УДК 517.518:519.652

М. М. Пагіря (Мукачів. держ. ун-т)

ЗОБРАЖЕННЯ ФУНКЦІЙ $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\sin z$, $\cos z$ ЛАНЦЮГОВИМИ ДРОБАМИ

We obtain the representations of the functions $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\sin z$, and $\cos z$ by quasireciprocal functional continued fractions of the Thiele type.

Получены представления функций $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\sin z$, $\cos z$ квазиобратной функциональной цепной дробью типа Тиле.

Вступ. Ланцюгові дроби та їх узагальнення застосовуються при дослідженні задач теорії чисел, наближення функцій, обчислювальної математики тощо [1 – 11]. Функції комплексної змінної наближаються ланцюговими дробами, раціональними функціями [12] та апроксимантами Паде [13, 14]. Розглядаються також задачі наближення узагальненнями ланцюгових дробів у більш загальних функціональних просторах [15, 16].

Існує кілька підходів до зображення функцій комплексної змінної ланцюговими дробами. Відомо, що розв'язок диференціального рівняння Ріккаті спеціального вигляду можна подати у вигляді нескінченного ланцюгового дробу. Якщо функція задовольняє диференціальне рівняння Ріккаті при певних значеннях коефіцієнтів, то отримуємо розвинення функції в ланцюговий дріб [5]. Інший підхід до розвинення функцій у ланцюгові дроби пов'язаний із визначниками Ганкеля, елементи яких є коефіцієнтами розвинення функції в степеневий ряд в околі деякої точки [2, 6]. У цьому випадку коефіцієнти правильного ланцюгового С-дробу визначаються через відношення визначників Ганкеля. Можна отримати розвинення функції в ланцюговий дріб, скориставшись розвиненням відношення гіпергеометричної функції в ланцюговий дріб. Велику кількість розвинень елементарних та спеціальних функцій у ланцюгові дроби отримано за допомогою вказаних підходів.

Тіле [17] запропонував формулу, яка є аналогом формули Тейлора в теорії ланцюгових дробів. Якщо в околі деякої точки функція має обернені похідні Тіле довільного порядку, то функцію можна розвинути в ланцюговий дріб. Деякі узагальнення формули Тіле для ланцюгових дробів інших виглядів запропоновано в монографії [18].

У даній роботі розглядаються застосування ще одного узагальнення формули Тіле — функціональної формули типу Тіле [19], яка ґрунтується на обернених g-похідних 2-го типу, до зображення функцій $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\sin z$, $\cos z$ квазіоберненим функціональним ланцюговим дробом типу Тіле.

Щодо актуальності запропонованих досліджень варто зазначити наступне. В енциклопедії [2] та довіднику [6] наведено розвинення багатьох функцій у ланцюгові дроби, вказано області збіжності розвинень. Всі розвинення отримано вказаними вище методами. Для функцій $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\sin z$, $\cos z$ не відомі коефіцієнти диференціального рівняння Ріккаті, розв'язком якого були б розглядувані функції. Для даних функцій не встановлено формули обернених похідних Тіле n-го порядку та обернених похідних 2-го типу n-го порядку, а тому не вдається отримати розвинення функцій $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\sin z$, $\cos z$ у ланцюговий дріб Тіле та квазіобернений ланцюговий дріб типу Тіле в загальному вигляді. Можна послідовно знаходити обернені похідні Тіле та обернені похідні 2-го типу цих функцій. У [18] отримано кілька підхідних дробів ланцюгового дробу Тіле (Т–ЛД) та квазіобернених ланцюгових дробів типу Тіле для вказаних функцій. Метод Вісковатова також дозволяє отримати кілька перших підхідних дробів для вказаних функцій [5, с. 162 – 168; 6, с. 113], але розвинення в ланцюговий дріб не знайдено. Використовуючи тотожність Ойлера, можна записати степеневі ряди функцій $\sin z,\ \cos z$ загальним ланцюговим Т-дробом, але такі дроби не мають жодних переваг над степеневими рядами [6, с. 201]. Відомо, що побудовані за формулою Обрешкова раціональні наближення функцій $\sin x$ та $\cos x$ мають невисокий порядок точності [5, с. 153]. Узагальненням ланцюгових С-дробів є ланцюгові δ-дроби [20]. Можна послідовно знаходити підхідні дроби ланцюгових δ-дробів вказаних функцій, але не встановлено загальний вигляд розвинення функцій $\operatorname{sh} z,\ \operatorname{ch} z,$ $\sin z,\ \cos z$ у ланцюгові δ-дроби.

У роботах В. К. Дзядика [21, 22] досліджувалася задача наближення цих функцій діагональними апроксимантами Паде. Коефіцієнти багаточленів чисельника та знаменника апроксиманти Паде $R^{[2n+1,n]}(z)$ визначаються через значення похідних багаточленів $A_{2n+1}(t)$ при $t=0$ або $t=1$. В свою чергу багаточлен $A_{2n+1}(t)$ визначається через детермінант $(n+1)$-го порядку, останній рядок якого складають непарні степені $t,$ а решта рядків — значення бета-функції $B(k,l), k=2,4,\ldots,2n, l=2,4,\ldots,2n+2.$

Обернені g-похідні 2-го типу та їх властивості. Нехай функція $f(z)$ аналітична на компакті $\mathcal{Z}\subset\mathbb{C},$ базис-функція $g(z)$ аналітична та однолиста на $\mathcal{Z}.$ Вибрана множина інтерполяційних вузлів $\mathbf{Z}=\big\{z_i : z_i\in\mathcal{Z}, z_i\neq z_j, i\neq j, i,j=0,1,\ldots,n\big\}.$ Елементи послідовностей $\big\{v_k(g;z)\big\}$ та $\big\{V_k(g;z)\big\}$ визначимо таким чином:

$$f(z)=\frac{1}{v_0(g;z)},\qquad v_k(g;z)=d_k+\frac{g(z)-g(z_k)}{v_{k+1}(g;z)},\quad z_k\in\mathbf{Z},\quad d_k\in\mathbb{C},\quad k=0,1,\ldots,n,$$

$$V_0(g;z)=v_0(g;z),\qquad V_k(g;z)=v_0(g;z)\circ v_1(g;z)\circ\,\ldots\,\circ v_k(g;z),\quad k=1,2,\ldots,n.$$

Тоді

$$f(z)=\frac{1}{V_n(g;z)}=\left(d_0+\frac{g(z)-g(z_0)}{d_1}\,+\cdots+\,\frac{g(z)-g(z_{n-1})}{d_n}\,+\,\frac{g(z)-g(z_n)}{v_{n+1}(g;z)}\right)^{-1}.\qquad(1)$$

Розглядається квазіобернений функціональний інтерполяційний ланцюговий дріб типу Тіле (Т–КФІЛД) [18]

$$D_n(g;z)=\left(d_0+\frac{g(z)-g(z_0)}{d_1}\,+\,\frac{g(z)-g(z_1)}{d_2}\,+\cdots+\,\frac{g(z)-g(z_{n-1})}{d_n}\right)^{-1}.\qquad(2)$$

Коефіцієнти Т–КФІЛД (2) обчислюються за значенням функції у вузлах $\mathbf{Z}$ через обернені g-різниці 2-го типу:

$$d_0=\varrho_0^{(2)}[g;z_0;f],\quad d_1=\varrho_1^{(2)}[g;z_0,z_1;f],$$

$$d_k=\varrho_k^{(2)}[g;z_0,\ldots,z_k;f]-\varrho_{k-2}^{(2)}[g;z_0,\ldots,z_{k-2};f],\quad k\geq 2.$$

Обернені g-різниці 2-го типу задовольняють рекурентне співвідношення [19]

$$\varrho_k^{(2)}[g;z_0,\ldots,z_k;f] =$$
$$= \varrho_{k-2}^{(2)}[g;z_0,\ldots,z_{k-2};f] + \frac{g(z_k)-g(z_{k-1})}{\varrho_{k-1}^{(2)}[g;z_0,\ldots,z_{k-2},z_k;f] - \varrho_{k-1}^{(2)}[g;z_0,\ldots,z_{k-1};f]},$$
$$\varrho_0^{(2)}[g;z_0;f] = \frac{1}{f(z_0)}, \qquad \varrho_1^{(2)} = \varrho_1^{(2)}[g;z_0,z_1;f] = \frac{g(z_1)-g(z_0)}{\varrho_0^{(2)}[g;z_1;f] - \varrho_0^{(2)}[g;z_0;f]}, \quad k = 2,3,\ldots.$$

***Зауваження* 1.** Із (1) випливає, що якщо $(g(z)-g(z_n))/v_{n+1}(z) \equiv 0$ при всіх $z \in \mathcal{Z}$, то $f(z) \equiv D_n(g;z)$.

Обернена g-різниця 2-го типу k-го порядку $\varrho_k^{(2)}[g;z_0,\ldots,z_k;f]$ є симетричною функцією відносно своїх аргументів $z_0,z_1,\ldots,z_k$ [18, с. 180 – 182].

