УДК 517.51

В. К. Маслюченко, В. С. Мельник (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

ПОБУДОВА ПРОМІЖНИХ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

For given upper and lower semicontinuous real-valued functions g and h, respectively, defined on a closed parallelepiped X in $\mathbb{R}^n$ and such that $g(x) < h(x)$ on X and points $x_0 \in X$ and $y_0 \in (g(x_0), h(x_0))$, we construct a smooth function $f : X \to \mathbb{R}$ such that $f(x_0) = y_0$ and $g(x) < f(x) < h(x)$ on X. We also present similar constructions for functions defined on separable Hilbert spaces and Asplund spaces.

Для полунепрерывных соответственно сверху и снизу действительнозначных функций g и h, заданных на замкнутом параллелепипеде X в $\mathbb{R}^n$ и таких, что $g(x) < h(x)$ на X, и точек $x_0 \in X$ и $y_0 \in (g(x_0), h(x_0))$ построена бесконечно дифференцируемая функция $f : X \to \mathbb{R}$, для которой $f(x_0) = y_0$ и $g(x) < f(x) < h(x)$ на X. Аналогичные построения осуществлены и для сепарабельных гильбертовых и асплундовых пространств.

1. Вступ. Класична теорема Гана про проміжну функцію [1] стверджує, що для метричного простору X і напівнеперервних відповідно зверху і знизу функцій $g\colon X \to \mathbb{R}$ і $h\colon X \to \mathbb{R}$ таких, що $g(x) \le h(x)$ на X, існує неперервна функція $f\colon X \to \mathbb{R}$, для якої $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на X. Пару (g, h) напівнеперервних відповідно зверху і знизу функцій $g,\ h\colon X \to \mathbb{R}$ на топологічному просторі X таких, що $g(x) \le h(x)$ на X, ми називаємо [2] *парою Гана* на X. Якщо ж $g(x) < h(x)$ на X, то пара Гана називається *строгою*. Функція $f : X \to \mathbb{R}$, для якої $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на X, називається *проміжною* для пари (g, h), а якщо $g(x) < f(x) < h(x)$ при $g(x) < h(x)$ і $g(x) = f(x) = h(x)$ при $g(x) = h(x)$, то — *строго проміжною*.

Цю теорему Гана у XX столітті було значно розвинено. Після того як Ж. Д'єдонне [3] переніс її на випадок паракомпактного простору X, Г. Тонг [4, 5] та М. Катетов [6, 7] встановили, що для довільного T_1-простору X існування проміжної неперервної функції $f : X \to \mathbb{R}$ для кожної пари Гана (g, h) на X є характеристичною властивістю нормальності простору X. К. Даукер [8] та М. Катетов [6] довели, що T_1-простір X буде нормальним і зліченно паракомпактним тоді і тільки тоді, коли кожна строга пара Гана на X має строго проміжну неперервну функцію. Нарешті, Е. Майкл [9] показав, що T_1-простір X буде досконало нормальним тоді і тільки тоді, коли кожна пара Гана на X має строго проміжну неперервну функцію. Новий підхід до доведення цих результатів запропонували К. Ґуд і Я. Старс [10], а К. Ямазакі [11] вивчав можливість перенесення теореми Гана на функції зі значеннями у впорядкованих просторах. Зауважимо, що теорема Гана про проміжну функцію має застосування в теорії наближень [12, с. 23; 13] при знаходженні рівномірної відстані до простору неперервних функцій.

В останній час з'явилися нові аналоги та модифікації теореми Гана про проміжну функцію. Так, у статті [14] встановлено, що для кожної пари Гана (g, h) на відрізку $[a, b]$, в якому функції g і h зростають, існує проміжна зростаюча неперервна функція. В роботі [15] досліджувалося питання про існування проміжної афінної функції $f\colon X \to \mathbb{R}$ на векторному просторі X для опуклих відповідно догори і донизу функцій g і h на X. Нарешті, у статті [2] вивчалося питання про існування на проміжках числової прямої проміжних кусково-лінійних чи нескінченно диференційовних функцій, що задовольняють певні додаткові умови.

Тут ми продовжуємо дослідження, розпочаті у статті [2]. Спочатку будуємо строго проміжну нескінченно диференційовну функцію f з даним значенням $f(x_0) = y_0$ для строгої пари Гана на замкненому паралелепіпеді в $\mathbb{R}^n$, застосовуючи, як і в [2], де розглядався відрізок $[a, b]$, міркування компактності. Далі, з допомогою відповідних розбиттів одиниці доводимо існування строго проміжної нескінченно диференційовної за Фреше функції для довільної строгої пари Гана на сепарабельному гільбертовому просторі, розвиваючи підхід Ленга – Ілса [16, с. 43 – 50]. Насамкінець наводимо спосіб побудови строго проміжної диференційовної за Фреше функції на асплундових банахових просторах, використовуючи при цьому крім розбиттів одиниці техніку шапочок із [17].

