УДК 517.5

С. А. Пичугов (Днепропетр. нац. ун-т ж.-д. трансп.)

КРАТНЫЕ МОДУЛИ НЕПРЕРЫВНОСТИ И НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

It is proved that, under the condition $M_\Psi\left(\dfrac{1}{2}\right) < 1$, where M_Ψ is a stretching function Ψ in the space L_Ψ, the Jackson inequalities

$$\sup_n \sup_{f\in L_\Psi, f\neq \mathrm{const}} \frac{E_{n-1}(f)_\Psi}{\omega_k\left(f,\dfrac{\pi}{n}\right)_\Psi} < \infty,$$

are true; here, $E_{n-1}(f)_\Psi$ is the best approximation of f by trigonometric polynomials of degree at most $n-1$ and $\omega_k(f,h)_\Psi$ is the modulus of continuity of f of order $k, k\in N$. We study necessary and sufficient conditions for the function f under which the following relation is true: $E_{n-1}(f)_\Psi \asymp \omega_k\left(f,\dfrac{\pi}{n}\right)_\Psi$.

Доведено, що за умови $M_\Psi\left(\dfrac{1}{2}\right) < 1$, де M_Ψ — функція розтягування Ψ у просторі L_Ψ, виконуються нерівності Джексона

$$\sup_n \sup_{f\in L_\Psi, f\neq \mathrm{const}} \frac{E_{n-1}(f)_\Psi}{\omega_k\left(f,\dfrac{\pi}{n}\right)_\Psi} < \infty.$$

Тут $E_{n-1}(f)_\Psi$ — найкраще наближення f тригонометричними поліномами степеня не вищого за $n-1$, $\omega_k(f,h)_\Psi$ — модуль неперервності f порядку $k, k\in N$. Досліджуються необхідні і достатні умови на функцію f для виконання співвідношення $E_{n-1}(f)_\Psi \asymp \omega_k\left(f,\dfrac{\pi}{n}\right)_\Psi$.

1. Введение. Пусть Ω — множество функций $\Psi\colon R^1_+ \to R^1_+$, являющихся модулем непрерывности, т. е. Ψ — непрерывная неубывающая функция, $\Psi(0) = 0$, $\Psi(x+y) \le \Psi(x) + \Psi(y)$ для всех $x, y \in R^1_+$; функции $f(x)$, $x \in R^1$, — действительнозначные, имеющие период 2π; $T = [-\pi, \pi]$ — основной тор периодов; $L_0 \equiv L_0(T)$ — множество таких функций, которые почти всюду на T конечны и измеримы; для $\Psi \in \Omega$ множество L_Ψ:

$$L_\Psi \equiv L_\Psi(T) = \left\{ f \in L_0\colon \|f\|_\Psi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_T \Psi(|f(x)|)dx < \infty \right\},$$

является линейным метрическим пространством с метрикой $\rho(f,g)_\Psi = \|f-g\|_\Psi$. В частности, с помощью функции $\varphi(t) = t(1+t)^{-1}$, $\varphi\in\Omega$, в L_0 вводится метрика

$$\rho(f,g)_0 = \int\limits_T \varphi\big(|f(x)-g(x)|\big)\,dx,$$

порождающая сходимость по мере, а в случае $\varphi(t) = t^p$, $0 < p < 1$, получаем метрические пространства L_p.

Пусть $T_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ — действительнозначный тригонометрический полином степени n,

$$E_n(f)_\Psi = \inf_{\{c_k\}} \|f - T_n\|_\Psi$$

— наилучшее приближение f такими полиномами в пространстве L_Ψ,

$$\Delta_t f(x) = f(x+t) - f(x), \qquad \Delta_t^k = \Delta_t(\Delta_t^{k-1}), \quad k \in N,$$

$$\omega_k(f,h)_\Psi = \sup_{|t|\le h} \|\Delta_t^k f\|_\Psi, \quad h \ge 0,$$

— модуль непрерывности порядка k функции f в пространстве L_Ψ (в случае $k=1$ вместо $\omega_1(f,h)_\Psi$ будем писать $\omega(f,h)_\Psi$).