Означення 1. *Якщо існує границя, скінченне значення або нескінченність, коли інтерполяційні вузли $z_0,z_1,\ldots,z_k$ прямують до деякого $z \in \mathcal{Z}$ оберненої g-різниці 2-го типу k-го порядку $\varrho_k^{(2)}[g;z_0,\ldots,z_k;f]$, то граничне значення називається оберненою g-похідною 2-го типу k-го порядку.*

Обернену g-похідну 2-го типу k-го порядку в точці $z \in \mathcal{Z}$ позначають через ${}^{[k]}f_g(z)$. З означення випливає, що ${}^{[k]}f_g(z) = \varrho_k^{(2)}[g;\underbrace{z,\ldots,z}_{k+1};f] = \lim_{z_0,z_1,\ldots,z_k\to z}\varrho_k^{(2)}[g;z_0,z_1,\ldots,z_k;f]$.

Теорема 1 [19]. 1. *Якщо при деякому значенні m визначники*

$$F_m^{(1)}(z) = \begin{vmatrix} f' & g' & (gf)' & \cdots & (g^{m-1}f)' & (g^m)' \\ f'' & g'' & (gf)'' & \cdots & (g^{m-1}f)'' & (g^m)'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f^{(2m)} & g^{(2m)} & (gf)^{(2m)} & \cdots & (g^{m-1}f)^{(2m)} & (g^m)^{(2m)} \end{vmatrix},$$

$$F_m^{(2)}(z) = \begin{vmatrix} f' & g' & (gf)' & \cdots & (g^{m-1}f)' & (g^m f)' \\ f'' & g'' & (gf)'' & \cdots & (g^{m-1}f)'' & (g^m f)'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f^{(2m)} & g^{(2m)} & (gf)^{(2m)} & \cdots & (g^{m-1}f)^{(2m)} & (g^m f)^{(2m)} \end{vmatrix}$$

відмінні від нуля в деякій точці $z \in \mathcal{Z}$, то в указаній точці функція $f(z)$ має обернену g-похідну 2-го типу $(2m)$-го порядку і

$${}^{[2]}f_g(z) = \frac{\begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f' & (fg)' \\ f'' & (fg)'' \end{vmatrix}}, \qquad {}^{[2m]}f_g(z) = \frac{F_m^{(1)}(z)}{F_m^{(2)}(z)}, \quad m = 2,3,\ldots.$$

2. *Якщо при деякому значенні m визначники*

$$F_m^{(3)}(z) = \begin{vmatrix} f & g & gf & \ldots & g^{m-1} & g^{m-1}f & g^m f & g^{m+1}f \\ f' & g' & (gf)' & \ldots & (g^{m-1})' & (g^{m-1}f)' & (g^m f)' & (g^{m+1}f)' \\ f'' & g'' & (gf)'' & \cdots & (g^{m-1})'' & (g^{m-1}f)'' & (g^m f)'' & (g^{m+1}f)'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{(k)} & g^{(k)} & (gf)^{(k)} & \cdots & (g^{m-1})^{(k)} & (g^{m-1}f)^{(k)} & (g^m f)^{(k)} & (g^{m+1}f)^{(k)} \end{vmatrix},$$

$$F_m^{(4)}(z) = \begin{vmatrix} f & g & gf & \cdots & g^{m-1} & g^{m-1}f & g^m & g^m f \\ f' & g' & (gf)' & \cdots & (g^{m-1})' & (g^{m-1}f)' & (g^m)' & (g^m f)' \\ f'' & g'' & (gf)'' & \cdots & (g^{m-1})'' & (g^{m-1}f)'' & (g^m)'' & (g^m f)'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{(k)} & g^{(k)} & (gf)^{(k)} & \cdots & (g^{m-1})^{(k)} & (g^{m-1}f)^{(k)} & (g^m)^{(k)} & (g^m f)^{(k)} \end{vmatrix},$$

$$k = 2m+1,$$

відмінні від нуля в деякій точці $z \in \mathcal{Z}$, то в цій точці функція $f(z)$ має обернену g-похідну 2-го типу $(2m+1)$-го порядку і

$${}^{[1]}f_g(z) = -\frac{f^2(z)g'(z)}{f'(z)}, \qquad {}^{[2m+1]}f_g(z) = \frac{F_m^{(3)}(z)}{F_m^{(4)}(z)} \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Теорема 2 [19]**.** *Нехай існують скінченні відмінні від нуля обернені g-похідні 2-го типу функцій $u = f(z)$ та $v = h(z)$. Обернені g-похідні 2-го типу суми, різниці, добутку та частки цих функцій визначаються за формулами*

$${}^{[1]}(u \pm v)_g = \frac{(u \pm v)^2 \cdot {}^{[1]}v_g \cdot {}^{[1]}u_g}{u^2 \cdot {}^{[1]}v_g \pm v^2 \cdot {}^{[1]}u_g},$$

$${}^{[1]}(u\,v)_g = \frac{u\,v \cdot {}^{[1]}u_g \cdot {}^{[1]}v_g}{u \cdot {}^{[1]}v_g + v \cdot {}^{[1]}u_g}, \qquad {}^{[1]}(u/v)_g = \frac{(u/v) \cdot {}^{[1]}u_g \cdot {}^{[1]}v_g}{u \cdot {}^{[1]}v_g - v \cdot {}^{[1]}u_g}.$$

Має місце рекурентна формула знаходження обернених g-похідних 2-го типу [19]

$${}^{[0]}f_g(z) = \frac{1}{f(z)}, \qquad {}^{[1]}f_g(z) = \frac{-f^2(z)g'(z)}{f'(z)},$$
$${}^{[k]}f_g(z) = \frac{k\,g'(z)}{\left({}^{[k-1]}f_g(z)\right)'} + {}^{[k-2]}f_g(z), \quad k = 2, 3, \ldots . \tag{3}$$

Якщо базис-функція $g(z)$ аналітична і однолиста в $\mathcal{Z}$, функція $f(z)$ аналітична в $\mathcal{Z}$ і має скінченні обернені g-похідні 2-го типу довільного порядку в точці $z = z_*$, то в околі точки $z_* \in \mathcal{Z}$ функція $f(z)$ може бути розвинена в квазіобернений функціональний ланцюговий дріб типу Тіле (Т–КФЛД)

$$f(z) = \frac{1}{{}^{[0]}f_g(z_*)} + \frac{g(z) - g(z_*)}{{}^{[1]}f_g(z_*)} + \frac{g(z) - g(z_*)}{2g'(z)/({}^{[1]}f_g(z_*))'} + \cdots + \frac{g(z) - g(z_*)}{n\,g'(z)/\left({}^{[n-1]}f_g(z_*)\right)'} + \cdots . \tag{4}$$

Розвинення функції $f(z)$ в Т–КФЛД (4) є формальним. У кожному конкретному випадку після того, як для функції отримано розвинення в Т–КФЛД, потрібно визначити область збіжності ланцюгового дробу та довести збіжність Т–КФЛД до функції.

Розвинення функцій в Т–КФЛД. Розглянемо розвинення функцій комплексної змінної $f(z)$ за базис-функцією $g(z)$ в околі точки $z_* \in \mathcal{Z}$ в Т–КФЛД (4):

$$f(z) = \left(d_0(g(z); z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty} \frac{g(z) - g(z_*)}{d_n(g(z); z_*)} \right)^{-1} \tag{5}$$

де

$$d_0(g(z);z_*)=\frac{1}{f(z_*)},\qquad d_1(g(z);z_*)={}^{[1]}f_g(z_*)=\frac{-f^2(z_*)g'(z_*)}{f'(z_*)},$$
$$d_n(g(z);z_*)=\frac{ng'(z_*)}{\left({}^{[n-1]}f_g(z_*)\right)'}={}^{[n]}f_g(z_*)-{}^{[n-1]}f_g(z_*),\qquad n=2,3,\ldots. \tag{6}$$

***Зауваження* 2.** Згідно з (3) та зауваженням 1, якщо ${}^{[n]}f_g(z)=C, C=\mathrm{const}$, для всіх $z\in\mathcal{Z}$ і $g'(z)\neq 0$, то ${}^{[n+1]}f_g(z)=\infty$. В цьому випадку Т–КФЛД є скінченним і функція $f(z)$ зображується скінченним ланцюговим дробом вигляду

$$f(z)=\left(d_0(g(z);z_*)+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n}\frac{g(z)-g(z_*)}{d_k(g(z);z_*)}\right)^{-1}.$$

Перейдемо до зображення функцій $\operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z, \sin z, \cos z$ Т–КФЛД (5).