2. Існування проміжної C^∞-функції на замкненому паралелепіпеді в $\mathbb{R}^n$. У цьому пункті ми дослідимо питання про існування строго проміжної нескінченно диференційовної функції (коротко — C^∞-функції) для строгої пари Гана на замкненому паралелепіпеді $X = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ у просторі $\mathbb{R}^n$.

Перший підхід базується на згаданій у вступі теоремі Даукера – Катетова. Нехай X — компактний гаусдорфовий простір (коротко — компакт). Символом $C_u(X)$ позначимо банаховий простір усіх неперервних функцій $f : X \to \mathbb{R}$ із рівномірною нормою $\|f\| = \max\limits_{x \in X} |f(x)|$. Зокрема, роль X може відігравати замкнений паралелепіпед у $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Нехай X — компакт, L — скрізь щільна множина у просторі $C_u(X)$ і (g, h) — строга пара Гана на X. Тоді існує строго проміжна для (g, h) функція $f : X \to \mathbb{R}$ така, що $f \in L$.*

Доведення. За відомою теоремою [18, с. 199] компакт X є нормальним простором. Крім того, він, очевидно, паракомпактний, а отже, і зліченно паракомпактний. Тому за теоремою Даукера – Катетова існують такі неперервні функції $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, що $g(x) < f_1(x) < f_2(x) < h(x)$ на X. Функція $\varphi(x) = \dfrac{f_1(x) + f_2(x)}{2}$ теж буде неперервною і $f_1(x) < \varphi(x) < f_2(x)$ на X. При цьому

$$\varphi(x) - f_1(x) = \frac{f_2(x) - f_1(x)}{2} = f_2(x) - \varphi(x)$$

на X. Зрозуміло, що існує число

$$\varepsilon = \min_{x \in X}(\varphi(x) - f_1(x)) = \frac{1}{2} \min_{x \in X}(f_2(x) - f_1(x)) = \min_{x \in X}(f_2(x) - \varphi(x))$$

і $\varepsilon > 0$. В ε-околі $U_\varepsilon(\varphi) = \{\psi \in C_u(X) : \|\psi - \varphi\| < \varepsilon\}$ точки φ з простору $C_u(X)$ знайдеться елемент f з множини L. Він і буде шуканою функцією, оскільки

$$g(x) < f_1(x) = \varphi(x) - (\varphi(x) - f_1(x)) \leq \varphi(x) - \varepsilon < f(x) < \varphi(x) + \varepsilon \leq$$
$$\leq \varphi(x) + (f_2(x) - \varphi(x)) = f_2(x) < h(x)$$

на X.

Позначимо символом $P(X)$ простір усіх многочленів

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{k_1, \ldots, k_n = 0}^{m} a_{k_1, \ldots, k_n} \xi_1^{k_1} \ldots \xi_n^{k_n}$$

від n змінних на замкненому паралелепіпеді X у просторі $\mathbb{R}^n$. Відомо (див., наприклад, [19]), що $P(X)$ для замкненого паралелепіпеда X в $\mathbb{R}^n$ — це скрізь щільний підпростір простору $C_u(X)$. Тому з теореми 1 безпосередньо випливає таке твердження.

Теорема 2. *Нехай $X = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ — замкнений паралелепiпед в $\mathbb{R}^n$ i (g, h) — строга пара Гана на X. Тодi iснує многочлен $f \in P(X)$, що є строго промiжною функцiєю для пари (g, h).*

Оскiльки многочлен є C^∞-функцiєю, то кожна строга пара Гана на замкненому паралелепiпедi X в $\mathbb{R}^n$ має строго промiжну C^∞-функцiю.

Зараз ми застосуємо iнший пiдхiд, що базується на компактностi замкненого паралелепiпеда X i не використовує теорему Даукера – Катетова, а дозволяє довести її точнiший варiант у цьому випадку.

Для функцiї $\varphi \colon X \to \mathbb{R}$ введемо в розгляд множину $\operatorname{supp} \varphi = \{x \in X : \varphi(x) \neq 0\}$, яку ми називатимемо *носiєм* функцiї φ.

Лема 1. *Для кожного невиродженого обмеженого вiдкритого паралелепiпеда $Q = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ у $\mathbb{R}^n$ iснує така C^∞-функцiя $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, що $\varphi(x) \geq 0$ на $\mathbb{R}^n$ i $\operatorname{supp} \varphi = Q$.*

Доведення. Як легко перевiрити, для довiльних чисел a i b з $\mathbb{R}$ таких, що $a < b$, функцiя

$$\varphi_{a,b}(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(t-a)(t-b)}}, & a < t < b, \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (a, b), \end{cases}$$

нескiнченно диференцiйовна, невiд'ємна i $\operatorname{supp} \varphi_{a,b} = (a, b)$.

