1}$$

з критерієм якості

$$J_\varepsilon\left[u\right] = \int\limits_0^\infty e^{-jt} L\left(t, x_\varepsilon\left(t\right), \quad u\left(t\right)\right) dt \longrightarrow \inf, \tag{1.2}$$

де $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$;

б) лінійну за керуванням

$$\dot{x} = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right) + f_1\left(x\right) u\left(t\right), \quad x\left(0, u\left(0\right)\right) = x_0, \tag{1.3}$$

з критерієм якості

$$J_\varepsilon\left[u\right] = \int\limits_0^\infty [e^{-jt} A\left(t, x_\varepsilon\left(t\right)\right) + B\left(t, u\left(t\right)\right)] dt \longrightarrow \inf. \tag{1.4}$$

Тут $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $j > 0$ — фіксована стала, що характеризує дисконт, x — фазовий вектор із R^d, $u(t)$ — m-вимірний вектор керування, який набуває значень у деякій множині $U \subset R^m$.

Для задачі (1.3) також буде розглянуто квадратичний за керуванням критерій якості

$$J_\varepsilon\left[u\right] = \int\limits_0^\infty [e^{-jt} A(t, x_\varepsilon(t)) + u^2(t)] dt \longrightarrow \inf. \tag{1.5}$$

У подальшому через $x(t, u)$ будемо позначати розв’язок задачі Коші (1.1) або (1.3), який відповідає керуванню $u(t)$. Якщо не буде двозначності у трактовці, то залежністю від u будемо нехтувати і писатимемо $x(t)$.

Нехай існують рівномірно по $x \in R^d$ і $u \in R^m$ середні

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \int\limits_0^s X(t,x,u)dt = X_0(x,u), \tag{1.6}$$

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \int\limits_0^s f(t,x)dt = f_0(x). \tag{1.7}$$

Тоді задачам оптимального керування на півосі (1.1), (1.2) і (1.3), (1.4) зі швидко осцилюючими коефіцієнтами ставиться у відповідність більш проста (згладжена) усереднена задача керування

$$\dot{y} = X_0\left(y, u\left(t\right)\right), y\left(0, u\left(0\right)\right) = x_0, \tag{1.8}$$

і

$$\dot{y} = f_0\left(y\right) + f_1\left(y\right) u\left(t\right), y\left(0, u\left(0\right)\right) = x_0, \tag{1.9}$$

з критеріями якості відповідно

$$J_0\left[u\right] = \int\limits_0^\infty e^{-jt} L(t, y\left(t\right), u\left(t\right))dt \to \inf \tag{1.10}$$

та

$$J_0\left[u\right] = \int\limits_0^\infty [e^{-jt} A\left(t, y\left(t\right)\right) + B\left(t, u\left(t\right)\right)]dt \to \inf, \tag{1.11}$$

$$J_0\left[u\right] = \int\limits_0^\infty [e^{-jt} A\left(t, y\left(t\right)\right) + u^2\left(t\right)]dt \to \inf. \tag{1.12}$$

Основним результатом роботи є встановлення умов збіжності оптимальних керувань і оптимальних траєкторій, а також оптимальних значень критерію якості до оптимальних керувань, траєкторій і оптимальних значень критерію якості відповідних усереднених задач. При цьому також показано, що оптимальне керування усередненої задачі є „майже оптимальним” для точної, тобто з точністю до малого параметра ε реалізує мінімум критерію якості точної задачі.

До різних задач прикладного характеру метод усереднення застосовувався ще Ньютоном у 1682 році, однак його строге обґрунтування було вперше наведено М. М. Боголюбовим в [1]. У подальшому даний метод узагальнювався й розвивався для різних класів диференціальних рівнянь, наприклад імпульсних [2], функціонально-диференціальних [3] та ін.

Щодо застосування методу усереднення до задач оптимального керування, то вкажемо на роботи М. М. Моїсеєва [4, 5], де вперше на це зверталась увага. Однак тут акцентувалась увага на застосуванні усереднення до розв’язування конкретних прикладних задач, без достатнього математичного обґрунтування.

В роботах В. О. Плотнікова і його учнів (див., наприклад, [6]) дано строге математичне обґрунтування застосування методу усереднення до розв’язування задач керування. Однак при цьому множина допустимих керувань усередненої задачі будувалась спеціальним чином за множиною допустимих керувань вихідної системи з використанням теорії багатозначних відображень, а також необхідно було розробити алгоритм відповідності керувань вихідної та усередненої систем.

У роботі [7] запропоновано інший підхід до дослідження задач оптимального керування методом усереднення. А саме, спочатку проводилось усереднення за часом, що явно входить у систему, при цьому функція керування $u(t)$ вважалась параметром і по ній усереднення не проводилося. Даний підхід має низку переваг: по-перше, усереднений об'єкт будувався досить просто усередненням правих частин за часом; по-друге, множини допустимих керувань вихідної та усереднених задач збігалися між собою і не потрібно було, як у [6], будувати ніяких додаткових конструкцій. Однак авторам довелося накласти на функції керування $u(t)$ умову асимптотичної сталості в тому сенсі, що для кожного керування $u(t)$ існує стала u_0 така, що $|u\,(t) - u_0| \leq \varphi(t)$, де $\displaystyle\int_0^{\infty} \varphi(t)dt < \infty$, і $\varphi(t)$ не залежить від $u(t)$.