Функція $\operatorname{ch} z$. Нехай базис-функція $g(z)=e^z$. Використовуючи формули (3), знаходимо обернені g-похідні 2-го типу функції $\operatorname{ch} z$. Маємо

$${}^{[0]}(\operatorname{ch} z)_g=\frac{2e^z}{e^{2z}+1},\qquad {}^{[1]}(\operatorname{ch} z)_g=\frac{(e^{2z}+1)^2}{2(1-e^{2z})},\qquad {}^{[2]}(\operatorname{ch} z)_g=\frac{2}{e^z(3-e^{2z})},$$
$${}^{[3]}(\operatorname{ch} z)_g=\frac{e^{4z}-6e^{2z}+1}{2},\qquad {}^{[4]}(\operatorname{ch} z)_g=0.$$

Оскільки $({}^{[4]}(\operatorname{ch} z)_g)'=0$, то ${}^{[5]}(\operatorname{ch} z)_g=\infty$ і ланцюговий дріб „обривається” на 4-му поверсі. Звідси випливає, що функцію $\operatorname{ch} z$ в околі точки $z_*\in\mathcal{Z}$, яка належить області визначення обернених g-похідних 2-го типу функції $\operatorname{ch} z$, можна зобразити скінченним Т–КФЛД

$$\operatorname{ch} z=\frac{1}{d_0(e^z;z_*)}\,\underset{+}{}\,\frac{e^z-e^{z_*}}{d_1(e^z;z_*)}\,\underset{+}{}\,\frac{e^z-e^{z_*}}{d_2(e^z;z_*)}\,\underset{+}{}\,\frac{e^z-e^{z_*}}{d_3(e^z;z_*)}\,\underset{+}{}\,\frac{e^z-e^{z_*}}{d_4(e^z;z_*)},$$

де коефіцієнти, згідно з (6), будуть такими:

$$d_0(e^z;z_*)=\frac{2e^{z_*}}{e^{2z_*}+1},\qquad d_1(e^z;z_*)=\frac{(e^{2z_*}+1)^2}{2(1-e^{2z_*})},\qquad d_2(e^z;z_*)=\frac{2(e^{2z_*}-1)^2}{e^{z_*}(3-e^{2z_*})(e^{2z_*}+1)},$$
$$d_3(e^z;z_*)=\frac{e^{2z_*}(e^{2z_*}-3)^2}{2(e^{2z_*}-1)},\qquad d_4(e^z;z_*)=\frac{2}{e^{z_*}(e^{2z_*}-3)}.$$

Використавши розвинення функції e^z в Т–ЛД [18, с. 250], отримаємо ланцюговий дріб Тіле

$$\mathbf{k}(z_*,z)=e^z-e^{z_*}=e^{z_*}\left(\frac{z-z_*}{1}\,\underset{+}{}\,\frac{z-z_*}{-2}\,\underset{+}{}\,\frac{z-z_*}{-3}\,\underset{+}{}\,\frac{z-z_*}{2}\,\underset{+}{}\,\frac{z-z_*}{5}\,\underset{+}{}\right.$$
$$\left.\underset{+}{}\,\frac{z-z_*}{-2}\,\underset{+}{}\,\frac{z-z_*}{-7}\,\underset{+}{}\cdots\underset{+}{}\,\frac{z-z_*}{(-1)^n2}\,\underset{+}{}\,\frac{z-z_*}{(-1)^n(2n+1)}\,\underset{+}{}\cdots\right). \tag{7}$$

Згідно з теоремою 9.2.2 [18, с. 287], Т–ЛД (7) збігається на всій комплексній площині до функції e^z і на довільному компакті $\mathcal{Z}\subset\mathbb{C}$ ланцюговий дріб збігається рівномірно.

Тоді зображення функції $\operatorname{ch} z$ Т–КФЛД набирає вигляду

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{d_0(e^z; z_*)} + \frac{\mathbf{k}(z_*, z)}{d_1(e^z; z_*)} + \frac{\mathbf{k}(z_*, z)}{d_2(e^z; z_*)} + \frac{\mathbf{k}(z_*, z)}{d_3(e^z; z_*)} + \frac{\mathbf{k}(z_*, z)}{d_4(e^z; z_*)}.$$

В окремому випадку в околі точки $z_* = \ln 2$, яка належить області визначення обернених g-похідних 2-го типу функції $\operatorname{ch} z$, маємо зображення функції Т–КФЛД

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{4/5} + \frac{\mathbf{k}(\ln 2, z)}{-25/6} + \frac{\mathbf{k}(\ln 2, z)}{-9/5} + \frac{\mathbf{k}(\ln 2, z)}{2/3} + \frac{\mathbf{k}(\ln 2, z)}{1},$$

де

$$\mathbf{k}(\ln 2, z) = 2\left(\frac{z-\ln 2}{1} + \frac{z-\ln 2}{-2} + \frac{z-\ln 2}{-3} + \cdots + \frac{z-\ln 2}{(-1)^n 2} + \frac{z-\ln 2}{(-1)^n(2n+1)} + \cdots\right).$$

Значення $\ln 2$ можна знайти з потрібною точністю за допомогою одного із відомих розвинень функції $\ln(1+z)$ у ланцюговий дріб (див., наприклад, [2, с. 202], формула 6.1.17, [6, с. 196], формули 11.2.2, 11.2.3, [18 с. 259], формула 8.54, [18, с. 328], формула 10.26).

Можна отримати інше зображення функції $\operatorname{ch} z$ функціональним ланцюговим дробом, якщо за базис-функцію вибрати $g(z) = e^{z/2}$. Тоді, згідно з формулами (3), обернені g-похідні 2-го типу функції $\operatorname{ch} z$ мають вигляд

$$^{[0]}(\operatorname{ch} z)_g = \frac{2e^z}{e^{2z}+1}, \qquad ^{[1]}(\operatorname{ch} z)_g = \frac{(e^{2z}+1)^2}{4e^{z/2}(1-e^{2z})}, \qquad ^{[2]}(\operatorname{ch} z)_g = \frac{-2e^z(e^{2z}+3)}{3e^{4z}-12e^{2z}+1},$$

$$^{[3]}(\operatorname{ch} z)_g = \frac{2e^{3z/2}(e^{4z}-10e^{2z}+5)}{e^{4z}+14e^{2z}+1}, \qquad ^{[4]}(\operatorname{ch} z)_g = \frac{2(1-5e^{2z})}{e^z(e^{4z}+40e^{2z}+15)},$$

$$^{[5]}(\operatorname{ch} z)_g = \frac{e^{3z/2}(e^{4z}+90e^{2z}+105)}{12(e^{2z}-1)}, \qquad ^{[6]}(\operatorname{ch} z)_g = \frac{2}{7e^z(e^{2z}-3)},$$

$$^{[7]}(\operatorname{ch} z)_g = 4e^{3z/2}(7-e^{2z}), \qquad ^{[8]}(\operatorname{ch} z)_g = 0.$$

Оскільки $\left(^{[8]}(\operatorname{ch} z)_g\right)' = 0$, то Т–КФЛД буде скінченним. Нехай точка $z_* \in \mathcal{Z}$ належить множині визначення обернених g-похідних 2-го типу функції $\operatorname{ch} z$. Тоді, згідно з (6), коефіцієнти зображення функції $\operatorname{ch} z$ Т–КФЛД в околі точки $z = z_*$ набувають значень

$$d_0(e^{\frac{z}{2}}; z_*) = \frac{2e^{z_*}}{e^{2z_*}+1}, \qquad d_1(e^{\frac{z}{2}}; z_*) = \frac{(e^{2z_*}+1)^2}{4e^{\frac{z_*}{2}}(1-e^{2z_*})},$$

$$d_2(e^{\frac{z}{2}}; z_*) = \frac{-8e^{z_*}(e^{2z_*}-1)^2}{(e^{2z_*}+1)(3e^{4z_*}-12e^{2z_*}+1)},$$

$$d_3(e^{\frac{z}{2}}; z_*) = \frac{(3e^{4z_*}-12e^{2z_*}+1)^2}{4e^{\frac{z_*}{2}}(e^{2z_*}-1)(e^{4z_*}+14e^{2z_*}+1)},$$

$$d_4(e^{\frac{z}{2}}; z_*) = \frac{2(e^{4z_*}+14e^{2z_*}+1)^2}{e^{z_*}(e^{4z_*}+40e^{2z_*}+15)(3e^{4z_*}-12e^{2z_*}+1)},$$

$$d_5(e^{\frac{z}{2}}; z_*) = \frac{e^{\frac{3z_*}{2}}(e^{4z_*}+40e^{2z_*}+15)^2}{12(e^{2z_*}-1)(e^{4z_*}+14e^{2z_*}+1)},$$

$$d_6(e^{\frac{z}{2}};z_*)=\frac{72(e^{2z_*}-1)^2}{7e^{z_*}(e^{2z_*}-3)(e^{4z_*}+40e^{2z_*}+15)},$$

$$d_7(e^{\frac{z}{2}};z_*)=\frac{49e^{\frac{3z_*}{2}}(e^{2z_*}-3)^2}{12(1-e^{2z_*})},\qquad d_8(e^{\frac{z}{2}};z_*)=\frac{2}{7e^{z_*}(3-e^{2z_*})}.$$

Функція $\operatorname{ch} z$ зображується скінченним Т–КФЛД вигляду

$$\operatorname{ch} z=\left(d_0(e^{z/2};z_*)+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{8}\frac{e^{z/2}-e^{z_*/2}}{d_k(e^{z/2};z_*)}\right)^{-1}. \tag{8}$$