Рассмотрим задачу о выполнении в пространствах L_Ψ следующих соотношений (неравенств Джексона):

$$\sup_{n>0} \sup_{f\in L_\Psi, f\ne \mathrm{const}} \frac{E_{n-1}(f)_\Psi}{\omega_k\left(f, \dfrac{\pi}{n}\right)_\Psi} < \infty. \tag{1}$$

В пространствах L_p, $p \in (0,1)$, при $k=1$ соотношения (1) доказаны в работах [1, 2], для $k>1$ — в [3]. В дальнейшем в [4] предложен новый метод доказательства (1) для всех $k \in N$.

При исследовании неравенств (1) в шкале пространств L_Ψ важную роль играет понятие функции растяжения.

Пусть $\beta(t)$, $t \in (0,\infty)$, — произвольная строго положительная всюду конечная функция. Ее функцией растяжения называют [5] (гл. II, § 1) функцию $M_\beta(s)$, $s \in (0,\infty)$,

$$M_\beta(s) := \sup_{t>0} \frac{\beta(st)}{\beta(t)}.$$

Известно [5], что для функции M_β существует число γ_β (нижний показатель растяжения функции β) такое, что $M_\beta(s) \ge s^{\gamma_\beta}$ $\forall s \in [0,1]$, и для любого $\varepsilon > 0$ при $0 < s < 1$ $M_\beta(s) \le$ $\le C_\varepsilon s^{\gamma_\beta - \varepsilon}$ с некоторой постоянной C_ε.

Заметим, что $\gamma_\beta \in [0,1]$ для $\beta \in \Omega$, и в этом случае функция $M_\beta(s)$ в правой окрестности нуля ведет себя следующим образом: либо $M_\beta(s) \equiv 1$ для всех $s \in (0,1]$ (случай $\gamma_\beta = 0$), либо $M_\beta(+0) = 0$ (случай $\gamma_\beta > 0$).

В [6] доказано, что в пространстве L_Ψ при $k=1$ неравенство Джексона (1) выполнено тогда и только тогда, когда $\gamma_\Psi > 0$. Случай $k>1$ оставался открытым.

В п. 2 мы докажем неравенства Джексона (1) в случае $k>1$ для некоторого класса пространств L_Ψ. В п. 3 приведены конструктивные характеристики классов $H_k^\alpha(L_\Psi)$,

$$H_k^\alpha(L_\Psi) = \left\{ f \in L_\Psi : \omega_k(f,h)_\Psi \le C_f \cdot h^\alpha \right\}.$$

В п. 4 исследуется задача С. Б. Стечкина о точном обращении неравенств Джексона в L_Ψ, т. е. необходимые и достаточные условия на функцию f для того, чтоб выполнялось соотношение

$$E_{n-1}(f)_\Psi \asymp \omega_k\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_\Psi.$$

2. Теорема Джексона в L_Ψ для кратных модулей непрерывности.

Теорема 1. *Пусть* $\Psi \in \Omega$, $k = 2, 3, \ldots$.

1. *Если* $M_\Psi\left(\dfrac{1}{2}\right) < 1$, *то выполняются соотношения* (1).

2. *Если* $\gamma_\Psi = 0$, *то для любой последовательности* $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \downarrow 0$

$$\sup_n \sup_{f \in L_\Psi, f \neq \mathrm{const}} \frac{E_{n-1}(f)_\Psi}{\omega_k(f, \alpha_n)_\Psi} = \infty. \tag{2}$$

Метод доказательства неравенства Джексона (1) в L_p, $0 < p < 1$, разработанный в [4], имеет большую общность. Многие этапы доказательства с естественными изменениями остаются в силе в более общем случае пространств L_Ψ. При этом на разных этапах возникают разные требования к поведению функции Ψ. Мы следуем этому методу доказательства. При изложении, по возможности, ограничиваемся краткими комментариями, акцентируя внимание на тех местах, где по существу используется специфика метрики L_Ψ, и опускаем технические детали, которые есть в [4], связанные с алгебраическими преобразованиями.