У роботі [8] застосовано підхід із роботи [7] до розв'язування задач оптимального керування, однак при цьому знято досить жорстку умову асимптотичної сталості. Тут дослідження проведене на скінченному часовому інтервалі.

Мета даної роботи — отримати подібні результати на півосі.

Опишемо коротко будову статті. У другому пункті наведено строгу постановку задачі і результати. Третій пункт присвячено доведенню основних результатів. Він складається з двох підпунктів. У підпункті 3.1 доведено теорему про відповідність розв'язків точної та усередненої задач оптимального керування в нелінійному випадку. Підпункт 3.2 присвячено розгляду аналогічних питань для лінійних за керуванням задач.

2. Постановка задачі та основні результати. Через $|\cdot|$ будемо позначати евклідову норму вектора в R^d, а через $\|\cdot\|$ — норму матриці, узгоджену з нормою вектора.

Для задачі (1.1), (1.2) та відповідної їй усередненої задачі (1.8), (1.10) будемо вважати виконаними такі умови:

2.1) допустимими керуваннями є m-вимірні вектор-функції $u(t)$, що майже для всіх $t \geq 0$ набувають значень у деякому компакті $U \subset R^m$, і $u(\cdot)$ для кожного $T > 0$ належить компакту $\mathcal{U}_T$ в $L_p([0, T])$ при деякому $p \geq 1$;

2.2) функція $X(t, x, u)$ визначена і неперервна за сукупністю змінних в області $Q = \{t \geq 0, x \in R^d, u \in U\}$ та виконано умови:

а) існує $M > 0$ така, що $|X(t, x, u)| \leq M$ для кожних $(t, x, u) \in Q$;

б) $X(t, x, u)$ задовольняє в Q умову Ліпшиця за змінними x, u, тобто існує стала $K > 0$ така, що для довільних (t, x, u) і $(t, x_1, u_1) \in Q$ виконується нерівність

$$|X\,(t, x, u) - X(t, x_1, u_1)| \leq K(|x - x_1| + |u - u_1|);$$

2.3) рівномірно по $x \in R^d$ і $u \in U$ існує границя (1.6);

2.4) скалярна функція $L(t, x, u)$ визначена і неперервна за сукупністю змінних в області $Q = \left\{t \geq 0, x \in R^d, u \in U\right\}$, задовольняє в області Q за змінними x і u умову лінійного зростання зі сталою M, тобто $|L(t, x, u)| \leq M(1 + |x| + |u|)$.

Для задачі (1.3), (1.4) і відповідної їй усередненої задачі (1.9), (1.11) або (1.9), (1.12) будемо вважати виконаними такі умови:

2.5) допустимими керування є m-вимірні вектор-функції $u(\cdot) \in L_2([0,\infty))$, що набувають значень у замкненій опуклій множині $V \subset R^m$, та $0 \in V$;

2.6) функція $f(t,x)$ визначена і неперервна за сукупністю змінних в області $Q_1 = \{t \geq \geq 0, x \in R^d\}$, а $(n \times m)$-вимірна матриця $f_1(x)$ визначена для $x \in R^d$ та виконано умови:

а) $f(t,x)$ і $f_1(x)$ обмежені в областях визначення сталою $M > 0$;

б) $f(t,x)$ і $f_1(x)$ задовольняють в областях визначення умову Ліпшиця за змінною x зі сталою Ліпшиця $K > 0$;

2.7) рівномірно по $x \in R^d$ існує границя (1.7);

2.8) скалярні функції $A(t,x)$, $B(t,u)$ і $\dfrac{\partial B}{\partial u}(t,x)$ визначені при $t \geq 0$, $x \in R^d$, $u \in V$ і неперервні за сукупністю змінних, причому:

а) $A\,(t,x) \geq 0$ і задовольняє по $x \in R^d$ умову лінійного зростання зі сталою M, тобто $|A(t,x)| \leq M(1+|x|)$ для кожного $t \geq 0$ і $x \in R^d$;

б) $a_1|u| \geq B(t,u) \geq a|u|^2$ для деяких сталих $a > 0$ і $a_1 > 0$ при кожному $t \geq 0$, $B(t,u)$ опукла по $u \in V$ і існує $a_2 > 0$ така, що $\left|\dfrac{\partial B}{\partial u}(y,u)\right| \leq a_2|u|$.

Для задачі (1.3), (1.5) допустимими керування будемо також вважати m-вимірні вектор-функції $u(\cdot) \in L_2([0,\infty))$, що набувають значень у V. При цьому також виконано умови 2.6 і 2.7.

Зазначимо, що, згідно з умовами а), б) із 2.2 і 2.6, із теореми Каратеодорі випливає, що для кожного допустимого керування $u(t)$ розв'язки $x(t,u)$ задач Коші (1.1) і (1.3) існують, єдині на $[0,\infty)$ та є абсолютно неперервними функціями. При цьому для розв'язків задач (1.1) і (1.3) справджується оцінка

$$|x\,(t)| \leq |x_0| + Mt, \tag{2.1}$$

а для розв'язку задачі (1.3) аналогічно маємо

$$|x\,(t)| \leq |x_0| + Mt + Mt^{1/2}\|u\|_{L_2}. \tag{2.2}$$

Тому для критерію якості (1.2) з урахуванням нерівності (2.1) і умови 2.1 отримуємо

$$|J_\varepsilon\,[u]| \leq \int\limits_0^\infty e^{-jt} M(1 + |x(t)| + |u(t)|)dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^\infty e^{-jt} M(1 + |x_0| + Mt)dt + C\int\limits_0^\infty e^{-jt}dt < \infty$$

для деякої сталої $C > 0$.