Легко показати [18], що обернені похідні Тіле функції $e^{z/2}$ обчислюються за формулами

$$^{(2n)}\big(e^{z/2}\big)=(-1)^n e^{z/2},\qquad {}^{(2n+1)}e^{z}=(-1)^n 2(n+1)\,e^{-z/2},\quad n=0,1,\ldots.$$

В околі точки $z_*\in\mathcal{Z}$ коефіцієнти розвинення функції в Т–ЛД будуть такими:

$$b_0(z_*)=e^{\frac{z_*}{2}},\qquad b_1(z_*)=2e^{-\frac{z_*}{2}},$$

$$b_{2n}(z_*)=(-1)^n2e^{\frac{z_*}{2}},\qquad b_{2n+1}(z_*)=(-1)^n2(2n+1)e^{-\frac{z_*}{2}},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Після еквівалентних перетворень отримаємо ланцюговий дріб Тіле

$$\mathbf{h}(z_*,z)=e^{z/2}-e^{z_*/2}=e^{z_*/2}\bigg(\frac{z-z_*}{2}\,+\,\frac{z-z_*}{-2}\,+\,\frac{z-z_*}{-6}\,+\,\frac{z-z_*}{2}\,+\,\frac{z-z_*}{10}\,+$$
$$+\,\frac{z-z_*}{-2}\,+\,\frac{z-z_*}{-14}\,+\,\cdots\,+\,\frac{z-z_*}{(-1)^n2}\,+\,\frac{z-z_*}{(-1)^n2(2n+1)}\,+\,\cdots\bigg). \tag{9}$$

Згідно з теоремою 9.1.7 [18, с. 283], ланцюговий дріб (9) збігається на всій комплексній площині до функції $e^{z/2}$ і на довільному компакті $\mathcal{Z}\subset\mathbb{C}$ збіжність буде рівномірною.

Підставимо (9) у (8). Зображення функції Т–КФЛД набирає вигляду

$$\operatorname{ch} z=\left(d_0(e^{z/2};z_*)+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{8}\frac{\mathbf{h}(z_*,z)}{d_k(e^{z/2};z_*)}\right)^{-1}.$$

В окремому випадку при $z_*=\ln 4$ маємо

$$\operatorname{ch} z=\Bigg(\frac{8}{17}+\frac{\mathbf{h}(\ln 4,z)}{-289/120}\,+\,\frac{\mathbf{h}(\ln 4,z)}{-7200/9809}\,+\,\frac{\mathbf{h}(\ln 4,z)}{332929/57720}\,+\,\frac{\mathbf{h}(\ln 4,z)}{231361/1051294}\,+$$
$$+\,\frac{\mathbf{h}(\ln 4,z)}{1659842/21645}\,+\,\frac{\mathbf{h}(\ln 4,z)}{4050/82901}\,+\,\frac{\mathbf{h}(\ln 4,z)}{-16562/45}\,+\,\frac{\mathbf{h}(\ln 4,z)}{-1/182}\Bigg)^{-1}.$$

Функція $\operatorname{sh} z$. Як і у попередньому випадку, можна отримати зображення функції $\operatorname{sh} z$ Т–КФЛД, якщо за базис-функцію взяти $g(z)=e^z$ або $g(z)=e^{z/2}$.

Виберемо за базис-функцію $g(z)=\operatorname{th}\dfrac{z}{2}$. За формулами (3) знаходимо обернені g-похідні 2-го типу функції $\operatorname{sh} z$:

$$^{[0]}\left(\operatorname{sh} z\right)_g=\frac{1}{\operatorname{sh} z},\qquad ^{[1]}\left(\operatorname{sh} z\right)_g=\frac{-2\operatorname{sh}^2\dfrac{z}{2}}{\operatorname{ch} z},\qquad ^{[2]}\left(\operatorname{sh} z\right)_g=\frac{-\operatorname{sh}\dfrac{3z}{2}}{2\operatorname{ch}^3\dfrac{z}{2}},\qquad ^{[3]}\left(\operatorname{sh} z\right)_g=-2.$$

Оскільки $\left(^{[3]}\left(\operatorname{sh} x\right)_g\right)'=0$, то $^{[4]}\left(\operatorname{sh} z\right)=\infty$. Із (6) випливає, що коефіцієнти зображення функції $\operatorname{sh} z$ в околі точки $z_*\neq 0$ в Т–КФЛД набувають значень

$$d_0\left(\operatorname{th}\frac{z}{2};z_*\right)=\frac{1}{\operatorname{sh} z_*},\qquad d_1\left(\operatorname{th}\frac{z}{2};z_*\right)=\frac{-2\operatorname{sh}^2\dfrac{z_*}{2}}{\operatorname{ch} z_*},$$

$$d_2\left(\operatorname{th}\frac{z}{2};z_*\right)=\frac{\left(\operatorname{th}^2\dfrac{z_*}{2}+1\right)^2}{-2\operatorname{th}\dfrac{z_*}{2}},\qquad d_3\left(\operatorname{th}\frac{z}{2};z_*\right)=\frac{-2}{1+\operatorname{th}^2\dfrac{z_*}{2}}.$$

Зображення функції $\operatorname{sh} z$ скінченним Т–КФЛД матиме вигляд

$$\operatorname{sh} z=\left(d_0\left(\operatorname{th}\frac{z}{2};z_*\right)+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{3}\frac{\operatorname{th}\dfrac{z}{2}-\operatorname{th}\dfrac{z_*}{2}}{d_k\left(\operatorname{th}\dfrac{z}{2};z_*\right)}\right)^{-1}. \tag{10}$$

Легко переконатися [18, с. 256], що обернені похідні Тіле функції $\operatorname{th}\dfrac{z}{2}$ обчислюються за формулами

$$^{(4n)}\left(\operatorname{th}\frac{z}{2}\right)=\operatorname{th}\frac{z}{z},\qquad ^{(4n+1)}\left(\operatorname{th}\frac{z}{2}\right)=\frac{2(2n+1)\left(n\operatorname{th}^2\dfrac{z}{2}-n-1\right)}{\operatorname{th}^2\dfrac{z}{2}-1},\qquad ^{(4n+2)}\left(\operatorname{th}\frac{z}{2}\right)=\frac{1}{\operatorname{th}\dfrac{z}{2}},$$

$$^{(4n+3)}\left(\operatorname{th}\frac{z}{2}\right)=\frac{2(n+1)\left((2n+3)\operatorname{th}^2\dfrac{z}{2}-2n-1\right)}{\operatorname{th}^2\dfrac{z}{2}-1},\qquad n=0,1,\ldots.$$

Якщо $z_*\notin G$, де $G=\{0\}\cup\{i\pi(2n+1):n\in\mathbb{Z}\}$, то коефіцієнти розвинення функції $\operatorname{th}(z/2)$ в Т–ЛД в околі точки $z=z_*$ мають вигляд

$$b_0(z_*)=\operatorname{th}\frac{z_*}{2},\qquad b_{4n+1}(z_*)=-\frac{2(4n+1)}{\operatorname{th}^2\dfrac{z_*}{2}-1},\qquad b_{4n+2}(z_*)=-\frac{\operatorname{th}^2\dfrac{z_*}{2}-1}{\operatorname{th}\dfrac{z_*}{2}},$$

$$b_{4n+3}(z_*)=\frac{2(4n+3)\operatorname{th}^2\dfrac{z_*}{2}}{\operatorname{th}^2\dfrac{z_*}{2}-1},\qquad b_{4n+4}(z_*)=\frac{\operatorname{th}^2\dfrac{z_*}{2}-1}{\operatorname{th}\dfrac{z_*}{2}},\qquad n=0,1,\ldots.$$

Тоді після еквівалентних перетворень маємо розвинення функції $\operatorname{th}\dfrac{z}{2}$ в Т–ЛД

$$\mathbf{p}(z_*,z)=\operatorname{th}\frac{z}{2}-\operatorname{th}\frac{z_*}{2}=\frac{(z-z_*)\left(\operatorname{th}^2\dfrac{z_*}{2}-1\right)}{-2}\;+\;\frac{(z-z_*)\operatorname{th}\dfrac{z_*}{2}}{-1}\;+\;\frac{z-z_*}{6\operatorname{th}\dfrac{z_*}{2}}\;+$$

$$+\frac{z-z_*}{1}+\frac{(z-z_*)\operatorname{th}\dfrac{z_*}{2}}{-10}+\frac{(z-z_*)\operatorname{th}\dfrac{z_*}{2}}{-1}+\frac{z-z_*}{14\operatorname{th}\dfrac{z_*}{2}}+\frac{z-z_*}{1}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{(z-z_*)\operatorname{th}\dfrac{z_*}{2}}{-2(4k+1)}+\frac{(z-z_*)\operatorname{th}\dfrac{z_*}{2}}{-1}+\frac{z-z_*}{2(4k+3)\operatorname{th}\dfrac{z_*}{2}}+\frac{z-z_*}{1}+\cdots. \tag{11}$$

Ланцюговий дріб (11) збігається до функції $\operatorname{th} z/2$ скрізь на комплексній площині, за винятком точок множини G, і на довільному компакті $\mathcal{Z}\subset\mathbb{C}\backslash G$ збіжність буде рівномірною.

