УДК 517.5

В. В. Савчук (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАЙКРАЩІ НАБЛИЖЕННЯ ЯДРА КОШІ – СЕГЬО В СЕРЕДНЬОМУ НА ОДИНИЧНОМУ КОЛІ

We compute the values of the best approximations of the Cauchy – Szegö kernel in the mean on the unit circle by quasipolynomials with respect to the Takenaka – Malmquist system.

Вычислены величины наилучших приближений в среднем на единичной окружности ядра Коши – Сеге посредством квазиполиномов по системе Такенаки – Мальмквиста.

1. Нехай $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$, $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ і σ — нормована міра Лебега на $\mathbb{T}$.

Розглянемо послідовність $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ точок у крузі $\mathbb{D}$, серед яких можуть бути точки скінченної і навіть нескінченної кратності. Системою функцій Такенаки – Мальмквіста, породженою послідовністю $\mathbf{a}$, називається система $\varphi := \{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ функцій φ_j вигляду

$$\varphi_0(t) = \frac{\sqrt{1 - |a_0|^2}}{1 - \overline{a_0}t}, \qquad \varphi_j(t) = \frac{\sqrt{1 - |a_j|^2}}{1 - \overline{a_j}t} B_j(t), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

де

$$B_j(t) := \prod_{k=0}^{j-1} \frac{-|a_k|}{a_k} \frac{t - a_k}{1 - t\overline{a_k}},$$

а при $a_k = 0$ покладається $|a_k|/a_k = -1$.

Нехай TM — множина усіх систем Такенаки – Мальмквіста у крузі $\mathbb{D}$.

Відомо (див., наприклад, [1], §10.7), що TM-система φ є ортонормованою на колі $\mathbb{T}$, тобто

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \varphi_k \overline{\varphi_l} d\sigma = \delta_{kl}, \quad k, l = 0, 1, \ldots,$$

де δ_{kl} — символ Кронекера, і повною в просторі Гарді H^2 тоді і тільки тоді, коли $\sum_{k=0}^{\infty}(1 - |a_k|) = +\infty$.

Під ядром Коші – Сегьо для круга $\mathbb{D}$ будемо розуміти функцію двох змінних

$$(z, t) \mapsto \frac{1}{1 - \overline{z}t},$$

визначену в $\overline{\mathbb{D}}^2 \setminus \mathbb{T}^2$.

Відомо [2], що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{1 - \overline{z}t} - \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\varphi_j(z)} \varphi_j(t) = \frac{\overline{B_n(z)} B_n(t)}{1 - \overline{z}t}, \quad (z, t) \in \overline{\mathbb{D}}^2 \setminus \mathbb{T}^2, \tag{1}$$

а у випадку, коли система φ є повною в H^2, $|B_n(z) B_n(t)| \rightrightarrows 0, n \to \infty$, в області $\overline{\mathbb{D}}^2 \setminus \mathbb{T}^2$ і тому

$$\frac{1}{1 - \overline{z}t} = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\varphi_j(z)} \varphi_j(t) \quad \forall\ (z, t) \in \overline{\mathbb{D}}^2 \setminus \mathbb{T}^2.$$

Зрозуміло також (це випливає з формули (1)), що при фіксованому $z \in \mathbb{D}$ сума $\sum_{j=0}^{n-1} \overline{\varphi_j(z)}\varphi_j(t)$ є квазіполіномом порядку n $\big($елемент лінійної оболонки $\operatorname{span}\{\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}\}\big)$ найкращого середньоквадратичного наближення на колі $\mathbb{T}$ ядра Коші – Сегьо, тобто

$$\min_{\lambda_{j,n}(z)} \int\limits_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{1-\overline{z}t} - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{j,n}(z)\varphi_j(t) \right|^2 d\sigma(t) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{1-\overline{z}t} - \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\varphi_j(z)}\varphi_j(t) \right|^2 d\sigma(t) = \frac{|B_n(z)|^2}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

В даній роботі розв'язано задачу про найкраще наближення в середньому на колі $\mathbb{T}$ ядра Коші – Сегьо підпростором $\operatorname{span}\{\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}\}$, а саме, знайдено формулу для обчислення величини

$$E_n\left(\frac{1}{1-\overline{z}\cdot}; \varphi\right) := \min_{\lambda_{j,n}(z)} \int\limits_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{1-\overline{z}t} - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{j,n}(z)\varphi_j(t) \right| d\sigma(t) \tag{2}$$

і вказано явний вигляд коефіцієнтів $\lambda_{j,n}^*(z)$, на яких досягається мінімум у правій частині (2).

У випадку, коли система φ є системою степенів, тобто коли $\varphi_j(t) = t^j$, дану задачу розв'язано в [3]:

$$E_n\left(\frac{1}{1-\overline{z}\cdot}; \{t^j\}_{j=0}^{\infty}\right) = |z|^n \frac{1-|z|^2}{1-|z|^{2(n+1)}} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\left|1-\overline{z}^{n+1}t^{n+1}\right|}{|1-\overline{z}t|^2} d\sigma(t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Результати про найкращі наближення іншими підпросторами в інших метриках ядер Коші – Сегьо на одиничному колі та ядер Коші на дійсній осі можна знайти в [4 – 8].