С помощью функции $\nu(s) : R \to R$ такой, что:

1) $\nu(s) = 1$ для $s \in [-1, 1]$ и $\nu(s) = 0$ для $|s| \geq 2$;

2) $\nu(-s) = \nu(s)$;

3) $\nu(s) \in C^\infty(R)$,

определим тригонометрический полином

$$V_n(x) := \sum_{|k| \leq 2n} \nu\left(\frac{k}{n}\right) e^{ikx}$$

степени не выше $2n - 1$, который является аналогом классических полиномов Валле Пуссена.

Для произвольного натурального N, $N \geq 3n$, построим на периоде $[0, 2\pi]$ систему равноотстоящих точек $t_j = 2\pi \dfrac{j}{N}$, $j = 1, \ldots, N$, и для $\lambda \in R$ определим полиномиальные операторы $V_{n,\lambda}$:

$$V_{n,\lambda}(f; x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f(t_j + \lambda) V_n(x - t_j - \lambda).$$

Если $\gamma_\Psi > 0$, то [6] $\left\| \dfrac{1}{n} V_n \right\|_{M_\Psi} \leq C_1 \dfrac{1}{n}$, и если $N \leq C_2 n$, то

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \|V_{n,\lambda}(f)\|_\Psi \, d\lambda \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Psi(|f(t_j + \lambda)|) M_\Psi \left(\left| \frac{V_n(x - t_j - \lambda)}{N} \right| \right) dx \, d\lambda =$$

$$= N \|f\|_\Psi \left\| \frac{V_n}{N} \right\|_{M_\Psi} \leq C_3 \|f\|_\Psi, \tag{3}$$

т. е. при условии $\gamma_\Psi > 0$ нормы операторов $V_{n,\lambda}$ в среднем по сдвигам λ равномерно ограничены по n (если N имеет порядок роста n).

Пусть τ_h — оператор сдвига аргумента на h, т. е. $\tau_h g(x) = g(x + h)$. Для операторов A, B через $[A, B]$ обозначим их коммутатор: $[A, B] = AB - BA$.

В дальнейшем положим

$$N = 2d_{2(2n-1)-1}^{\left(\left[\frac{2}{\gamma_\Psi}\right]\right)} + 1,$$

где $d_n^{(l)} = n(l+1) - l$.

При таком выборе N в [8] доказано, что при $\gamma_\Psi > 0$ для любого тригонометрического полинома T_{2n-1} степени не выше $2n-1$ при всех $h \in \left(0, \dfrac{2\pi}{N}\right)$ выполняются неравенства

$$\left\|\Delta_h^k T_{2n-1}\right\|_\Psi \le C_4 \|\Delta_{\frac{2\pi}{N}}^k T_{2n-1}\|_\Psi. \tag{4}$$

Лемма 1. *Пусть* $\Psi \in \Omega$ *и* $M_\Psi\left(\dfrac{1}{2}\right) < 1$. *Тогда для всех* $f \in L_\Psi$, $n \in N$, *выполняются неравенства*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left\|[V_{n,\lambda}, \tau_h](f,x)\right\|_\Psi d\lambda dh \le C_5 \omega_k\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_\Psi. \tag{5}$$

Доказательство. При условии $M_\Psi\left(\dfrac{1}{2}\right) < 1$ для любой $\dfrac{2\pi}{m}$-периодической функции $f \in$ $\in L_\Psi$ имеет место неравенство [7]

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \|\Delta_h f\|_\Psi dh \le C_6 m \int\limits_0^{\frac{2\pi}{m}} \|\Delta_h^k f\|_\Psi dh. \tag{6}$$