Підставимо розвинення $\mathbf{p}(z_*,z)$ в (10) і отримаємо зображення функції $\operatorname{sh} z$ Т–КФЛД

$$\operatorname{sh} z=\left(d_0\left(\operatorname{th}\frac{z}{2};z_*\right)+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{3}\frac{\mathbf{p}(z_*,z)}{d_k\left(\operatorname{th}\dfrac{z}{2};z_*\right)}\right)^{-1}.$$

В окремому випадку в околі точки $z_*=\ln 2$ маємо

$$\operatorname{sh} z=\left(\frac{4}{3}+\frac{\mathbf{p}(\ln 2,z)}{-\dfrac{1}{5}}+\frac{\mathbf{p}(\ln 2,z)}{-\dfrac{50}{27}}+\frac{\mathbf{p}(\ln 2,z)}{-\dfrac{9}{5}}\right)^{-1}.$$

Функція $\operatorname{sh} z$. В якості базис-функції виберемо функцію $g(z)=e^{iz/2}$. Тоді обернені g-похідні 2-го типу функції $\sin z$ будуть такими:

$$^{[0]}\big(\sin z\big)_g=\frac{2ie^{iz}}{e^{i2z}-1},\qquad ^{[1]}\big(\sin z\big)_g=\frac{i(e^{i2z}-1)^2}{4e^{iz/2}(e^{i2z}+1)},\qquad ^{[2]}\big(\sin z\big)_g=\frac{-2ie^{iz}(e^{i2z}-3)}{3e^{i4z}+12e^{i2z}+1},$$

$$^{[3]}\big(\sin z\big)_g=-\frac{2ie^{i3z/2}(e^{i4z}+10e^{i2z}+5)}{e^{i4z}-14e^{i2z}+1},\qquad ^{[4]}\big(\sin z\big)_g=\frac{2i(5e^{i2z}+1)}{e^{iz}(e^{i4z}-40e^{i2z}+15)},$$

$$^{[5]}\big(\sin z\big)_g=\frac{ie^{i3z/2}(e^{i4z}-90e^{i2z}+105)}{12(e^{i2z}+1)},\qquad ^{[6]}\big(\sin z\big)_g=\frac{-2i}{7e^{iz}(e^{i2z}+3)},$$

$$^{[7]}\big(\sin z\big)_g=-4ie^{i3z/2}(e^{i2z}+7),\qquad ^{[8]}\big(\sin z\big)_g=0.$$

Функція $\sin z$ має лише 8 скінченних g-похідних 2-го типу, а отже, функція зображується скінченним Т–КФЛД. Нехай $z_*\in\mathcal{Z}$ належить області визначення обернених g-похідних 2-го типу функції $\sin z$, тоді з (6) випливає, що коефіцієнти Т–КФЛД набувають значень

$$d_0\big(e^{\frac{iz}{2}};z_*\big)=\frac{2ie^{iz_*}}{e^{i2z_*}-1},\qquad d_1\big(e^{\frac{iz}{2}};z_*\big)=\frac{i(e^{i2z_*}-1)^2}{4e^{\frac{iz_*}{2}}(e^{i2z_*}+1)},$$

$$d_2\big(e^{\frac{iz}{2}};z_*\big)=\frac{-8ie^{iz_*}(e^{i2z_*}+1)^2}{(e^{i2z_*}-1)(3e^{i4z_*}+12e^{i2z_*}+1)},$$

$$d_3\big(e^{\frac{iz}{2}};z_*\big)=\frac{-i(3e^{i4z_*}+12e^{i2z_*}+1)^2}{4e^{\frac{iz_*}{2}}(e^{i2z_*}+1)(e^{i4z_*}-14e^{i2z_*}+1)},$$

$$d_4\big(e^{\frac{iz}{2}}; z_*\big) = \frac{2i(e^{i4z_*} - 14e^{i2z_*} + 1)^2}{e^{iz_*}(e^{i4z_*} - 40e^{i2z_*} + 15)(3e^{i4z_*} + 12e^{i2z_*} + 1)},$$

$$d_5\big(e^{\frac{iz}{2}}; z_*\big) = \frac{ie^{i3z_*/2}(e^{i4z_*} - 40e^{i2z_*} + 15)^2}{12(e^{i2z_*} + 1)(e^{i4z_*} - 14e^{i2z_*} + 1)},$$

$$d_6\big(e^{iz/2}; z_*\big) = -\frac{72i(e^{i2z_*} + 1)^2}{7e^{iz_*}(e^{i2z_*} + 3)(e^{i4z_*} - 40e^{i2z_*} + 15)},$$

$$d_7\big(e^{iz/2}; z_*\big) = -\frac{49ie^{i3z_*/2}(e^{i2z_*} + 3)^2}{12(e^{i2z_*} + 1)}, \qquad d_8\big(e^{iz/2}; z_*\big) = \frac{2i}{7e^{iz_*}(e^{i2z_*} + 3)}.$$

Отримали зображення функції $\sin z$ Т–КФЛД

$$\sin z = \left(d_0(e^{iz/2}; z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{8} \frac{e^{iz/2} - e^{iz_*/2}}{d_k(e^{iz/2}; z_*)}\right)^{-1}. \tag{12}$$

Легко показати, що коефіцієнти розвинення функції $e^{iz/2}$ в околі точки $z = z_*$ в Т–ЛД будуть такими:

$$b_0(z_*) = e^{iz_*/2}, \qquad b_{2n-1}(z_*) = i(-1)^n 2(2n-1)e^{-iz_*/2},$$
$$b_{2n}(z_*) = (-1)^n\, 2e^{iz_*/2}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Тоді після еквівалентних перетворень отримуємо розвинення в Т–ЛД

$$\mathbf{n}(z_*, z) = e^{iz/2} - e^{iz_*/2} = e^{iz_*/2}\left(\frac{z - z_*}{-2i} + \frac{z - z_*}{-2} + \frac{z - z_*}{6i} + \frac{z - z_*}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{z - z_*}{-10i} + \frac{z - z_*}{-2} + \cdots + \frac{z - z_*}{(-1)^n 2(2n-1)i} + \frac{z - z_*}{(-1)^n 2} + \cdots\right). \tag{13}$$

Використовуючи теорему 11.2.1 [18, с. 342], можна довести, що ланцюговий дріб (13) збігається до функції $e^{iz/2}$ на всій комплексній площині і на довільному компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ збіжність буде рівномірною.

Підставляючи (13) у (12), отримуємо зображення функції Т–КФЛД

$$\sin z = \left(d_0(e^{iz/2}; z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{8} \frac{\mathbf{n}(z_*, z)}{d_k(e^{iz/2}; z_*)}\right)^{-1}.$$

Якщо $z_* = -i \ln 4$, то зображення функції $\sin z$ має вигляд

$$\sin z = \left(\frac{8i}{15} + \frac{\mathbf{n}(-i\ln 4, z)}{225i/136} + \frac{\mathbf{n}(-i\ln 4, z)}{-9248i/14415} + \frac{\mathbf{n}(-i\ln 4, z)}{-923521i/4488} + \frac{\mathbf{n}(-i\ln 4, z)}{-121i/78802} + \right.$$
$$\left. + \frac{\mathbf{n}(-i\ln 4, z)}{30258i/187} + \frac{\mathbf{n}(-i\ln 4, z)}{578i/5453} + \frac{\mathbf{n}(-i\ln 4, z)}{-35378i/51} + \frac{\mathbf{n}(-i\ln 4, z)}{i/266}\right)^{-1}.$$