При цьому для критерію якості (1.4), враховуючи (2.2) та умову б) із 2.8, маємо

$$|J_\varepsilon\,[u]| \leq \int\limits_0^\infty e^{-jt} M(1 + |x(t)|)dt + \int\limits_0^\infty B(t,u(t))dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^\infty e^{-jt} M(1 + |x_0| + Mt + Mt^{1/2}\|u\|_{L_2})dt + a_1\|u\|^2_{L_2} < \infty.$$

Таким чином, критерії якості (1.2) і (1.4) мають сенс для всіх допустимих керувань.

Із (2.2) і умов 2.7 випливає, що аналогічні висновки справедливі і для усереднених задач.

Перша теорема гарантує збіжність розв'язків точної системи (1.1) до відповідних розв'язків усередненої системи (1.9) на півосі.

Теорема 2.1. *Нехай виконано умови* 2.2 *і* 2.3. *Тоді якщо* $u_{\varepsilon_0} \to u_0$, $\varepsilon_0 \to 0$ *за нормою простору* $L_p([0,T])$ *для* $T > 0$, *то розв'язок задачі Коші* (1.1)

$$x_\varepsilon(t) \rightrightarrows y_0(t), \quad \varepsilon \to 0,$$

на $[0,T]$, *де* $y_0(t)$ — *розв'язок задачі Коші* (1.8) *при* $u = u_0$.

***Зауваження* 2.1.** Із даної теореми випливає, що якщо $u_\varepsilon \to u_0(t)$, $\varepsilon \to 0$, за нормою $L_p([0,T])$ для кожного $T > 0$, то $x_\varepsilon(t)$ збігається до $y(t)$ рівномірно на кожному відрізку $[0,T]$, а тому $x_\varepsilon(t) \to y_0(t)$, $\varepsilon \to 0$, для будь-якого $t \geq 0$. Отже, в цьому випадку маємо поточкову збіжність розв'язків вихідної задачі до відповідних розв'язків усередненої. На відміну, наприклад, від робіт [9, 10] тут не гарантується рівномірна збіжність на півосі, але і ситуація тут більш загальна, а умови слабкіші у порівнянні з [9]. Проте для задач оптимального керування поточкової збіжності буде достатньо.

Наступна теорема встановлює зв'язок між оптимальними керуваннями, оптимальними траєкторіями і критеріями якості точної (1.2) і (1.4) та усередненої (1.8), (1.10) задач.

Позначимо $J_\varepsilon^* = \inf_u J_\varepsilon[u]$, $J_0^* = \inf_u J_0[u]$, де інфімум береться по всіх допустимих керуваннях.

Теорема 2.2. *Нехай виконано умови* 2.1 – 2.4 *та існує* $\varepsilon_0 > 0$ *таке, що при всіх* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *задачі* (1.1), (1.2) *і* (1.8), (1.10) *мають розв'язки* $(x_\varepsilon^*(t), u_\varepsilon^*(t))$, $(y^*(t), u_*(t))$ *відповідно.*

Тоді:

1) $J_\varepsilon^* \to J_0^*$ *при* $\varepsilon \to 0$;

2) *для кожного* $\eta > 0$ *існує* ε_0 *таке, що при* $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon(u^*)| < \eta,$$

тобто оптимальне керування усередненої задачі є майже оптимальним для точної;

3) *існує послідовність* $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$, *така, що*

$$x_{\varepsilon_n}^*(t) \to y^*(t) \tag{2.3}$$

рівномірно на кожному відрізку $[0,T]$, $T > 0$, *а*

$$u_{\varepsilon_n}^*(t) \to u^*(t) \tag{2.4}$$

майже скрізь на $[0,\infty)$ *і* $u_{\varepsilon_n}^*(\cdot)$ *збігається до* $u^*(\cdot)$ *за нормою* $L_p([0,T])$ *для кожного* $T > 0$.

Якщо при цьому усереднена задача (1.8), (1.10) *має єдиний розв'язок, то збіжності у* (2.3), (2.4) *мають місце при всіх* $\varepsilon \to 0$.

***Зауваження* 2.2.** Якщо в умовах теореми 2.1 $u(\cdot)$ належить U-компакту в $L_p([0,\infty))$, а L задовольняє по u в області Q умову Ліпшиця зі сталою K, то задачі (1.1), (1.2) та (1.8), (1.10) мають розв'язки.

Звичайно, вимога компактності множини $\mathcal{U}_T$ є досить жорсткою. Однак якщо обмежитися класом задач типу (1.3), (1.4), що є досить важливим для застосувань, то вимогу сильної компактності можна зняти, замінивши її слабкою компактністю.

Має місце така теорема.