Обозначим через $\Delta_{h,\lambda}$ оператор разности с шагом h по переменной λ, а через $\|\cdot\|_{\Psi,\lambda}$ L_Ψ-норму по переменной λ. Поскольку [4] $[V_{n,\lambda}, \tau_h] = \tau_h \Delta_{h,\lambda} V_{n,\lambda}$ и $\Delta_h^k(f(x)g(x)) =$ $= \sum_{i=0}^k C_k^i \Delta_h^{k-i} f(x+ih)\Delta_h^i g(x)$, то из (6) следует, что

$$I := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \|[V_{n,\lambda}, \tau_h](f,x)\|_\Psi d\lambda dh \le$$

$$\le C_6 N \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{t_1} \|\Delta_{h,\lambda}^{2k}(V_{n,\lambda}(f,x))\|_{\Psi,\lambda} dh dx =$$

$$= C_6 N \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{t_1} \left\|\sum_{j=1}^N \Delta_{h,\lambda}^{2k}(f(t_j+\lambda))\left(\frac{V_n}{N}(x - t_j - \lambda)\right)\right\|_{\Psi,\lambda} dh dx \le$$

$$\le C_6 N \sum_{i=0}^{2k} M_\Psi(C_{2k}^i) \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{t_1} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \|\Delta_{-h}^i V_{n,\lambda} \Delta_h^{2k-i} \tau_h^i(f,x)\|_\Psi d\lambda dh.$$

Функция $V_{n,\lambda}\Delta_h^{2k-i}\tau_h^i(f,x)$ является тригонометрическим полиномом порядка $2n-1$ по переменной x, поэтому в силу выбора N из (4) следует, что

$$\left\|\Delta_{-h}^{i} V_{n,\lambda} \Delta_h^{2k-i} \tau_h^i(f,x)\right\|_\Psi \le C_4 \left\|\Delta_{t_1}^{i} V_{n,\lambda} \Delta_h^{2k-i} \tau_h^i(f,x)\right\|_\Psi.$$

Отсюда, учитывая (3), получаем

$$I \le C_6 N \sum_{i=0}^{2k} M_\Psi(C_{2k}^i) C_4 \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{t_1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left\|V_{n,\lambda} \tau_h^i \Delta_{t_1}^i \Delta_h^{2k-i}(f,x)\right\|_\Psi d\lambda dh \le$$

$$\le C_7 N \int\limits_0^{t_1} \left\|\Delta_{t_1}^i \Delta_h^{2k-i} f(x)\right\|_\Psi dh \le C_8 \omega_k(f, t_1)_\Psi.$$

Лемма 1 доказана.

***Следствие* 1.** *В условиях леммы* 1 *выполняются неравенства*

$$N \int\limits_0^{t_1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left\|[V_{n,\lambda} - I, \Delta_h](f,x)\right\|_\Psi d\lambda\, dh \le C_9 \omega_k\left(f, \frac{2\pi}{n}\right)_\Psi. \tag{7}$$

***Доказательство теоремы* 1.** Для доказательства неравенства Джексона (1) по существу нужно повторить соответствующие выкладки из [4]. Оценка сверху аппроксимации осуществляется с помощью усреднений по сдвигам

$$I_k := \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} \left\|(I - V_{n,\lambda_1}) \circ (I - V_{n,\lambda_2}) \circ \ldots \circ (I - V_{n,\lambda_k})\right\|_\Psi d\lambda_1 \ldots d\lambda_k.$$

Достаточно доказать, что $I_k \le C_{10} \omega_k\left(f, \dfrac{\pi}{n}\right)_\Psi$.

В [7] доказано, что для любой Ψ из Ω и всех $f \in L_\Psi$ и $h > 0$ выполняются неравенства

$$\omega_k(f,h)_\Psi \le C_{11} \Omega_k(f,h)_\Psi \le C_{12} \omega_k(f,h)_\Psi,$$

где

$$\Omega_k(f,h)_\Psi = \frac{1}{h^k} \int\limits_0^h \ldots \int\limits_0^h \|\Delta_{\bar t}^k f\|_\Psi dt_1 \ldots dt_k,$$

$$\bar t = (t_1, \ldots, t_k), \quad \Delta_{\bar t}^k = \Delta_{t_1} \circ \ldots \circ \Delta_{t_k}.$$