Якщо в якості базис-функції вибрати $g(z) = \operatorname{tg}\dfrac{z}{4}$, то із (3) випливає, що функція $\sin z$ має лише сім скінченних перших обернених g-похідних 2-го типу:

$$^{[0]}\left(\sin z\right)_g=\frac{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}\right)^2}{4\operatorname{tg}\frac{z}{4}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}\right)},\qquad ^{[1]}\left(\sin z\right)_g=\frac{-4\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}\left(\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}-1\right)^2}{\left(\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}+1\right)\left(\operatorname{tg}^4\frac{z}{4}-6\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}+1\right)},$$

$$^{[2]}\left(\sin z\right)_g=\frac{\operatorname{tg}\frac{z}{4}\left(\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}+1\right)^2\left(\operatorname{tg}^4\frac{z}{4}-14\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}+9\right)}{4\left(\operatorname{tg}^6\frac{z}{4}+15\operatorname{tg}^4\frac{z}{4}-3\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}+1\right)},$$

$$^{[3]}\left(\sin z\right)_g=\frac{-4\left(3\operatorname{tg}^8\frac{z}{4}+28\operatorname{tg}^6\frac{z}{4}-2\operatorname{tg}^4\frac{z}{4}+4\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}-1\right)}{\left(\operatorname{tg}^4\frac{z}{4}+10\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}+1\right)\left(3\operatorname{tg}^4\frac{z}{4}-2\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}+3\right)},$$

$$^{[4]}\left(\sin z\right)_g=\frac{3\operatorname{tg}^{10}\frac{z}{4}+45\operatorname{tg}^8\frac{z}{4}-50\operatorname{tg}^6\frac{z}{4}+170\operatorname{tg}^4\frac{z}{4}+15\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}+9}{16\operatorname{tg}\frac{z}{4}\left(3\operatorname{tg}^4\frac{z}{4}-10\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}-5\right)},$$

$$^{[5]}\left(\sin z\right)_g=\frac{-4\left(3\operatorname{tg}^6\frac{z}{4}-15\operatorname{tg}^4\frac{z}{4}-15\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}-1\right)}{3\left(\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}+1\right)\left(\operatorname{tg}^4\frac{z}{4}-6\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}+1\right)},$$

$$^{[6]}\left(\sin z\right)_g=\frac{-\operatorname{tg}\frac{z}{4}\left(3\operatorname{tg}^6\frac{z}{4}-21\operatorname{tg}^4\frac{z}{4}-35\operatorname{tg}^2\frac{z}{4}+21\right)}{16},\qquad ^{[7]}\left(\sin z\right)_g=-4.$$

Нехай точка $z_*\in\mathcal{Z}$ належить множині визначення всіх обернених g-похідних 2-го типу функції $\sin z$. Тоді, згідно з (6), в околі точки $z=z_*$ коефіцієнти Т–КФЛД будуть такими:

$$d_0\left(\operatorname{tg}\frac{z}{4};z_*\right)=\frac{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}\right)^2}{4\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}\right)},\qquad d_1\left(\operatorname{tg}\frac{z}{4};z_*\right)=\frac{-4\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}\left(\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}-1\right)^2}{\left(\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1\right)\left(\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}-6\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1\right)},$$

$$d_2\left(\operatorname{tg}\frac{z}{4};z_*\right)=\frac{\left(\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1\right)^2\left(\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}-6\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1\right)}{4\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}\left(\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}-1\right)\left(3\operatorname{tg}^6\frac{z_*}{4}+15\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}-3\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1\right)},$$

$$d_3\left(\operatorname{tg}\frac{z}{4};z_*\right)=$$

$$=\frac{4\left(3\operatorname{tg}^6\frac{z_*}{4}+15\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}-3\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1\right)^2}{\left(\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1\right)\left(\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}-6\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1\right)\left(\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}+10\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1\right)\left(3\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}-2\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+3\right)},$$

$$d_4\left(\operatorname{tg}\frac{z}{4};z_*\right)=\frac{\left(\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}+10\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1\right)^2\left(3\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}-2\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+3\right)^2}{16\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}\left(3\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}-10\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}-5\right)\left(3\operatorname{tg}^6\frac{z_*}{4}+15\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}-3\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1\right)},$$

$$d_5\left(\operatorname{tg}\frac{z}{4};z_*\right)=$$

$$= \frac{16\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}\left(3\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}-10\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}-5\right)^2}{3\left(\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1\right)\left(\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}-6\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1\right)\left(\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}+10\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1\right)\left(3\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}-2\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+3\right)},$$

$$d_6\left(\operatorname{tg}\frac{z}{4};z_*\right) = \frac{-9\left(\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1\right)^2\left(\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}-6\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1\right)^2}{16\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}\left(3\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}-10\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}-5\right)},$$

$$d_7\left(\operatorname{tg}\frac{z}{4};z_*\right) = \frac{-16}{3\left(\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1\right)\left(\operatorname{tg}^4\frac{z_*}{4}-6\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}+1\right)}.$$

Функцію $\sin z$ можна зобразити Т–КФЛД таким чином:

$$\sin z = \left(d_0\left(\operatorname{tg}\frac{z}{4};z_*\right) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{7}\frac{\operatorname{tg}\frac{z}{4}-\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}}{d_k\left(\operatorname{tg}\frac{z}{4};z_*\right)}\right)^{-1}. \tag{14}$$

За аналогією з теоремою 8.5.5 [18, с. 251] можна довести, що функція $\operatorname{tg}\frac{z}{4}$ має обернені похідні Тіле довільного порядку, які обчислюються за рекурентним співвідношенням, а отже, функція може бути розвинена в Т–ЛД. Після еквівалентних перетворень різниця $\operatorname{tg}\frac{z}{4}-\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}$ зображується Т–ЛД вигляду

$$\mathbf{q}(z_*,z) = \operatorname{tg}\frac{z}{4}-\operatorname{tg}\frac{z_*}{4} = \frac{(z-z_*)\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{z_*}{4}\right)}{4} \underset{+}{} \frac{(z-z_*)\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}}{-1} \underset{+}{} \frac{z-z_*}{12\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}} \underset{+}{} \frac{z-z_*}{1} \underset{+}{} \frac{(z-z_*)\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}}{20} \underset{+}{} \cdots$$

$$\cdots \underset{+}{} \frac{z-z_*}{1} \underset{+}{} \frac{(z-z_*)\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}}{4(4n+1)} \underset{+}{} \frac{(z-z_*)\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}}{-1} \underset{+}{} \frac{z-z_*}{4(4n+3)\operatorname{tg}\frac{z_*}{4}} \underset{+}{} \cdots. \tag{15}$$

Ланцюговий дріб (15) збігається до функції $\operatorname{tg}\frac{z}{4}$ на всій комплексній площині $\mathbb{C}$, за винятком нулів та особливих точок функції, і на довільному компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}\backslash\{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ збіжність буде рівномірною.

Підставимо (15) у (14) і отримаємо зображення функції $\sin z$ Т–КФЛД

$$\sin z = \left(d_0\left(\operatorname{tg}\frac{z}{4};z_*\right) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{7}\frac{\mathbf{q}(z_*,z)}{d_k\left(\operatorname{tg}\frac{z}{4};z_*\right)}\right)^{-1}.$$

В окремому випадку, коли $z_* = \frac{4\pi}{3}$, маємо

$$\sin z = \left(\frac{-2\sqrt{3}}{3} + \frac{\mathbf{q}\left(\frac{4\pi}{3},z\right)}{\frac{3}{2}} \underset{+}{} \frac{\mathbf{q}\left(\frac{4\pi}{3},z\right)}{\frac{8\sqrt{3}}{39}} \underset{+}{} \frac{\mathbf{q}\left(\frac{4\pi}{3},z\right)}{\frac{-169}{30}} \underset{+}{} \frac{\mathbf{q}\left(\frac{4\pi}{3},z\right)}{\frac{-150\sqrt{3}}{13}} \underset{+}{}\right.$$

$$+\frac{\mathbf{q}\left(\dfrac{4\pi}{3},z\right)}{\dfrac{-1}{30}}+\frac{\mathbf{q}\left(\dfrac{4\pi}{3},z\right)}{24\sqrt{3}}+\frac{\mathbf{q}\left(\dfrac{4\pi}{3},z\right)}{\dfrac{1}{6}}\Bigg)^{-1},$$

де

$$\mathbf{q}\left(\frac{4\pi}{3},z\right)=\frac{z-\dfrac{4\pi}{3}}{1}+\frac{z-\dfrac{4\pi}{3}}{-4\sqrt{3}/3}+\frac{z-\dfrac{4\pi}{3}}{9}+\frac{z-\dfrac{4\pi}{3}}{4\sqrt{3}/3}+\frac{z-\dfrac{4\pi}{3}}{5}+\frac{z-\dfrac{4\pi}{3}}{-4\sqrt{3}/3}+$$

$$+\frac{z-\dfrac{4\pi}{3}}{21}+\frac{z-\dfrac{4\pi}{3}}{4\sqrt{3}/3}+\dots+\frac{z-\dfrac{4\pi}{3}}{4n+1}+\frac{z-\dfrac{4\pi}{3}}{-4\sqrt{3}/3}+\frac{z-\dfrac{4\pi}{3}}{3(4n+3)}+\frac{z-\dfrac{4\pi}{3}}{4\sqrt{3}/3}+\dots.$$