Теорема 2.3. *Нехай виконано умови* 2.5 – 2.8. *Тоді задачі* (1.3), (1.4) *та* (1.9), (1.11) *мають відповідно розв'язки* $(x_\varepsilon^*(t), u_\varepsilon^*(t))$ *і* $(y^*(t), u^*(t))$. *При цьому*:

1) $J_\varepsilon^* \to J_0^*$, $\varepsilon \to 0$;

2) *для кожного* $\eta > 0$ *існує* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta)$ *таке, що при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *маємо*

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon[u^*]| < \eta;$$

3) *існує послідовність* $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$, *така, що*

$$x_{\varepsilon_n}^*(t) \to y(t) \tag{2.5}$$

рівномірно на кожному відрізку $[0, T]$ *для довільного* $T > 0$, *а*

$$u_{\varepsilon_n}^* \xrightarrow{w} u^* \tag{2.6}$$

слабко в $L_2([0, \infty))$.

Якщо при цьому усереднена задача (1.9), (1.11) *має єдиний розв'язок, то збіжності* (2.5) *і* (2.6) *мають місце при всіх* $\varepsilon \to 0$.

Для функціонала якості (1.12) твердження (2.6) можна посилити, замінивши слабку збіжність на сильну.

***Зауваження* 2.3.** В умовах теореми 2.2 для задачі (1.8), (1.12) справедливі всі твердження даної теореми із заміною слабкої збіжності (2.6) оптимальних керувань на сильну збіжність в $L_2([0, \infty))$.

3. Доведення теорем і зауважень. ***3.1. Доведення теорем* 2.1, 2.2 *і зауваження* 2.2. *Доведення теореми* 2.1.** Окрім систем (1.1) і (1.8) розглянемо допоміжну систему

$$\dot{z}_\varepsilon = X\left(\frac{t}{\varepsilon}, z_\varepsilon, u_0\right), \quad z_\varepsilon(0, u_0(0)) = x_0. \tag{3.1}$$

Тоді

$$\big|z_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t)\big| \le \int\limits_0^t \Big|X\left(\left(\frac{s}{\varepsilon}\right), z_\varepsilon(s), u_0(s)\right) - X\left(\left(\frac{s}{\varepsilon}\right), x_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s)\right)\Big| ds \le$$

$$\le K\int\limits_0^t |z_\varepsilon(s) - x_\varepsilon(s)|\, ds + K\int\limits_0^T |u_\varepsilon(s) - u_0(s)|\, ds.$$

Звідси у випадку $p = 1$ маємо оцінку

$$|z_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t)| \le e^{KT} K \left\|u_\varepsilon - u_0\right\|_{L_1}, \tag{3.2}$$

а у випадку $p > 1$ відповідно

$$|z_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t)| \le KT^{1/q} \left\|u_\varepsilon - u_0\right\|_{L_p}, \tag{3.3}$$

де $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Отже, $z_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t) \rightrightarrows 0$, $\varepsilon \to 0$, на $[0, T]$.

Далі, з роботи [8] випливає рівномірна на $[0,T]$ збіжність $z_\varepsilon(t)$ до $y_0(t)$ при $\varepsilon \to 0$, оскільки заміна класу $L_2\big([0,T]\big)$ на клас $L_p\big([0,T]\big)$ не приводить до змін у доведенні, тому що довільну функцію із $L_p\big([0,T]\big)$, $p \geq 1$, можна також апроксимувати кусково-сталими функціями [11]. Останнє доводить теорему.

***Доведення теореми* 2.2.** Візьмемо довільну послідовність $\{\varepsilon_n\}_1^\infty$ таку, що $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$. За умовами теореми існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що при $n \geq n_0$ задача (1.1), (1.2) має розв'язок $\big(x^*_{\varepsilon_n}(t), u^*_{\varepsilon_n}(t)\big)$.

Із умов 2.1 випливає існування на $[0,1]$ збіжної в $L_p\big([0,1]\big)$ підпослідовності $u^*_{\varepsilon_{n_1}}(\cdot)$ послідовності $u^+_{\varepsilon_n}(\cdot)$. Нехай $u_1(\cdot)$ — її L_p-границя. Тоді існує підпослідовність послідовності $u^*_{\varepsilon_{n_1}}(t)$ (позначимо її знову $u^*_{\varepsilon_{n_1}}(t)$), що збігається поточково до $u_1(t)$ скрізь на $[0,1]$, за винятком, можливо, множини A_1 нульової лебегової міри.

Аналогічними міркуваннями із послідовності $u^*_{\varepsilon_{n_1}}(\cdot)$ виділяємо на $[0,2]$ збіжну за нормою $L_p\big([0,2]\big)$ послідовність $u^*_{\varepsilon_{n_2}}(\cdot)$. Нехай $u_2(\cdot)$ — її L_p-границя. Тоді існує підпослідовність послідовності $u^*_{\varepsilon_{n_2}}(t)$ (позначимо її знову $u^*_{\varepsilon_{n_2}}(t)$), що збігається поточково до $u_2(t)$ скрізь на $[0,2]$, за винятком, можливо, деякої множини A_2 нульової лебегової міри.

Очевидно, що $u_1(t) = u_2(t)$ на множині $[0,1]\,/(A_1 \cup A_2)$.