Основним результатом цієї статті є така теорема.

Теорема 1. *Нехай* $\varphi \in TM$ *і* $z \in \mathbb{D}$. *Тоді для будь-якого* $n \in \mathbb{N}$

$$E_n\left(\frac{1}{1-\overline{z}\cdot}; \varphi\right) = |B_n(z)| \frac{1-|z|^2}{1-|zB_n(z)|^2} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\left|1-\overline{zB_n(z)}tB_n(t)\right|}{|1-\overline{z}t|^2} d\sigma(t)$$

і

$$\lambda_{j,n}^*(z) = \frac{\overline{\varphi_j(z)}}{1-|zB_n(z)|^2} \left(1 - z\frac{1-a_j\overline{z}}{z-a_j} \left|\frac{B_n(z)}{B_j(z)}\right|^2\right), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Доведення. Введемо такі позначення:

$$H_0^1 := \left\{g \in H^1 : g(0) = 0\right\},$$

де H^1 — простір Гарді у крузі $\mathbb{D}$, і

$$\operatorname{sign} w := \frac{\overline{w}}{|w|}, \quad w \in \mathbb{C}.$$

Тепер розглянемо функцію $P_n : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, визначену правилом

$$P_n(t) = \frac{1}{1-\overline{z}t} - \frac{1-|z|^2}{1-|zB_n(z)|^2}\,\frac{\overline{B_n(z)}B_n(t)\left(1 - zB_n(z)\overline{tB_n(t)}\right)}{|1-z\overline{t}|^2}.$$

Легко бачити, що P_n є обмеженою функцією на $\overline{\mathbb{D}}$.

Покажемо, що P_n є шуканим квазіполіномом найкращого наближення в середньому ядра Коші – Сегьо. Для цього достатньо перевірити виконання таких умов:

i) $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} P_n g d\sigma = 0 \quad \forall\, g \in H_0^1$;

ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} P_n \overline{\varphi_j} d\sigma = 0, \quad j = n, n+1, \ldots$;

iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} \operatorname{sign}\left(\frac{1}{1-\overline{z}t} - P_n(t)\right)\varphi_j(t) d\sigma(t) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$

Умова i) забезпечує те, що функція P_n є голоморфною в $\mathbb{D}$ (див., наприклад, [9, с. 94]), а умова ii) уточнює, що при цьому $P_n \in \operatorname{span}\{\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}\}$. Умова ж iii) є критерієм елемента P_n найкращого наближення в середньому на $\mathbb{T}$ функції $1/(1-\overline{z}\cdot)$ підпростором $\operatorname{span}\{\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}\} \subset L^1(\mathbb{T})$ [10] (теорема 2), де $L^1(\mathbb{T})$ — простір Лебега на колі $\mathbb{T}$.

Нехай $g \in H_0^1$. Тоді функції $B_n(t)g(t)$ і $g(t)/t$ належать H^1. Тому за формулами Коші та Пуассона одержимо

$$\int_{\mathbb{T}} P_n(t)g(t)d\sigma(t) = \int_{\mathbb{T}} \frac{g(t)}{1-\overline{z}t} d\sigma(t) -$$

$$-\frac{1}{1-|zB_n(z)|^2}\left(\overline{B_n(z)}\int_{\mathbb{T}} B_n(t)g(t)\frac{1-|z|^2}{|1-z\overline{t}|^2}d\sigma(t) - z|B_n(z)|^2\int_{\mathbb{T}}\overline{t}g(t)\frac{1-|z|^2}{|1-z\overline{t}|^2}d\sigma(t)\right) =$$

$$= g(0) - \frac{1}{1-|zB_n(z)|^2}\left(|B_n(z)|^2 g(z) - z|B_n(z)|^2\frac{g(z)}{z}\right) = 0.$$

Отже, умову i) виконано.

Далі, для всіх $j \geq n$ функція $B_j(t)/(B_n(t)(1-\overline{a}_j t)(1-\overline{z}t))$ є голоморфною в $\overline{\mathbb{D}}$, тому за формулою Коші

$$\int_{\mathbb{T}} P_n(t)\overline{\varphi_j(t)}d\sigma(t) =$$

$$= \int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{\varphi_j(t)}}{1-\overline{z}t}d\sigma(t) - \frac{\sqrt{1-|a_j|^2}(1-|z|^2)\overline{B_n(z)}}{1-|zB_n(z)|^2}\overline{\int_{\mathbb{T}} \frac{B_j(t) - \overline{zB_n(z)}B_j(t)tB_n(t)}{B_n(t)(1-\overline{a_j}t)(1-\overline{z}t)}\,\frac{d\sigma(t)}{1-z\overline{t}}} =$$

$$= \overline{\varphi_j(z)} - \frac{\sqrt{1-|a_j|^2}(1-|z|^2)\overline{B_n(z)}}{1-|zB_n(z)|^2}\,\frac{\overline{B_j(z)} - zB_n(z)\overline{B_j(z)zB_n(z)}}{\overline{B_n(z)}(1-a_j\overline{z})(1-z\overline{z})} =$$

$$= \overline{\varphi_j(z)} - \frac{\sqrt{1-|a_j|^2}}{1-a_j\overline{z}}\overline{B_j(z)} = 0.$$

Отже, і умову ii) виконано.