Покладемо $\varphi = \varphi_{a_1,b_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{a_n,b_n}$, тобто для $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi(x) = \varphi_{a_1,b_1}(\xi_1) \ldots \varphi_{a_n,b_n}(\xi_n).$$

Нескладно переконатися в тому, що ця функцiя i є шуканою.

Теорема 3. *Нехай $X = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ — замкнений паралелепiпед в $\mathbb{R}^n$, (g, h) — строга пара Гана на X, $x_0 \in X$ i $g(x_0) < y_0 < h(x_0)$. Тодi iснує така строго промiжна для пари (g, h) нескiнченно диференцiйовна функцiя $f \colon X \to \mathbb{R}$, що $f(x_0) = y_0$.*

Доведення. Розглянемо максимум-норму

$$|x| = \max\{|\xi_k| : k = 1, \ldots, n\},$$

де $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, на просторi $\mathbb{R}^n$ i вiдповiднi кубiчнi ε-околи $U_\varepsilon(x) = \{u \in \mathbb{R}^n : |u - x| < \varepsilon\}$. Iз напiвнеперервностi зверху функцiї g у точцi x_0 i знизу функцiї h у тiй же точцi випливає, що iснує таке $\delta > 0$, що

$$g(x) < y_0 < h(x) \quad \text{на} \quad U_\delta(x_0) \cap X.$$

Покладемо $Q_0 = U_\delta(x_0)$ i $K = X \setminus Q_0$. Для кожної точки x з K розглянемо довiльне число γ_x, для якого $g(x) < \gamma_x < h(x)$. Для них можна визначити такий кубiчний ε_x-окiл $U_x = U_{\varepsilon_x}(x)$ в $\mathbb{R}^n$, що $x_0 \notin U_x$ i

$$g(u) < \gamma_x < h(u) \quad \text{на} \quad X \cap U_x.$$

Множина K замкнена в X, а отже, компактна. Тому з її вiдкритого покриття $\{U_x : x \in K\}$ можна видiлити скiнченне пiдпокриття, що складається з множин $Q_j = U_{\varepsilon_{x_j}}(x_j)$, $j = 1, \ldots, m$.

Для кожного вiдкритого куба Q_j, $j = 0, 1, \ldots, m$, згiдно з лемою 1 побудуємо таку невiд'ємну C^∞-функцiю $\psi_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, що $\operatorname{supp} \psi_i = Q_i$. Нехай $\psi = \sum_{j=0}^{m} \psi_j$. Оскiльки куби

$Q_0, Q_1, \ldots, Q_m$ покривають паралелепіпед X, то для кожного $x \in X$ існує таке $j = 0, 1, \ldots, m$, що $x \in Q_j$, і тому $\psi(x) \geq \psi_j(x) > 0$, адже $Q_j = \operatorname{supp} \psi_j$. Отже, $\psi(x) > 0$ на X. Тому можна визначити на X функції $\varphi_j(x) = \dfrac{\psi_j(x)}{\psi(x)}$. Зрозуміло, що всі вони нескінченно диференційовні, $\sum_{j=0}^{m} \varphi_j(x) = 1$ на X і $\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq Q_j$ при $j = 0, 1, \ldots, m$.

Покладемо $y_j = \gamma_{x_j}$ при $j = 0, 1, \ldots, m$ і

$$f = \sum_{j=0}^{m} y_j \varphi_j.$$

Зрозуміло, що f — нескінченно диференційовна функція на X. Покажемо, що вона є шуканою.

По-перше, $\varphi_j(x_0) = 0$ для всіх $j = 1, \ldots, m$, оскільки $x_0 \notin Q_j$ для таких j за побудовою. Тому $\psi(x_0) = \psi_0(x_0)$, а отже, $\varphi_0(x_0) = 1$. Тоді

$$f(x_0) = \sum_{j=0}^{m} y_j \varphi_j(x_0) = y_0 \varphi_0(x_0) = y_0.$$

Далі, для $x \in X$ розглянемо множину $J(x) = \{j : x \in \operatorname{supp} \varphi_j\}$. Множина $J(x)$ непорожня, тому що $\sum_{j=0}^{m} \varphi_j(x) = 1$ на X. Якщо $j \in J(x)$, то $x \in \operatorname{supp} \varphi_j \subseteq Q_j$, отже, $x \in Q_j$. Тоді за побудовою

$$g(x) < y_j = \gamma_{x_j} < h(x) \qquad \text{і} \qquad \varphi_j(x) > 0.$$

Якщо ж $j \notin J(x)$, то $\varphi_j(x) = 0$. Тому

$$g(x) = \sum_{j \in J(x)} g(x) \varphi_j(x) < f(x) = \sum_{j \in J(x)} y_j \varphi_j(x) < \sum_{j \in J(x)} h(x) \varphi_j(x) = h(x).$$

Таким чином, f — шукана функція.