Функція $\cos z$. Щоб знайти зображення функції $\cos z$ Т–КФЛД, виберемо в якості базис-функції $g(z)=e^{iz/3}$. Обернені g-похідні 2-го типу функції $\cos z$ знаходимо за формулами (3). Маємо

$$^{[0]}(\cos z)_g=\frac{2\,e^{iz}}{e^{i2z}+1},\quad {}^{[1]}(\cos z)_g=-\frac{(e^{i2z}+1)^2}{6\,e^{i2z/3}(e^{i2z}-1)},\quad {}^{[2]}(\cos z)_g=\frac{-2\,e^{iz}(e^{i2z}+2)}{2\,e^{i4z}-9\,e^{i2z}+1},$$

$$^{[3]}(\cos z)_g=\frac{10\,e^{i6z}-125\,e^{i4z}+80\,e^{i2z}-1}{6\,e^{i2z/3}(2\,e^{i4z}+23\,e^{i2z}+2)},\quad {}^{[4]}(\cos z)_g=\frac{2\,e^{iz}(e^{i4z}-65\,e^{i2z}+10)}{10\,e^{i6z}+395\,e^{i4z}+215\,e^{i2z}+1},$$

$$^{[5]}(\cos z)_g=\frac{-3e^{i4z/3}(5e^{i6z}+525e^{i4z}+1015e^{i2z}+42)}{2(e^{i2z}-1)(e^{i4z}-245e^{i2z}+1)},$$

$$^{[6]}(\cos z)_g=\frac{-2(28e^{i4z}+133e^{i2z}+1)}{e^{iz}(e^{i6z}-707e^{i4z}+2653e^{i2z}-84)},$$

$$^{[7]}(\cos z)_g=\frac{e^{i4z/3}(e^{i6z}-1708\,e^{i4z}+18186\,e^{i2z}-2520)}{18(4\,e^{i4z}+73\,e^{i2z}+4)},$$

$$^{[8]}(\cos z)_g=\frac{2(4\,e^{i2z}-1)}{5\,e^{iz}(e^{i4z}+53\,e^{i2z}+12)},$$

$$^{[9]}(\cos z)_g=\frac{11\,e^{i4z/3}(e^{i4z}+129\,e^{i2z}+90)}{18(1-e^{i2z})},\qquad {}^{[10]}(\cos z)_g=\frac{-2}{55\,e^{iz}(e^{i2z}-3)},$$

$$^{[11]}(\cos z)_g=\frac{33\,e^{i4z/3}(2\,e^{i2z}-15)}{2},\qquad {}^{[12]}(\cos z)_g=0.$$

Оскільки $\left({}^{[12]}(\cos z)_g\right)'=0$, то ${}^{[13]}(\cos z)_g=\infty$ і Т–КФЛД „обривається”. Якщо точка $z_*\in\mathcal{Z}$ належить області визначення обернених g-похідних 2-го типу функції $\cos z$, то, згідно з (6), в околі точки $z=z_*$ коефіцієнти Т–КФЛД набувають таких значень:

$$d_0(e^{\frac{iz}{3}};z_*)=\frac{2e^{iz_*}}{e^{i2z_*}+1},\quad d_1(e^{\frac{iz}{3}};z_*)=\frac{-(e^{i2z_*}+1)^2}{6e^{\frac{i2z_*}{3}}(e^{i2z_*}-1)},$$

$$d_2(e^{\frac{z}{3}};z_*)=\frac{-6e^{iz_*}(e^{i2z_*}-1)^2}{(e^{i2z_*}+1)(2e^{i4z_*}-9\,e^{i2z_*}+1)},$$

$$d_3(e^{\frac{iz}{3}}; z_*) = \frac{(2\,e^{i4z_*} - 9\,e^{i2z_*} + 1)^2}{2\,e^{i2z_*/3}(e^{i2z_*} - 1)(2\,e^{i4z_*} + 23\,e^{i2z_*} + 2)},$$

$$d_4(e^{\frac{iz}{3}}; z_*) = \frac{6\,e^{iz_*}(2\,e^{i4z_*} + 23\,e^{i2z_*} + 2)^2}{(2\,e^{i4z_*} - 9\,e^{i2z_*} + 1)(10\,e^{i6z_*} + 395\,e^{i4z_*} + 215\,e^{i2z_*} + 1)},$$

$$d_5(e^{\frac{iz}{3}}; z_*) = \frac{-(10e^{i6z_*} + 395e^{i4z_*} + 215e^{i2z_*} + 1)^2}{6e^{i2z_*/3}(e^{i2z_*} - 1)(e^{i4z_*} - 245e^{i2z_*} + 1)(2e^{i4z_*} + 23e^{i2z_*} + 2)},$$

$$d_6(e^{\frac{iz}{3}}; z_*) = \frac{-2(e^{i2z_*} - 1)^2\,(e^{i4z_*} - 245\,e^{i2z_*} + 1)^2}{e^{iz_*}(e^{i6z_*} - 707\,e^{i4z_*} + 2653\,e^{i2z_*} - 84)(10\,e^{i6z_*} + 395\,e^{i4z_*} + 215\,e^{i2z_*} + 1)},$$

$$d_7(e^{\frac{iz}{3}}; z_*) = \frac{e^{i4z_*/3}(e^{i6z_*} - 707\,e^{i4z_*} + 2653\,e^{i2z_*} - 84)^2}{18(e^{i2z_*} - 1)(e^{i4z_*} - 245\,e^{i2z_*} + 1)\,(4\,e^{i4z_*} + 73\,e^{i2z_*} + 4)},$$

$$d_8(e^{\frac{iz}{3}}; z_*) = \frac{18(4\,e^{i4z_*} + 73\,e^{i2z_*} + 4)^2}{5e^{iz_*}(e^{i4z_*} + 53e^{i2z_*} + 12)(e^{i6z_*} - 707e^{i4z_*} + 2653e^{i2z_*} - 84)},$$

$$d_9(e^{\frac{iz}{3}}; z_*) = \frac{-5e^{i4z_*/3}(e^{i4z_*} + 53e^{i2z_*} + 12)^2}{2(e^{i2z_*} - 1)(4e^{i4z_*} + 73e^{i2z_*} + 4)},$$

$$d_{10}(e^{\frac{iz}{3}}; z_*) = \frac{-18(e^{i2z_*} - 1)^2}{11e^{iz_*}(e^{i2z_*} - 3)(e^{i4z_*} + 53e^{i2z_*} + 12)},$$

$$d_{11}(e^{\frac{iz}{3}}; z_*) = \frac{605\,e^{i4z_*/3}(e^{i2z_*} - 3)^2}{18(e^{i2z_*} - 1)}, \quad d_{12}(e^{\frac{iz}{3}}; z_*) = \frac{2}{55\,e^{iz_*}(e^{i2z_*} - 1)}.$$

Зображення функції $\cos z$ в околі точки $z = z_*$ Т–КФЛД має вигляд

$$\cos z = \left(d_0(e^{\frac{iz}{3}}; z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{12} \frac{e^{\frac{iz}{3}} - e^{\frac{iz_*}{3}}}{d_k(e^{\frac{iz}{3}}; z_*)} \right)^{-1}. \tag{16}$$

Оскільки функція $e^{iz/3}$ має обернені похідні Тіле довільного порядку, які знаходяться за рекурентним співвідношенням, то коефіцієнти розвинення функції в ланцюговий дріб Тіле в околі точки $z_* \in \mathcal{Z}$ є такими:

$$b_0(z_*) = e^{iz_*/3},\ b_{2n-1}(z_*) = (-1)^n 3\,(2n-1)\,e^{-iz_*/3}\,i,\ b_{2n}(z_*) = (-1)^n\,2\,e^{iz_*/3}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Після еквівалентних перетворень маємо розвинення в Т–ЛД

$$\mathbf{u}(z_*, z) = e^{\frac{iz}{3}} - e^{\frac{iz_*}{3}} = e^{\frac{iz_*}{3}} \left(\frac{z - z_*}{-3i} \;+\; \frac{z - z_*}{-2} \;+\; \cdots \;+\; \frac{z - z_*}{(-1)^n 3(2n-1)i} \;+\; \frac{z - z_*}{(-1)^n 2} \;+\; \cdots \right). \tag{17}$$

Можна довести, що ланцюговий дріб (17) буде збігатися до функції $e^{iz/3}$ на всій комплексній площині і на довільному компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ збіжність буде рівномірною.

Підставляючи (17) у (16), отримуємо зображення функції $\cos z$ Т-КФЛД

$$\cos z = \left(d_0(e^{iz/3}; z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{12} \frac{\mathbf{u}(z_*, z)}{d_k(e^{iz/3}; z_*)} \right)^{-1}.$$

В окремому випадку, коли $z_* = -i\ln 2$, зображення функції $\cos z$ набирає вигляду

$$\cos z = \left(\frac{4}{5} + \frac{\mathbf{u}(-i\ln 2, z)}{-25\sqrt[3]{2}/36} + \frac{\mathbf{u}(-i\ln 2, z)}{36/5} + \frac{\mathbf{u}(-i\ln 2, z)}{\sqrt[3]{2}/168} + \frac{\mathbf{u}(-i\ln 2, z)}{-7056/869} + \right.$$
$$+ \frac{\mathbf{u}(-i\ln 2, z)}{755161\sqrt[3]{2}/53928} + \frac{\mathbf{u}(-i\ln 2, z)}{103041/69520} + \frac{\mathbf{u}(-i\ln 2, z)}{-160\sqrt[3]{2}/2889} +$$
$$\left. + \frac{\mathbf{u}(-i\ln 2, z)}{-27/20} + \frac{\mathbf{u}(-i\ln 2, z)}{-800\sqrt[3]{2}/3} + \frac{\mathbf{u}(-i\ln 2, z)}{-27/880} + \frac{\mathbf{u}(-i\ln 2, z)}{1/55}\right)^{-1}.$$