Неравенство $I_k \le C_{13} \Omega_k\left(f, \dfrac{\pi}{n}\right)_\Psi$ доказывается индукцией по k. В случае $k = 1$ при $\gamma_\Psi > 0$ неравенство Джексона доказано в [6], а индуктивный переход основан на неравенстве (7) и алгебраическом соотношении [4]

$$\Delta_{h_1} \circ \ldots \circ \Delta_{h_s} \circ (V_{n,\lambda} - I) =$$

$$= (V_{n,\lambda} - I) \circ \Delta_{h_1} \circ \ldots \circ \Delta_{h_s} + \sum_{i=1}^{s} \Delta_{h_1} \circ \ldots \circ [\Delta_{h_i}, V_{n,\lambda} - I] \circ \ldots \circ \Delta_{h_s}.$$

Пусть теперь $\gamma_\Psi = 0$. Для доказательства (2) заметим, что $\omega_k(f,\alpha_n)_\Psi \leq 2^{k-1}\omega(f,\alpha_n)_\Psi$, поэтому (см. [6])

$$\sup_n \sup_{f\in L_\Psi, f\not\equiv \mathrm{const}} \frac{E_{n-1}(f)_\Psi}{\omega_k(f,\alpha_n)_\Psi} \geq \frac{1}{2^{k-1}} \sup_n \sup_{f\in L_\Psi, f\not\equiv \mathrm{const}} \frac{E_{n-1}(f)_\Psi}{\omega(f,\alpha_n)_\Psi} = \infty.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание. Условие $M_\Psi\left(\frac{1}{2}\right) < 1$ является более сильным, чем условие $\gamma_\Psi > 0$. Например, для функции Ψ из Ω $\Psi(x) = 2x$ для $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\Psi(x) = 1$ для $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $\Psi(x) = x$ для $x > 1$, $\gamma_\Psi = 1$ и $M_\Psi\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

В случае $k = 1$ необходимым и достаточным условием для выполнения неравенства Джексона (1) было условие $\gamma_\Psi > 0$ [6]. При $k > 1$ при доказательстве теоремы 1 в основном использовалось условие $\gamma_\Psi > 0$. Однако неравенство (6) доказано при условии $M_\Psi\left(\frac{1}{2}\right) < 1$. Остается открытым вопрос: справедлива ли теорема Джексона при $k > 1$ в пространствах L_Ψ при условии $\gamma_\Psi > 0$?

3. Конструктивная характеристика классов $\boldsymbol{H_k^\alpha(L_\Psi)}$. В работе [9] в пространстве L_Ψ доказана обратная теорема Джексона в следующей форме.

Теорема 2. *Пусть $\Psi \in \Omega$, $\gamma_\Psi > 0$. Тогда для любого $k \in \boldsymbol{N}$ найдется постоянная $C = C(k,\Psi)$ такая, что для всех $f \in L_\Psi$ и всех $h \in (0,\pi]$ имеют место неравенства*

$$\omega_k(f,h)_\Psi \leq C \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{2\pi}{h}\right]} \frac{M_\Psi\left(\left(\nu\dfrac{h}{2\pi}\right)^k\right)}{\nu} E_{\nu-1}(f)_\Psi. \tag{8}$$

Так как $M_\Psi(t) \leq C(\varepsilon)t^{\gamma_\Psi-\varepsilon}$ при $t \in (0,1]$, то из (8) следует, что

$$\omega_k(f,h)_\Psi \leq C_{14} h^{k(\gamma_\Psi-\varepsilon)} \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{2\pi}{h}\right]} \nu^{k(\gamma_\Psi-\varepsilon)-1} E_{\nu-1}(f)_\Psi. \tag{9}$$

Пусть $E_{\nu-1}(f)_\Psi \leq C_{15}\dfrac{1}{\nu^\alpha}$, $\nu \in N$, и $\alpha < k\gamma_\Psi$. Положим ε настолько малым, чтобы выполнялось условие $\alpha < k(\gamma_\Psi - \varepsilon)$.