3. Диференційовність за Фреше і Ґато і похідна норми. Нехай X і Y — дійсні нормовані простори і $f : X \to Y$ — відображення. Воно називається *диференційовним за Ґато у точці* x з X, якщо існує такий лінійний неперервний оператор $A : X \to Y$, тобто елемент з простору $L(X, Y)$, що для довільного $h \in X$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = Ah.$$

Такий оператор єдиний, він називається *похідною Ґато* відображення f у точці x; позначимо його символом $f'_G(x)$. Відображення $f : X \to Y$ називаємо *диференційовним за Фреше у точці* x з X, якщо існує такий оператор A з $L(X, Y)$, що

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x) - Ah}{\|h\|} = 0.$$

І тут такий оператор визначається однозначно, він називається *похідною Фреше* відображення f у точці x і позначається символом $f'(x)$. Легко перевірити [20, с. 556], що з диференційовності за Фреше відображення f у точці x випливає його диференційовність за Ґато у точці x і рівність $f'_G(x) = f'(x)$. Диференційовні за Фреше відображення $f : X \to Y$ будемо називати просто *диференційовними*, що означає диференційовність за Фреше у кожній точці $x \in X$.

Відомо [20, с. 552], що для дійсних нормованих просторів X, Y і Z та відображень $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to Z$ з диференційовності f у точці x і диференційовності g у точці $f(x)$ випливає диференційовність композиції $h = g \circ f$ у точці x і формула

$$h'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

Нас буде цікавити випадок $Y = \mathbb{R}$, тобто коли розглядаються функціонали $f : X \to \mathbb{R}$, які ми називатимемо просто функціями. Для функції $f : X \to \mathbb{R}$ її похідна $f'(x)$ у точці x — це лінійний неперервний функціонал на X, тобто елемент спряженого з X простору X^*. Якщо $X = Y = \mathbb{R}$, то, співставляючи числу $a \in \mathbb{R}$ лінійне неперервне відображення $y = ax$, одержуємо лінійну ізометрію $T\colon \mathbb{R} \to L(\mathbb{R},\mathbb{R})$, яка дозволяє ототожнити лінійні неперервні оператори з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ з числами з $\mathbb{R}$. Для відображень $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ під похідною $f'(x)$ прийнято розуміти число з $\mathbb{R}$, що породжує оператор $h \mapsto f'(x)h$, який є диференціалом функції f у точці x. Цей оператор і є похідною Фреше функції f у точці x.

Якщо функція $f : X \to \mathbb{R}$ диференційовна у точці x, а функція $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — у точці $f(x)$, то і композиція $h = g \circ f$ диференційовна в точці x, до того ж $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$. У цій формулі число $g'(f(x))$ множиться на функціонал $f'(x)$.

Нам буде потрібен один результат з [17], який ми доведемо детальніше, ніж у [17, с. 49].

Лема 2. *Нехай (X, p) — нормований простір із диференційовною при $x \neq 0$ нормою $p(x) = \|x\|$. Тоді $\|p'(x)\| = 1$ для кожного $x \neq 0$.*

Доведення. Нехай $x \neq 0$. При $t > 0$

$$p(x + tx) - p(x) = \|(1 + t)x\| - \|x\| = (1 + t)\|x\| - \|x\| = t\|x\|.$$

Тоді

$$p'(x)x = \lim_{t\to 0} \frac{p(x + tx) - p(x)}{t} = \lim_{t\to +0} \frac{t\|x\|}{t} = \|x\|,$$

звідки випливає, що $\|x\| = |p'(x)x| \leq \|p'(x)\|\|x\|$, а отже, $\|p'(x)\| \geq 1$.

З іншого боку, з нерівності $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$ випливає, що

$$|p(x + th) - p(x)| \leq \|th\| = |t|\|h\|.$$

Отже, $\left|\dfrac{p(x + th) - p(x)}{t}\right| \leq \|h\|$ при $t > 0$. Переходячи в цій нерівності до границі при $t \to +0$, отримуємо, що $|p'(x)h| \leq \|h\|$ для кожного $h \in X$. Звідси випливає, що $\|p'(x)\| \leq 1$, отже, $\|p'(x)\| = 1$.

4. Існування нескінченно диференційовної проміжної функції на сепарабельному гільбертовому просторі. Нескладно перевірити, що на евклідовому просторі X [21, с. 7] квадрат його норми $f(x) = \|x\|^2 = \langle x, x\rangle$, де $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярний добуток на X, є нескінченно диференційовною функцією. Використовуючи C^∞-функції з доведення леми 1 і функцію $x \mapsto \|x\|^2$, можна довести таке твердження [16, с. 49].

Лема 3. *Нехай A і B — непорожні неперетинні замкнені множини у дійсному сепарабельному гільбертовому просторі X. Тоді існує така C^∞-функція $\varphi\colon X \to [0, 1]$, що $\varphi(x) = 1$ на A і $\varphi(x) = 0$ на B.*

З допомогою цієї леми доведемо теорему про існування C^∞-розбиття одиниці на сепарабельному гільбертовому просторі.