Можна також отримати інше зображення функції $\cos z$ Т–КФЛД, якщо за базис-функцію вибрати $g(z) = \operatorname{ctg}\frac{z}{2}$. Обернені g-похідні 2-го типу функції $\cos z$ будуть такими:

$$^{[0]}(\cos)_g = \frac{\operatorname{ctg}^2\frac{z}{2} + 1}{\operatorname{ctg}^2\frac{z}{2} - 1}, \qquad ^{[1]}(\cos)_g = \frac{-\left(\operatorname{ctg}^2\frac{z}{2} - 1\right)^2}{4\operatorname{ctg}\frac{z}{2}}, \qquad ^{[2]}(\cos)_g = \frac{3\operatorname{ctg}^2\frac{z}{2} - 1}{3\operatorname{ctg}^2\frac{z}{2} + 1},$$
$$^{[3]}(\cos)_g = 2\operatorname{ctg}\frac{z}{2}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{z}{2} + 1\right), \qquad ^{[4]}(\cos)_g = 1.$$

Оскільки $\left(^{[4]}(\cos)_g\right)' = 0$, то Т–КФЛД „обривається” на 4-му поверсі. В точці $z_* \in \mathcal{Z}$, яка належить області визначення обернених g-похідних 2-го типу функції $\cos z$, коефіцієнти Т–КФЛД набувають значень

$$d_0\left(\operatorname{ctg}\frac{z}{2}; z_*\right) = \frac{\operatorname{ctg}^2\frac{z_*}{2} + 1}{\operatorname{ctg}^2\frac{z_*}{2} - 1}, \qquad d_1\left(\operatorname{ctg}\frac{z}{2}; z_*\right) = \frac{\left(\operatorname{ctg}^2\frac{z_*}{2} - 1\right)^2}{-4\operatorname{ctg}\frac{z_*}{2}},$$

$$d_2\left(\operatorname{ctg}\frac{z}{2}; z_*\right) = \frac{-8\operatorname{ctg}^2\frac{z_*}{2}}{\left(\operatorname{ctg}^2\frac{z_*}{2} - 1\right)^2\left(3\operatorname{ctg}^2\frac{z_*}{2} + 1\right)},$$

$$d_3\left(\operatorname{ctg}\frac{z}{2}; z_*\right) = \frac{\left(3\operatorname{ctg}^2\frac{z_*}{2} + 1\right)^2}{4\operatorname{ctg}\frac{z_*}{2}}, \qquad d_4\left(\operatorname{ctg}\frac{z}{2}; z_*\right) = \frac{2}{3\operatorname{ctg}^2\frac{z_*}{2} + 1}.$$

Функція $\cos z$ зображується Т–КФЛД таким чином:

$$\cos z = \left(d_0\left(\operatorname{ctg}\frac{z}{2}; z_*\right) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{4}\frac{\operatorname{ctg}\frac{z}{2} - \operatorname{ctg}\frac{z_*}{2}}{d_k\left(\operatorname{ctg}\frac{z}{2}; z_*\right)}\right)^{-1}. \tag{18}$$

Функція $\operatorname{ctg}\frac{z}{2}$ має обернені похідні Тіле всіх порядків, які визначаються за рекурентним співвідношенням, а отже, функція може бути розвинена в Т–ЛД. Як і у попередніх випадках, отримуємо ланцюговий дріб

$$\mathbf{v}(z_*, z) = \operatorname{ctg}\frac{z}{2} - \operatorname{ctg}\frac{z_*}{2} = \frac{(z-z_*)\left(1+\operatorname{ctg}^2\dfrac{z_*}{2}\right)}{-2} + \frac{(z-z_*)\operatorname{ctg}\dfrac{z_*}{2}}{-1} + \frac{z-z_*}{-6\operatorname{ctg}\dfrac{z_*}{2}} +$$

$$+ \frac{z-z_*}{1} + \frac{(z-z_*)\operatorname{ctg}\dfrac{z_*}{2}}{-10} + \frac{(z-z_*)\operatorname{ctg}\dfrac{z_*}{2}}{-1} + \frac{z-z_*}{-14\operatorname{ctg}\dfrac{z_*}{2}} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{z-z_*}{1} + \frac{(z-z_*)\operatorname{ctg}\dfrac{z_*}{2}}{-2(4n+1)} + \frac{(z-z_*)\operatorname{ctg}\dfrac{z_*}{2}}{-1} + \frac{z-z_*}{-2\,(4n+3)\operatorname{ctg}\dfrac{z_*}{2}} + \cdots, \qquad (19)$$

який збігається до функції $\operatorname{ctg}\dfrac{z}{2}$ на всій комплексній площині, за винятком нулів та особливих точок функції. На довільному компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}\backslash\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ланцюговий дріб (19) збігається рівномірно.

Підставивши (19) у (18), отримаємо

$$\cos z = \left(d_0\left(\operatorname{ctg}\frac{z}{2}; z_*\right) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{4} \frac{\mathbf{v}(z_*; z)}{d_k\left(\operatorname{ctg}\dfrac{z}{2}; z_*\right)} \right)^{-1}.$$

В окремому випадку при $z_* = \dfrac{2\pi}{3}$ зображення функції $\cos z$ має вигляд

$$\cos z = \left(2 + \frac{\mathbf{v}\left(\dfrac{2\pi}{3}; z\right)}{-\sqrt{3}/3} + \frac{\mathbf{v}\left(\dfrac{2\pi}{3}; z\right)}{-6/5} + \frac{\mathbf{v}\left(\dfrac{2\pi}{3}; z\right)}{25\sqrt{3}/3} + \frac{\mathbf{v}\left(\dfrac{2\pi}{3}; z\right)}{1/5} \right)^{-1},$$

де

$$\mathbf{v}(\frac{2\pi}{3}, z) = \frac{z-\dfrac{2\pi}{3}}{-1/2} + \frac{z-\dfrac{2\pi}{3}}{-4\sqrt{3}/2} + \frac{z-\dfrac{2\pi}{3}}{-9/2} + \frac{z-\dfrac{2\pi}{3}}{4\sqrt{3}/2} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{z-\dfrac{2\pi}{3}}{-(4n+1)/2} + \frac{z-\dfrac{2\pi}{3}}{-4\sqrt{3}/2} + \frac{z-\dfrac{2\pi}{3}}{-3(4n+3)/2} + \frac{z-\dfrac{2\pi}{3}}{4\sqrt{3}/2} + \cdots.$$

***Зауваження* 3.** У статті отримано зображення функцій $\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z, \sin z, \cos z$ скінченними Т–КФЛД. У кожному з отриманих зображень використовувалось розвинення базис-функції $g(z)$ у ланцюговий дріб Тіле. Можна отримати інші зображення вказаних функцій, якщо базис-функцію розвинути в квазіобернений ланцюговий дріб типу Тіле [18].

Література

1. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
2. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир, 1985. – 414 с.

3. *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби. – Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, 2010. – 218 с.
4. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
5. *Хованский А. Н.* Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. – М.: Гостехтеориздат, 1956. – 203 с.
6. *Cuyt A., Brevik Petersen V., Verdonk B., Waadeland H., Jones W. B.* Handbooks of continued fractions for special functions. – Berlin etc.: Springer, 2008. – xvi+431 p.
7. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continue fraction with applications. – Amsterdam etc.: North-Holland, 1992. – 606 p.
8. *Olds C. D.* Continued fractions. New mathematical library. – New York: Random House, 1963. – Vol. 9. – viii+162 p.
9. *Perron O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen. – Stuttgart: Teubner, 1957. – Bd II. – 315 S.
10. *Schweiger F.* Continues fractions and their generalizations: A short history of f-expansion. – Boston, MA: Docent Press, 2016. – vi+184 p.
11. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions. – New York: D. Van Nostrand Co., 1948. – 433 p.
12. *Уолш Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 508 с.
13. *Бейкер Дж. (мл.), Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
14. *Голуб А. П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – 222 с.
15. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Основы теории полиномиального операторного интерполирования. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1999. – 278 с.
16. *Макаров В. Л., Демків І. І.* Інтерполяційний інтегральний ланцюговий дріб типу Тіле // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 4. – С. 44 – 50.
17. *Thiele T. N.* Interpolationsprechnung. – Leipzig: Commisission von B. G. Teubner, 1909. – xii+175 S.
18. *Пагіря М. М.* Наближення функцій ланцюговими дробами. – Ужгород: Ґражда, 2016. – 412 с.
19. *Pahirya M. M.* A reciprocal g-derivatives of 2-nd type and its properties // Int. J. Adv. Res. Math. – 2017. – **8**. – P. 1 – 11.
20. *Lange L. J.* δ-Fraction expansions of analytic functions // Anal. Theory Contin. Fract. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1982. – P. 152 – 175.
21. *Дзядык В. К.* Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ // Мат. сб. – 1979. – **108**, вып. 2. – С. 247 – 267.
22. *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1988. – 304 с.

Одержано 02.05.17