Продовжуючи дану процедуру на $[0,k]$, $k \in \mathbb{N}$, можна побудувати підпослідовність $u^*_{\varepsilon_{n_k}}(\cdot)$ послідовності $u^*_{\varepsilon_{n_{k-1}}}(\cdot)$, що збігається до деякої функції $u_k(\cdot) \in \mathcal{U}_k$ за нормою $L_p\big([0,k]\big)$. Із неї також виділяємо збіжну поточково, за винятком, можливо, множини $A_k \subset [0,k]$ нульової міри, підпослідовність, позначену знову через $u^*_{\varepsilon_{n_k}}$. Очевидно, що $u_k(t) = u_{k-1}(t)$ на множині $[0,k-1] \setminus \left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right)$.

Позначимо $B = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$. Очевидно, що множина B має нульову лебегову міру. Побудуємо функцію $u_0(t)$ таку, що $u_0(t) = u_k(t)$ при $t \in [0,k]$. За своєю побудовою вона має такі властивості:

а) $u_0(t)$ визначена на $[0,\infty)\setminus B$, тобто майже скрізь;

б) $u_0(t) \in U$ для всіх $[0,\infty)\setminus B$;

в) $u_0(\cdot) \in \mathcal{U}_T$ для кожного $T > 0$.

Отже, $u_0(t)$ є допустимим керуванням для задачі (1.1), (1.2).

Використовуючи тепер діагональний метод Кантора, можна побудувати підпослідовність $u^*_{\varepsilon_{n_n}}(\cdot)$ вихідної послідовності $u^*_{\varepsilon_n}(\cdot)$, що має такі властивості:

а) $u^*_{\varepsilon_{n_n}}(\cdot)$ збігається за нормою $L_p\big([0,T]\big)$ для кожного $T > 0$ до $u_0(\cdot)$ при $n \to \infty$;

б) $u^*_{\varepsilon_{n_n}}$ збігається до $u_0(t)$ для всіх $t \in [0,\infty)\setminus B$.

Далі позначимо $u^*_{\varepsilon_{n_n}}(\cdot)$ через $u^*_{\varepsilon_m}$. Тоді $x^*_{\varepsilon_m}(t)$ — оптимальна траєкторія задачі (1.1), (1.2). Через $y_0(t)$ позначимо розв'язок усередненої задачі (1.8), що відповідає керуванню $u_0(t)$.

Із теореми 2.1 випливає рівномірна на кожному відрізку $[0,T]$ поточкова на $[0,\infty)$ збіжність $x^*_{\varepsilon_m}(t)$ до $y_0(t)$ при $m \to \infty$.

Оскільки $u^*_{\varepsilon_m}(t)$ — оптимальне керування, а $x^*_{\varepsilon_m}(t)$ — оптимальна траєкторія для задачі (1.1), (1.2), то

$$J^*_{\varepsilon_m} \leq J^*_{\varepsilon_m}(u^*) = J^*_0 + J_{\varepsilon_m}(u^*) - J_0(u^*). \tag{3.4}$$

Але

$$|J_{\varepsilon_m}(u^*) - J_0(u^*)| \leq \int\limits_0^\infty e^{-jt} \left|L\left(t, x_{\varepsilon_m}(t), u^*(t)\right) - L\left(t, y^*(t), u^*(t)\right)\right| dt. \tag{3.5}$$

Застосувавши знову теорему 2.1 до системи

$$\dot{x}_{\varepsilon_m} = X\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_{\varepsilon_m}, u^*\right)$$

і

$$\dot{y}^* = X_0\left(y^*, u^*\right),$$

отримаємо поточкову для кожного $t > 0$ збіжність $x_{\varepsilon_m}(t)$ до $y^*(t)$ при $\varepsilon_m \to 0$.

Використовуючи тепер умову лінійного зростання для L, оцінку (2.1) і умову 2.1 для підінтегрального виразу у (3.5), знаходимо інтегровну мажоранту

$$e^{-jt} M\left(1 + |x_0| + Mt + C\right),$$

де C — деяка стала, що характеризує обмеженість компакта U з умови 2.1.

Внаслідок неперервності функції L, згідно з теоремою Лебега про мажоровану збіжність, у (3.5) тоді можливий граничний перехід. Звідси отримуємо, що

$$J_{\varepsilon_m}(u^*) \to J_0(u^*), \quad \varepsilon_m \to 0. \tag{3.6}$$

З іншого боку, оскільки $u^*_{\varepsilon_m}$ — допустиме керування усередненої задачі, то

$$J_0^* \leq J_0\left(u^*_{\varepsilon_m}\right) = J^*_{\varepsilon_m} + J_0(u^*_{\varepsilon_m}) - J_{\varepsilon_m}(u^*_{\varepsilon_m}). \tag{3.7}$$

Але

$$\left|J_0(u^*_{\varepsilon_m}) - J_{\varepsilon_m}(u^*_{\varepsilon_m})\right| \leq$$

$$\leq \left|J_0(u^*_{\varepsilon_m}) - J_0(u_0)\right| + \left|J_{\varepsilon_m}(u^*_{\varepsilon_m}) - J_{\varepsilon_m}(u_0)\right| + \left|J_{\varepsilon_m}(u_0) - J_0(u_0)\right|. \tag{3.8}$$