Тогда из (9) следует $\omega_k(f,h)_\Psi \leq C_{16}h^\alpha$.

Поэтому из теорем 1, 2 вытекает следующее следствие.

***Следствие* 2.** *Пусть $\Psi \in \Omega$, $M_\Psi\left(\frac{1}{2}\right) < 1$, $k > 1$, $\alpha < k\gamma_\Psi$. Тогда для функции f следующие два условия эквивалентны*:

1) $\exists K_1 = K_1(f)\ \forall n\colon E_{n-1}(f)_\Psi \leq K_1\dfrac{1}{n^\alpha}$;

2) $\exists K_2 = K_2(f)\ \forall h > 0\colon \omega_k(f,h)_\Psi \leq K_2h^\alpha$.

При $k = 1$ это утверждение доказано в [9], и в этом случае вместо условия $M_\Psi\left(\frac{1}{2}\right) < 1$ достаточным было только условие $\gamma_\Psi > 0$.

4. Точное обращение неравенства Джексона в L_Ψ. При каких условиях на функцию f выполняется соотношение $E_{n-1}(f)_\Psi \asymp \omega_k\left(f, \dfrac{\pi}{n}\right)_\Psi$? Задачи о совпадении аппроксимативных и структурных свойств функции в пространстве $C[0, 2\pi]$ исследовались в [10 – 12] (см. также [13] для пространств $L_p[0, 2\pi]$, $p \in [1, \infty]$).

В [14] доказано, что при $p \in [1, \infty]$

$$E_{n-1}(f)_p \asymp \omega_k\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_p \Leftrightarrow \omega_k(f, h)_p \asymp \omega_{k+1}(f, h)_p.$$

Аналог этого результата в случае $p \in (0, 1)$ доказан в [15]:

$$E_{n-1}(f)_p \asymp \omega_k\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_p \Leftrightarrow \omega_k(f, h)_p \asymp \omega_r(f, h)_p, \quad r = k + \left[\frac{1}{p}\right].$$

Для характеристики поведения функции Ψ наряду с нижним показателем растяжения будем теперь использовать и верхний показатель δ_Ψ, т. е. [5] (гл. II, § 1) такой показатель степени, что $M_\Psi(t) \geq t^{\delta_\Psi}$ при всех $t \geq 1$, но для любого $\varepsilon > 0$ $M_\Psi(t) \leq C_\varepsilon t^{\delta_\Psi + \varepsilon}$ с некоторой постоянной C_ε.

Для модуля непрерывности $\omega_k(f, h)_\Psi$ заданной функции f верхний показатель обозначим δ_{ω_k}.

Теорема 3. *Пусть* $k \in \boldsymbol{N}$, $\gamma_\Psi > 0$ *при* $k = 1$ *и* $M_\Psi\left(\dfrac{1}{2}\right) < 1$ *при* $k > 1$. *Если* $\delta_{\omega_k} < k\gamma_\Psi$ *для* $f \in L_\Psi$, *то* $\omega_k\left(f, \dfrac{\pi}{n}\right)_\Psi \asymp E_{n-1}(f)_\Psi$.

Теорема 4. *Пусть* $k \in N$, $M_\Psi\left(\dfrac{1}{2}\right) < 1$. *Тогда для* $f \in L_\Psi$

$$\omega_k\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_\Psi \asymp E_{n-1}(f)_\Psi \Leftrightarrow \exists s \in \boldsymbol{N}\colon s > \left(\frac{\delta_\Psi}{\gamma_\Psi} - 1\right)k + \frac{1 - \delta_\Psi}{\gamma_\Psi},$$