Нагадаємо, що сім'я множин $(A_i)_{i\in I}$ топологічного простору X називається *локально скінченною*, якщо у кожної точки x з X існує окіл U такий, що множина $I(U) = \{i \in I: U \cap A_i \doteq \varnothing\}$ є скінченною. Кажуть, що сім'я множин $\alpha = (A_i)_{i\in I}$ вписана у сім'ю множин $\beta = (B_j)_{j\in J}$ (позначається $\alpha \preccurlyeq \beta$), якщо для кожного $i \in I$ існує таке $j \in J$, що $A_i \subseteq B_j$. Далі, кажуть, що сім'я $(\varphi_i)_{i\in I}$ неперервних функцій $\varphi_i : X \to [0,1]$ утворює *локально скінченне розбиття одиниці* на топологічному просторі X, що *підпорядковане* покриттю $(U_j)_{j\in J}$ простору X, якщо сім'я $(\operatorname{supp}\varphi_i)_{i\in I}$ локально скінченна і вписана в сім'ю $(U_j)_{j\in J}$, до того ж

$$\sum_{i\in I}\varphi_i(x) = 1 \qquad \text{на} \quad X.$$

Якщо простір X нормований і функції φ_i нескінченно диференційовні, то кажуть, що маємо C^∞*-розбиття одиниці*.

Теорема 4. *Нехай X — дійсний сепарабельний гільбертовий простір і $(U_j)_{j\in J}$ — відкрите покриття простору X. Тоді існує локально скінченне C^∞-розбиття одиниці $(\varphi_i)_{i\in I}$ на X, яке підпорядковане цьому покриттю.*

Доведення. З теореми Стоуна про паракомпактність метризовного простору [18, с. 414] випливає, що існує таке локально скінченне відкрите покриття $(V_i)_{i\in I}$ простору X, що вписане в покриття $(U_j)_{j\in J}$. Для нього можна побудувати [18, с. 446] сім'ю $(A_i)_{i\in I}$ замкнених в X множин таку, що $A_i \subseteq V_i$ для кожного $i \in I$, яка утворює покриття простору X. Застосувавши до замкнених множин A_i та $B_i = X \setminus V_i$ лему 3, побудуємо C^∞-функції $\psi_i : X \to [0,1]$, для яких $\psi_i(x) = 1$ на A_i та $\psi_i(x) = 0$ на B_i. Оскільки $\operatorname{supp}\psi_i \subseteq V_i$, то сім'я $(\operatorname{supp}\psi_i)_{i\in I}$ локально скінченна. Тому можна розглянути на X функцію

$$\psi(x) = \sum_{i\in I}\psi_i(x),$$

яка, очевидно, буде нескінченно диференційовною. При цьому $\psi(x) > 0$ на X, адже для кожного $x \in X$ існує таке $i \in I$, що $x \in A_i$, і тоді $\psi(x) \geq \psi_i(x) = 1 > 0$.

Покладемо $\varphi_i = \dfrac{\psi_i}{\psi}$. Зрозуміло, що φ_i — це C^∞-функції, визначені на X, при цьому $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$ і

$$\sum_{i\in I}\varphi_i(x) = \frac{\sum_{i\in I}\psi_i(x)}{\psi(x)} = 1$$

на X. Разом з тим $\operatorname{supp}\varphi_i = \operatorname{supp}\psi_i \subseteq V_i \subseteq U_j$ для деякого $j = j(i)$. Таким чином, $(\varphi_i)_{i\in I}$ — шукане C^∞-розбиття одиниці.

Теорема 5. *Нехай X — сепарабельний гільбертовий простір і (g,h) — строга пара Гана на X. Тоді існує C^∞-функція $f : X \to \mathbb{R}$, яка буде строго проміжною для пари (g,h).*

Доведення. Для кожного $x \in X$ виберемо довільне число γ_x, для якого $g(x) < \gamma_x < h(x)$. З напівнеперервності зверху і знизу у точці x функцій g і h відповідно випливає, що для кожного $x \in X$ існує такий відкритий окіл U_x точки x у X, що

$$g(u) < \gamma_x < h(u) \qquad \text{на} \quad U_x.$$

Згідно з теоремою 4, існує локально скінченне C^∞-розбиття одиниці $(\varphi_i)_{i\in I}$, яке підпорядковане покриттю $(U_x)_{x\in X}$. Для кожного $i \in I$ виберемо $x_i \in X$ так, що $\operatorname{supp}\varphi_i \subseteq U_{x_i}$, і покладемо $y_i = \gamma_{x_i}$. Розглянемо на X функцію

$$f(x) = \sum_{i\in I} y_i\varphi_i(x).$$

Її нескінченна диференційовність безпосередньо випливає з нескінченної диференційовності функції φ_i. Покажемо, що функція f і є шуканою.