Оскільки

$$\left|J_0(u^*_{\varepsilon_m}) - J_0(u_0)\right| = \int\limits_0^\infty e^{-jt} \left|L\left(t, y_{\varepsilon_m}(t), u^*_{\varepsilon_m}(t)\right) - L\left(t, y_0(t), u_0(t)\right)\right| dt,$$

де $y_{\varepsilon_m}(t)$ — розв'язок задачі Коші

$$\dot{y}_{\varepsilon_m} = X_0\left(y_{\varepsilon_m}, u_{\varepsilon_m}\right), \quad y_{\varepsilon_m}\left(0, u_{\varepsilon_m}(0)\right) = x_0,$$

то аналогічно (3.6) маємо

$$J_0\left(u^*_{\varepsilon_m}\right) \to J_0(u_0), \quad \varepsilon_m \to 0. \tag{3.9}$$

Покажемо, що

$$J_{\varepsilon_m}(u^*_{\varepsilon_m}) - J_{\varepsilon_m}(u_0) \to 0, \quad \varepsilon_m \to 0. \tag{3.10}$$

Дійсно,

$$\left|J_{\varepsilon_m}(u^*_{\varepsilon_m}) - J_{\varepsilon_m}(u_0)\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_0^\infty e^{-jt}\left|L\left(t, x^*_{\varepsilon_m}(t), u^*_{\varepsilon_m}(t)\right) - L\left(t, z_{\varepsilon_m}(t), u_0(t)\right)\right| dt,$$

де z_{ε_m} — розв'язок задачі Коші (3.1) з $\varepsilon = \varepsilon_m$. Враховуючи тепер збіжність майже скрізь $u^*_{\varepsilon_m}$ до $u_0(t)$ при ε_m і міркуючи, як і при встановленні (3.6), приходимо до (3.10). Очевидно також, що

$$J_{\varepsilon_m}(u_0) - J_0(u_0) \to 0, \quad \varepsilon_m \to 0. \tag{3.11}$$

Тоді із (3.4), (3.6) – (3.11) одержуємо оцінки

$$J_{\varepsilon_m}(u^*_{\varepsilon_m}) - J^*_0 \leq J^*_{\varepsilon_m} - J^*_0 \leq J_{\varepsilon_m}(u^*) - J_0(u^*).$$

Звідси випливає, що

$$J^*_{\varepsilon_m} \to J^*_0, \quad \varepsilon_m \to 0. \tag{3.12}$$

Таким чином, із довільної послідовності $J^*_{\varepsilon_n}$ виділено збіжну до J^*_0 підпослідовність, звідки випливає перше твердження теореми.

Покажемо, що u_0 — оптимальне керування усередненої задачі, а $y_0(t)$ — оптимальна траєкторія.

Аналогічно попередньому, за теоремою Лебега маємо

$$J^*_{\varepsilon_m} = \int\limits_0^\infty e^{-jt} L\left(t, x^*_{\varepsilon_m}(t), u^*_{\varepsilon_m}(t)\right) dt \to \int\limits_0^\infty e^{-jt} L\left(t, y_0(t), u_0(t)\right) dt.$$

Звідси та з (3.12) випливає оптимальність пари $(u_0(t), y_0(t))$, що і доводить третє твердження теореми.

Для доведення другого твердження зазначимо, що

$$\left|J^*_\varepsilon - J_\varepsilon(u_0)\right| \leq \left|J^*_\varepsilon - J^*_0\right| + \left|J_0(u_0) - J_\varepsilon(u_0)\right|.$$

Застосовуючи теорему 2.1 до системи

$$\dot{x_\varepsilon} = X\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_\varepsilon, u_0\right)$$

і

$$\dot{y_0} = X_0\left(y_0, u_0\right),$$

аналогічно (3.6) отримуємо, що

$$J_0(u_0) - J_\varepsilon(u_0) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Звідси і з першого твердження теореми отримуємо друге твердження.

Якщо усереднена задача (1.8), (1.10) має єдиний розв'язок, то з наведеного вище випливає, що з довільної послідовності $\left(x^*_{\varepsilon_m}, u^*_{\varepsilon_m}\right)$ можна виділити збіжну підпослідовність і всі такі підпослідовності збігаються до однієї і тієї ж границі, що і доводить останнє твердження теореми.

Теорему доведено.

***Доведення зауваження* 2.2.** Покажемо неперервність $J_\varepsilon(u)$ для кожного $\varepsilon > 0$ по $u \in$ $\in L_p\left([0,\infty)\right)$. Використовуючи умову a) із 2.2 і нерівність Гронуолла – Беллмана, аналогічно (3.2), (3.3) для розв'язків $x(t,u_n)$ і $x(t,u_0)$ задачі (1.1), що відповідають керуванням u_n і u_0, отримуємо оцінки для кожного $t \in [0,T]$ при $T > 0$:

$$|x(t,u_n) - x(t,u_0)| \le Ke^{KT}\left\|u_n - u_0\right\|_{L_1}$$

у випадку $L_1\left([0,\infty)\right)$ і

$$|x(t,u_n) - x(t,u_0)| \le KT^{1/q}\left\|u_n - u_0\right\|_{L_p}$$

у випадку $p > 1$, з яких випливає поточкова при $t \ge 0$ збіжність $x(t,u_n)$ до $x(t,u_0)$, якщо u_n збігається до u_0 за L_p-нормою. Тоді

$$|J_\varepsilon(u_n) - J_\varepsilon(u_0)| \le \int\limits_0^\infty e^{-jt}\left|L\left(t,x(t,u_n),u_0(t)\right) - L\left(t,x(t,u_0),u_0(t)\right)\right|dt +$$

$$+\int\limits_0^\infty e^{-jt}K\left|u_n(t) - u_0(t)\right|dt \to 0, \quad n \to \infty,$$

згідно з теоремою Лебега. Отже, $J_\varepsilon(u)$ неперервна по u на компакті. Аналогічно доводиться і неперервність $J_0(u)$.