$$\omega_k(f, h)_\Psi \asymp \omega_{k+s}(f, h)_\Psi.$$

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть* $N, n \in \boldsymbol{N}$, $N \geq n$, $k, l \in \boldsymbol{N}$, $\gamma_\Psi > 0$ *при* $k = 1$ *и* $M_\Psi\left(\dfrac{1}{2}\right) < 1$ *при* $k > 1$. *Тогда если* $\delta_{\omega_k} < l\gamma_\Psi$, *то для всех* $\varepsilon > 0$ *таких, что* $l(\gamma_\Psi - \varepsilon) - \delta_{\omega_k} - \varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\nu}{N}\right)^{(\gamma_\Psi - \varepsilon)l - 1} E_{\nu-1}(f)_\Psi \leq C_{17}\left(\frac{n}{N}\right)^{l(\gamma_\Psi - \varepsilon)} \omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_\Psi + C_{18}E_{n-1}(f)_\Psi,$$

где постоянные C_{17}, C_{18} *не зависят от* n *и* N.

Далее для краткости для данной функции f обозначим $e_\nu := E_\nu(f)_\Psi$, $\omega_k(h) := \omega_k(f, h)_\Psi$.

***Доказательство леммы* 2.** Имеем

$$\frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\nu}{N}\right)^{l(\gamma_\Psi - \varepsilon) - 1} e_{\nu-1} = \frac{1}{N}\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} + \sum_{\nu=n}^{N}\right)\left(\frac{\nu}{N}\right)^{l(\gamma_\Psi - \varepsilon) - 1} e_{\nu-1} =: A + B.$$

Поскольку $\{e_{\nu-1}\} \downarrow$, то

$$B \le e_{n-1} \frac{1}{N^{l(\gamma_\Psi-\varepsilon)}} \sum_{\nu=n}^{N} \nu^{l(\gamma_\Psi-\varepsilon)-1} \le C_{18} e_{n-1}.$$

Для оценки A используем теорему Джексона и определение δ_{ω_k}: при $\nu < n$

$$e_{\nu-1} \le C_{19}\omega_k\left(\frac{1}{\nu}\right) \le C_{20}\omega_k\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{\nu}\right)^{\delta_{\omega_k}+\varepsilon},$$

$$A \le C_{20}\omega_k\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(\frac{\nu}{N}\right)^{l(\gamma_\Psi-\varepsilon)-1}\left(\frac{n}{\nu}\right)^{\delta_{\omega_k}+\varepsilon} =$$

$$= C_{20}\omega_k\left(\frac{1}{n}\right)\frac{n^{\delta_{\omega_k}+\varepsilon}}{N^{l(\gamma_\Psi-\varepsilon)}}\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu^{l(\gamma_\Psi-\varepsilon)-(\delta_{\omega_k}+\varepsilon)-1} \le C_{17}(\frac{n}{N})^{l(\gamma_\Psi-\varepsilon)}\omega_k\left(\frac{1}{n}\right).$$

Лемма 2 доказана.

***Доказательство теоремы* 3.** Положим в лемме 2 $l = k$ и применим обратную теорему Джексона в форме (9):

$$\omega_k\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \omega_k\left(\frac{2\pi}{N}\frac{N}{n}\right) \le C_{21}\left(\frac{N}{n}\right)^{\delta_{\omega_k}+\varepsilon}\frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\nu}{N}\right)^{k(\gamma_\Psi-\varepsilon)-1} e_{\nu-1} \le$$

$$\le C_{21}\left(\frac{N}{n}\right)^{\delta_{\omega_k}+\varepsilon}\left(C_{17}\left(\frac{n}{N}\right)^{k(\gamma_\Psi-\varepsilon)}\omega_k\left(\frac{2\pi}{n}\right) + C_{18}e_{n-1}\right) =$$

$$= C_{21}\left(\frac{n}{N}\right)^{k(\gamma_\Psi-\varepsilon)-(\delta_{\omega_k}+\varepsilon)}\omega_k\left(\frac{2\pi}{n}\right) + C_{22}\left(\frac{N}{n}\right)^{\delta_{\omega_k}+\varepsilon} e_{n-1}. \qquad (10)$$

Заметим, что постоянные C_{21} и C_{22} не зависят от n и N.