Нехай $x \in X$. Розглянемо множину $I(x) = \{i \in I : x \in \operatorname{supp}\varphi_i\}$. За побудовою ця множина скінченна. Якщо $x \in \operatorname{supp}\varphi_i$, то $x \in U_{x_i}$, а отже,

$$g(x) < \gamma_{x_i} = y_i < h(x) \qquad \text{і} \qquad \varphi_i(x) > 0.$$

Тому

$$g(x) = \sum_{i\in I} g(x)\varphi_i(x) < \sum_{i\in I} y_i\varphi_i(x) = f(x) < \sum_{i\in I} h(x)\varphi_i(x) = h(x)$$

для кожного $x \in X$.

5. Асплундові простори. Дійсний банаховий простір X називається *асплундовим* [17, с. 27], якщо для його довільного сепарабельного підпростору L спряжений із ним простір L^* теж сепарабельний. Можна довести, що кожний сепарабельний банаховий простір X із сепарабельним спряженим X^* є асплундовим. Рефлексивні банахові простори є асплундовими, зокрема такими є простори $l_p(I)$ при $1 < p < \infty$, простори $c_0(I)$ теж асплундові, а простори l_1 і $C[0,1]$ — ні.

Шапочка на нормованому просторі X — це функція $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ з обмеженим непорожнім носієм $\operatorname{supp}\varphi$. Ми будемо використовувати наступне твердження з [17, с. 59].

Теорема 6. *Нехай X — дійсний сепарабельний банаховий простір. Тоді еквівалентними є наступні умови*:

(i) *на X існує диференційовна при $x \neq 0$ норма, що еквівалентна вихідній нормі простору X*;

(ii) *на X існує диференційовна шапочка*;

(iii) *спряжений з X простір X^* є сепарабельним.*

Зауважимо, що ще у статті [22] вказувалося на те, що диференційовні шапочки на просторах l_1 і $C[0,1]$ не існують.

Введемо в розгляд числа $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{t^2-1}}dt$ і $M = \dfrac{2}{eI}$. Символами $B[x_0,r]$ і $B(x_0,r)$ ми позначаємо відповідно замкнену і відкриту кулі з центром у точці x_0 і радіусом r у нормованому просторі $(X, \|\cdot\|)$.

Лема 4. *Нехай $(X, \|\cdot\|)$ — дійсний банаховий простір із диференційовною при $x \neq 0$ нормою $\|\cdot\|$, $x_0 \in X$ і $0 < r < R$. Тоді існує диференційовна функція $f : X \to [0,1]$ така, що $f(x) = 1$ на $B[x_0,r]$, $\operatorname{supp} f = B(x_0,R)$ і $\|f'(x)\| \le \dfrac{M}{R-r}$ на X.*

Доведення. Розглянемо C^∞-функцію $\varphi = \varphi_{-1,1}$ з доведення леми 1. Функція $\psi(t) = \dfrac{1}{I}\displaystyle\int_{-\infty}^{t}\varphi(s)ds$ теж буде нескінченно диференційовною з $\psi'(t) = \dfrac{\varphi(t)}{I}$, до того ж $0 \le \psi(t) \le 1$

і $0 \le \psi'(t) \le \dfrac{1}{eI}$ на $\mathbb{R}$, $\operatorname{supp}\psi = (-1, +\infty)$, $\psi(t) = 1$ при $t \ge 1$. Нехай $\gamma(t) = \dfrac{2(t-r)}{R-r} - 1$ і $g(t) = 1 - \psi(\gamma(t))$. Зрозуміло, що функція $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ нескінченно диференційовна, $0 \le g(t) \le 1$ на $\mathbb{R}$, $g(t) = 1$ при $t \le r$, $\operatorname{supp} g = (-\infty, R)$ і

$$g'(t) = -\psi'(\gamma(t))\gamma'(t) = -\frac{2\varphi(\gamma(t))}{I(R-r)} \qquad \text{на} \quad \mathbb{R}.$$

Покладемо $p(x) = \|x\|$ і $f(x) = g(p(x - x_0))$ на X. Функція f диференційовна як при $x \ne x_0$ за теоремою про диференційовність композиції, так і в точці x_0, тому що $f(x) = 1$ при $\|x - x_0\| \le r$. При цьому $0 \le f(x) \le 1$ і $\operatorname{supp} f = B(x_0, R)$. Нарешті,

$$f'(x) = g'(p(x - x_0))p'(x - x_0) \ \text{ при } \ x \ne x_0 \ \text{ і } \ f'(x_0) = 0.$$

Тому при $x \ne x_0$ за лемою 2

$$\|f'(x)\| = |g'(p(x - x_0))|\|p'(x - x_0)\| = \frac{2|\varphi(\gamma(p(x - x_0)))|}{I(R-r)} \le \frac{2}{eI(R-r)} = \frac{M}{R-r}$$

і $\|f'(x_0)\| = 0 \le \dfrac{M}{R-r}$. Таким чином, f — шукана функція.