***3.2. Доведення теореми* 2.3 *і зауваження* 2.3. *Доведення теореми* 2.3.** Доведення існування для кожного ε оптимальної пари $(x^*_\varepsilon, u^*_\varepsilon)$ задачі (1.3), (1.4) проводиться за стандартною схемою (див., наприклад, [12]) із виділенням мінімізуючої послідовності, що слабко збігається до u^*_ε. Оптимальність u^*_ε встановлюється граничним переходом із використанням того факту, що якщо в умовах теореми $u_n \xrightarrow{w} u_0$ в $L_2\left([0,\infty)\right)$, $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\infty B\left(t,u_n(t)\right)dt \ge \int\limits_0^\infty B\left(t,u_0(t)\right)dt. \tag{3.13}$$

Останнє випливає із відомої для опуклих функцій нерівності

$$B\left(t,v\right) \ge B\left(t,u_0(t)\right) + \left(\frac{\partial B}{\partial u}\left(t,u_0(t)\right), v - u_0(t)\right). \tag{3.14}$$

Тут другий доданок — скалярний добуток векторів у $\mathbb{R}^m$. Взявши в (3.14) $v = u_n(t)$, матимемо

$$\int\limits_0^\infty B\left(t,u_n(t)\right)dt \ge \int\limits_0^\infty B\left(t,u_0(t)\right)dt + \int\limits_0^\infty \left(\frac{\partial B}{\partial u}\left(t,u_0(t)\right), u_n(t) - u_0(t)\right)dt. \tag{3.15}$$

Врахувавши тепер умову б) із 2.8, отримаємо

$$\int_0^\infty \left|\frac{\partial B}{\partial u} B(t, u(t))\right|^2 dt \leq \int_0^\infty a_2 \,|u(t)|^2 \,dt \leq \infty.$$

Отже, другий доданок у (3.15) прямує до нуля внаслідок слабкої збіжності $u_n(t)$ до u_0 в $L_2\left([0, \infty]\right)$.

Належність $u_\varepsilon^*(t)$ множині V для кожного $t \geq 0$ випливає з леми Мазура [13].

Аналогічно доводиться існування оптимальної пари (y^*, u^*) задачі (1.9), (1.11).

Далі, для довільного $\varepsilon > 0$ маємо

$$J_\varepsilon^* = J_\varepsilon^*(u_\varepsilon^*) \leq J_\varepsilon(0). \tag{3.16}$$

При $u = 0$ для розв'язку $x_\varepsilon(t)$ задачі Коші (1.3) внаслідок першої умови з 2.6 маємо оцінку

$$|x_\varepsilon(t)| \leq |x_0| + Mt, \quad t \geq 0,$$

а тому за умовою 2.8

$$J_\varepsilon(0) = \int_0^\infty e^{-jt} A\left(t, x_\varepsilon(t)\right) dt \leq \int_0^\infty e^{-jt} M\left(1 + x_0 + Mt\right) dt \leq C_1, \tag{3.17}$$

де стала C_1 не залежить ані від ε, ані від u. Тоді з умов 2.8, (3.16) і (3.17) маємо оцінку

$$\int_0^\infty |u_\varepsilon^*(t)|^2 \,dt \leq \frac{C_1}{a}. \tag{3.18}$$

Тому послідовність u_ε^* слабко компактна в $L_2\left([0, \infty)\right)$.

Нехай $u_{\varepsilon_n}^*$ — слабко збіжна до u_0 послідовність оптимальних керувань. Очевидно, що u_0 — допустиме керування. Нехай $x_0(t)$ — розв'язок задачі Коші (1.9) з $u(t) = u_0(t)$.

Оскільки зі слабкої збіжності в $L_2\left([0, \infty)\right)$ випливає слабка збіжність в $L_2\left([0, T]\right)$ для довільного $T > 0$, то з теореми 2.8 [8] маємо, що розв'язок $x_{\varepsilon_n}^*(t)$ задачі Коші (1.3) рівномірно на $[0, T]$ прямує до $x_0(t)$ при $\varepsilon_n \to 0$. Внаслідок довільності T звідси випливає поточкова збіжність $x_{\varepsilon_n}^*(t)$ до $x_0(t)$ при кожному $t \geq 0$.