Положим $N = n \cdot r$, $r \in \mathbf{N}$, и выберем r настолько большим, чтобы выполнялось условие

$$C_{21}\left(\frac{1}{r}\right)^{k(\gamma_\Psi-\varepsilon)-(\delta_{\omega_k}+\varepsilon)} < \frac{1}{2}.$$

Тогда из (10) следует, что $\omega_k\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \le C_{23}e_{n-1}$.

Теорема 3 доказана.

***Доказательство теоремы* 4.** Импликация $\Rightarrow$ очевидным образом справедлива (причем для любого $s \in \mathbf{N}$):

$$\omega_k\left(\frac{\pi}{n}\right) \asymp e_{n-1} \le C_{24}\omega_{k+s}\left(\frac{\pi}{n}\right) \le C_{25}\omega_k\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Докажем обратное утверждение. Достаточно показать, что $\delta_{\omega_{k+s}} < (k+s)\gamma_\Psi$. Тогда по теореме 3

$$\omega_k\left(\frac{\pi}{n}\right) \asymp \omega_{k+s}\left(\frac{\pi}{n}\right) \asymp e_{n-1}. \qquad (11)$$

Из определения верхнего показателя растяжения видно, что если $\omega_k(h) \asymp \omega_{k+s}(h)$, то $\delta_{\omega_k} = \delta_{\omega_{k+s}}$. Значит, справедливость (11) гарантируется условием $\delta_{\omega_k} < (k+s)\gamma_\Psi$.

В [7] доказано, что для любой $f \in L_\Psi, \Psi \in \Omega$, всех $k, n \in N$ и $h > 0$

$$\omega_k(f, nh)_\Psi \leq C(k) n M_\Psi(n^{k-1}) \omega_k(f, h)_\Psi.$$

Отсюда следует оценка сверху для значений δ_{ω_k}:

$$\delta_{\omega_k} \leq (k-1)\delta_\Psi + 1.$$

Поэтому для выполнимости (11) достаточно выбрать значение s так, чтобы

$$(k-1)\delta_\Psi + 1 < (k+s)\gamma_\Psi.$$

Теорема 4 доказана.

Литература

1. *Иванов В. И.* Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике L_p для $0 < p < 1$ // Мат. заметки. – 1975. – **18**, № 5. – С. 641 – 658.
2. *Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сб. – 1975. – **98**, № 3. – С. 395 – 415.
3. *Стороженко Э. А., Освальд П.* Теорема Джексона в пространствах $L_p(R^k)$, $0 < p < 1$ // Сиб. мат. журн. – 1978. – **19**, № 4. – С. 888 – 901.
4. *Руновский К. В.* О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сб. – 1994. – **185**, № 8. – С. 81 – 102.
5. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
6. *Пичугов С. А.* О теореме Джексона для периодических функций в метрических пространствах с интегральной метрикой. II // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 11. – С. 1524 – 1533.
7. *Пичугов С. А.* Некоторые свойства модулей непрерывности периодических функций в метрических пространствах // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 12. – С. 1657 – 1664.
8. *Пичугов С. А.* Неравенства типа Никольского – Стечкина для приращений тригонометрических полиномов в метрических пространствах // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, № 5. – С. 711 – 716.
9. *Пичугов С. А.* Обратные теоремы Джексона в пространствах с интегральной метрикой // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 3. – С. 351 – 362.
10. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Докл. АН СССР. – 1949. – **65**, № 2. – С. 135 – 137.
11. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1951. – **15**, № 3. – С. 219 – 242.
12. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483 – 522.
13. *Тиман А. Ф.* Теория приближений функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
14. *Rathore R. K. S.* The problem of A. F. Timan on the precise oredes of decrease of the best approximations // J. Approxim. Theory. – 1994. – **77**. – P. 153 – 166.
15. *Коломойцев Ю. С.* О модулях гладкости и мультипликаторах Фурье в L_p, $0 < p < 1$ // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 9. – С. 1221 – 1238.

Получено 25.05.17