Нам буде потрібна теорема про почленне диференціювання рядів із функціоналів на банаховому просторі, яка випливає з теореми про диференціювання граничної функції [23, с. 52].

Теорема 7. *Нехай X — дійсний банаховий простір, $u_n : X \to \mathbb{R}$ — диференційовні функції і $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на X, до того ж ряд із похідних $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ збігається рівномірно на X. Тоді функція f диференційовна і $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ на X.*

З леми 4 і теореми 7 випливає таке твердження.

Лема 5. *Нехай X — сепарабельний асплундовий простір і G — відкрита непорожня і обмежена множина в X. Тоді існує диференційовна функція $f : X \to [0, 1]$ така, що $\operatorname{supp} f = G$.*

Доведення. Згідно з теоремою 6, на X існує еквівалентна норма $\|\cdot\|$, яка диференційовна при $x \ne 0$. Відносно цієї норми X буде сепарабельним і банаховим, множина G відкритою і обмеженою, отже, її діаметр

$$D = \operatorname{diam} G = \sup\{\|x' - x''\| : x', x'' \in G\}$$

— скінченне число. З сепарабельності простору $(X, \|\cdot\|)$ випливає, що існує така послідовність відкритих куль $U_n = B(x_n, r_n)$ в X, що $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Оскільки $U_n \subseteq G$, то $r_n \le D$ для кожного n. Нехай $B_n = B\Big[x_n, \dfrac{r_n}{2}\Big]$. За лемою 4 існує така диференційовна функція $\varphi_n :$ $X \to [0, 1]$, що $\varphi_n(x) = 1$ на B_n, $\operatorname{supp}\varphi_n = U_n$ і $\|\varphi_n'(x)\| \le \dfrac{2M}{r_n}$ на X. Покладемо $u_n(x) =$ $= \dfrac{r_n}{2^n D}\varphi_n(x)$ на X. Оскільки

$$0 \le u_n(x) = \frac{r_n}{2^n D}\varphi_n(x) \le \frac{r_n}{2^n D} \le \frac{1}{2^n} \qquad \text{на} \quad X$$

для кожного n, то ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

збігається на X навіть рівномірно, до того ж $0 \leq f(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} = 1$. Далі, для довільних $x \in X$ і $n \in \mathbb{N}$

$$\|u'_n(x)\| = \frac{r_n}{2^n D} \|\varphi'_n(x)\| \leq \frac{r_n}{2^n D} \frac{2M}{r_n} = \frac{M}{2^{n-1} D}.$$

Тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|u'_n(x)\|$ збігається рівномірно на X, звідки випливає і рівномірна збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ на X. Тоді за теоремою 7 функція f буде диференційовною і $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ на X.

Залишилося перевірити, що $\operatorname{supp} f = G$. Якщо $x \in G$, то існує такий номер n, що $x \in U_n = \operatorname{supp} \varphi_n = \operatorname{supp} u_n$. Але $u_k(x) \geq 0$ для кожного k, тому

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \geq u_n(x) > 0,$$

а отже, $x \in \operatorname{supp} f$. Навпаки, якщо $x \in \operatorname{supp} f$, то $f(x) > 0$, отже, існує такий номер n, що $u_n(x) > 0$, а тоді $x \in \operatorname{supp} u_n = U_n \subseteq G$ і $x \in G$.

Таким чином, f — шукана функція.

6. Існування проміжної диференційовної функції на асплундовому просторі. На основі леми 5 ми доведемо теорему про існування розбиття одиниці на асплундовому просторі, що складається з диференційовних функцій.

Теорема 8. *Нехай X — сепарабельний асплундовий простір і $(U_j)_{j \in J}$ — його відкрите покриття, що складається з обмежених множин U_j. Тоді існує локально скінченне розбиття одиниці $(\varphi_i)_{i \in I}$ на X, яке підпорядковане покриттю $(U_j)_{j \in J}$ і складається з диференційовних функцій φ_i.*

Доведення. Впишемо в покриття $(U_j)_{j \in J}$ локально скінченне відкрите покриття $(V_i)_{i \in I}$, де $V_i \neq \varnothing$. Всі множини V_i обмежені, тому на основі леми 5 для кожного $i \in I$ існує диференційовна функція $\psi_i : X \to [0, 1]$ така, що $\operatorname{supp} \psi_i = V_i$. Функція

$$\psi(x) = \sum_{i \in I} \psi_i(x)$$

буде визначеною на X та диференційовною і $\psi(x) > 0$, оскільки

$$X = \bigcup_{i \in I} \operatorname{supp} \psi_i.$$

В такому випадку функції $\varphi_i = \dfrac{\psi_i}{\psi}$ визначені і диференційовні на X, $\operatorname{supp} \varphi_i = \operatorname{supp} \psi_i = V_i$ для кожного $i \in I$. При цьому

$$\sum_{i \in I} \varphi_i(x) = 1 \quad \text{на} \quad X,$$

отже, $(\varphi_i)_{i \in I}$ — шукане розбиття одиниці.