Аналогічний факт має місце і для розв'язків $x_{\varepsilon_n}^*(t, u^*)$ і $y^*(t)$ задач Коші (1.3) і (1.9) відповідно. Тоді

$$J_{\varepsilon_m}^* \leq J_0^* + J_{\varepsilon_n}(u^*) - J_0(u^*). \tag{3.19}$$

Але

$$|J_{\varepsilon_n}(u^*) - J_0(u^*)| \leq \int_0^\infty e^{-jt} \,|A(t, x_{\varepsilon_n}(t, u^*) - A(t, y^*(t))| \,dt \to 0, \quad \varepsilon_n \to 0, \tag{3.20}$$

згідно з теоремою Лебега, оцінкою (2.2) і лінійним по x зростанням $A(t, x)$. З іншого боку,

$$J_0^* \leq J_{\varepsilon_n}^* + J_0(u_{\varepsilon_n}^*) - J_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n}^*). \tag{3.21}$$

Розглянемо допоміжну систему

$$\dot{z_n} = f_0(z_n) + f_1(z_n)u^*_{\varepsilon_n}$$

і

$$\dot{x_0} = f_0(x_0) + f_1(x_0)u_0.$$

Знову застосувавши до неї теорему 2.8 [8], переконаємося, що $z_n(t)$ рівномірно на $[0, T]$ і поточково на півосі $t \geq 0$ прямує до $x_0(t)$ при $\varepsilon_n \to 0$.

Звідси з урахуванням збіжності $x^*_{z_n}(t)$ до x_0 отримаємо, що

$$x_{\varepsilon_n}(t)^* - z_n(t) \to 0, \quad z_n \to 0, \tag{3.22}$$

для кожного $t \geq 0$. Тому

$$\left|J_{\varepsilon_n}(u^*_{\varepsilon_n}) - J_0(u^*_{\varepsilon_n})\right| \leq \int\limits_0^\infty e^{-jt}\left|A\left(t, x^*_{\varepsilon_n}(t)\right) - A\left(t, x_0(t)\right)\right| dt+$$

$$+\int\limits_0^\infty e^{-jt}\left|A\left(t, z_n(t)\right) - A\left(t, x_0(t)\right)\right| dt \to 0, \quad \varepsilon_n \to 0,$$

згідно з теоремою Лебега, оцінками (2.2), (3.18) і лінійним по x зростанням $A(t, x)$. Тоді з (3.19) – (3.22) випливає, що

$$J^*_{\varepsilon_n} \to J^*_0, \quad \varepsilon_n \to 0.$$

Як і в підпункті 3.1, приходимо до висновку, що

$$J^*_\varepsilon \to J^*_0, \quad \varepsilon \to 0, \tag{3.23}$$

що й доводить перше твердження теореми.

Покажемо, що u_0 — оптимальне керування усередненої задачі. Дійсно,

$$J^*_{\varepsilon_n} = \int\limits_0^\infty e^{-jt}A\left(t, x^*_{\varepsilon_n}(t)\right) dt + \int\limits_0^\infty B\left(t, u^*_{\varepsilon_n}(t)\right) dt. \tag{3.24}$$

Враховуючи тепер умови 2.8, (3.23), (3.13), теорему Лебега і переходячи до границі у (3.24) при $\varepsilon_n \to 0$, маємо

$$J^*_0 = \int\limits_0^\infty e^{-jt}A\left(t, x_0(t)\right) dt + \lim_{\varepsilon_n \to 0}\int\limits_0^\infty B\left(t, u^*_{\varepsilon_n}(t)\right) dt \geq$$

$$\geq \int\limits_0^\infty e^{-jt}A\left(t, x_0(t)\right) dt + \int\limits_0^\infty B\left(t, u_0(t)\right) dt.$$

Звідси випливає оптимальність пари (x_0, u_0) , що і доводить третє твердження.

Друге твердження доводиться аналогічно відповідному твердженню із теореми 2.2.

Останнє твердження теореми доводиться аналогічно такому ж твердженню теореми 2.2. Доведення зауваження проводиться аналогічно відповідному факту для скінченного інтервалу з [8].

Література

1. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. – Киев: Изд-во АН УССР, 1945.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Вторая теорема Н. Н. Боголюбова для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 1974. – **10**, № 11. – С. 2001 – 2010.
3. *Hale G.* Theory of functional-differential equations. – New York: Springer-Verlag, 1977.
4. *Моисеев Н. Н.* Элементы теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1975. – 528 с.
5. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
6. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах оптимального управления. – Киев; Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.
7. *Носенко Т. В., Станжицький О. М.* Метод усереднення в деяких задачах оптимального керування // Нелінійні коливання. – 2008. – **11**, № 4. – С. 512 – 519.
8. *Kichmarenko O. D.* Application of the averaging method to optimal control problem of system with fast parameters // J. Pure and Appl. Math. – 2017. – **115**, № 1. – P. 93 – 114.
9. *Самойленко А. М., Станжицкий А. Н.* Об усреднении дифференциальных уравнений на бесконечном интервале // Дифференц. уравнения. – 2006. – **42**, № 4. – С. 476 – 482.
10. *Станжицкий А. Н., Добродзий Т. В.* Исследование задач оптимального управления на полуоси методом усреднения // Дифференц. уравнения. – 2011. – **47**, № 2. – С. 264 – 277.
11. *Макаров Б. М., Подкорытов А. Н.* Лекции по вещественному анализу. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2011. – 688 с.
12. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972. – 576 с.
13. *Yosida K.* Functional analysis. – Berlin; New York: Springer-Verlag, 1980.

Одержано 16.06.17