З теореми 8 випливає таке твердження.

Теорема 9. *Нехай (g, h) — строга пара Гана на сепарабельному асплундовому просторі X. Тоді для неї існує строго проміжна диференційовна функція $f : X \to \mathbb{R}$.*

Доведення. Для кожного $x \in X$ можна вибрати число γ_x і відкриту кулю $U_x = B(x, \varepsilon_x)$ так, що

$$g(u) < \gamma_x < h(u) \quad \text{на} \quad U_x.$$

Для покриття $(U_x)_{x \in X}$ простору X, згідно з теоремою 8, існує підпорядковане йому локально скінченне розбиття одиниці $(\varphi_i)_{i \in I}$, що складається з диференційовних функцій $\varphi_i : X \to [0, 1]$. Для кожного $i \in I$ існує така точка $x_i \in X$, що $\operatorname{supp} \varphi_i \subseteq U_{x_i}$. Покладемо $y_i = \gamma_{x_i}$ і визначимо на X функцію

$$f(x) = \sum_{i \in I} y_i \varphi_i(x).$$

Як і в доведенні теореми 5, легко перевіряється, що f — строго проміжна для пари (g, h) диференційовна функція.

Література

1. *Hahn H.* Uber halbstetige und unstetige Functionen // Sitzungsber. Österr. Akad.Wiss. Wien. Math. – naturwiss. Kl. Abt. IIa. – 1917. – **126**. – S. 91 – 110.
2. *Маслюченко В. К., Маслюченко О. В., Мельник В. С.* Існування проміжних кусково лінійних та нескінченно диференційовних функцій // Бук. мат. журн. – 2016. – **4**, № 3-4. – С. 93 – 100.
3. *Dieudonne J.* Une généralisation des espaces compacts // J. Math. Pures et Appl. – 1944. – **23**. – P. 65 – 76.
4. *Tong H.* Some characterizations of normal and perfectly normal spaces // Bull. Amer. Math. Soc. – 1948. – **54**. – P. 65.
5. *Tong H.* Some characterizations of normal and perfectly normal spaces // Duke Math. J. – 1952. – **19**. – P. 289 – 292.
6. *Katetov M.* On real-valued functions in topological spaces // Fund. Math. – 1952. – **38**. – P. 85 – 91.
7. *Katetov M.* Correction to 'On real-valued functions in topological spaces' // Fund. Math. – 1953. – **40**. – P. 203 – 205.
8. *Dowker C. H.* On countably paracompact spaces // Can. J. Math. – 1951. – **3**. – P. 219 – 224.
9. *Michael E.* Continuous selections I // Ann. Math. – 1956. – **63**. – P. 361 – 382.
10. *Good C., Stares I.* New proofs of classical insertion theorems // Comment. math. Univ. carol. – 2000. – **41**, № 1. – P. 139 – 142.
11. *Yamazaki K.* The range of maps on classical insertion theorems // Acta Math. Hung. – 2011. – **132**(1-2). – P. 42 – 48.
12. *Benyamini Y., Lindenstrauss J.* Geometric nonlinear functional analysis. – Amer. Math. Soc., 2000. – Vol. 1. – 488 p.
13. *Маслюченко В. К., Мельник В. С.* Про рівномірне відхилення від простору неперервних функцій // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 1. – С. 158 – 166.
14. *Маслюченко В. К., Петей С. П.* Поточкові границі неперервних монотонних функцій та функцій обмеженої варіації // Бук. мат. журн. – 2015. – **3**, № 2. – С. 64 – 71.
15. *Маслюченко В. К., Мельник В. С.* Теореми про проміжну афінну функцію для опуклої і вгнутої функцій // Бук. мат. журн. — 2016. — **4**, № 1. – С. 110 – 116.
16. *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий. – М.: Мир, 1967. – 203 с.
17. *Deville R., Godefroy G., Zizler V.* Smoothness and renormings in Banach spaces. – Longman Sci. & Technical, 1993. – 359 p.
18. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
19. *Волошин Г. А.* Пошарове наближення нарізно неперервних функцій за допомогою многочленів Бернштейна від багатьох змінних // Бук. мат. журн. – 2013. – **1**, № 1-2. – С. 26 – 29.
20. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624 с.
21. *Маслюченко В. К.* Лекції з функціонального аналізу. Ч.3. Гільбертові простори. – Чернівці: Чернів. нац. ун-т, 2011. – 71 с.
22. *Bonic R., Frampton C.* Differentiable functions on certain Banach spaces // Bull. Amer. Math. Soc. – 1965. – **71**, № 2. – С. 393 – 395.
23. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. – М.: Мир, 1971. – 392 с.

Одержано 12.02.17