Для перевірки умови iii) застосуємо такі міркування.

Нехай $\rho \in [0,1)$ і $\{c_k(\rho)\}_{k=0}^{\infty}$ — послідовність коефіцієнтів розкладу

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos x+\rho^2}}=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho)\cos kx,\ \ x\in\mathbb{R}.$$

Тоді для будь-якого $t\in\mathbb{T}$

$$\frac{1}{\left|1-\overline{zB_n(z)}tB_n(t)\right|}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k(z)\left(tB_n(t)\right)^k, \tag{4}$$

де

$$A_0(z):=c_0\left(|zB_n(z)|\right),\ A_k(z):=\frac{1}{2}c_{|k|}\left(|zB_n(z)|\right)\exp\big(-ik\arg(zB_n(z))\big),$$

а ряд в (4) збігається абсолютно і рівномірно відносно t.

Оскільки для кожного $j=0,1,\ldots,n-1$ функції $t^kB_n^{k-1}(t)B_j(t)/(1-\overline{a}_jt)$ при $k=1,2,\ldots$ і $t^kB_n^{k+1}(t)/B_j(t)$ при $k=0,1,\ldots$ є голоморфними в $\overline{\mathbb{D}}$, то

$$\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{1}{t^kB_n^{k-1}(t)B_j(t)(1-a_j\overline{t})}d\sigma(t)=\overline{\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{t^kB_n^{k-1}(t)B_j(t)}{1-\overline{a}_jt}d\sigma(t)}=0,\quad k=1,2,\ldots,$$

і

$$\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{t^kB_n^{k+1}(t)}{B_j(t)}\frac{1}{1-a_j\overline{t}}d\sigma(t)=\frac{a_j^kB_n^{k+1}(a_j)}{B_j(a_j)}=0,\quad k=0,1,\ldots.$$

Отже, з урахуванням (4) для кожного $j=0,\ldots,n-1$ одержимо

$$\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\overline{\varphi_j(t)}B_n(t)}{\left|1-\overline{zB_n(z)}tB_j(t)\right|}d\sigma(t)=\int\limits_{\mathbb{T}}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k(z)\left(tB_n(t)\right)^k\overline{B_j(t)}B_n(t)\right)\frac{\sqrt{1-|a_j|^2}}{1-a_j\overline{t}}d\sigma(t)=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k(z)\int\limits_{\mathbb{T}}\left(tB_n(t)\right)^k\frac{B_n(t)}{B_j(t)}\frac{\sqrt{1-|a_j|^2}}{1-a_j\overline{t}}d\sigma(t)=0. \tag{5}$$

Аналогічно отримаємо

$$\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\overline{\varphi_j(t)}B_n(t)\overline{tB_n(t)}}{\left|1-\overline{zB_n(z)}tB_n(t)\right|}d\sigma(t)=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k(z)\int\limits_{\mathbb{T}}\left(tB_n(t)\right)^k\overline{tB_j(t)}\frac{\sqrt{1-|a_j|^2}}{1-a_j\overline{t}}d\sigma(t)=0. \tag{6}$$

Об'єднуючи рівності (5) і (6), переконуємося, що умову iii) також виконано.

Покажемо тепер, що коефіцієнти $\lambda_{j,n}^*$ квазіполінома P_n обчислюються за формулою (3).

Оскільки

$$\frac{1}{(1-a_j\overline{t})(1-z\overline{t})}=\frac{t}{a_j-z}\left(\frac{1}{1-a_j\overline{t}}-\frac{1}{1-z\overline{t}}\right)\quad\forall\, t\in\mathbb{T},$$

а функція $B_n(t)/(B_j(t)(1-\overline{z}t))$ є голоморфною в $\overline{\mathbb{D}}$, то за інтегральними формулами Коші та Пуассона

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{B_n(t)\overline{B_j(t)}}{(1-a_j\overline{t})|1-\overline{z}t|^2}d\sigma(t) = \frac{1}{a_j-z}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{B_n(t)t}{B_j(t)(1-\overline{z}t)}\left(\frac{1}{1-a_j\overline{t}}-\frac{1}{1-z\overline{t}}\right)d\sigma(t) =$$

$$= \frac{1}{a_j-z}\left(\frac{B_n(a_j)a_j}{B_j(a_j)(1-\overline{z}a_j)}-\frac{B_n(z)z}{B_j(z)(1-\overline{z}z)}\right) = \frac{B_n(z)z}{B_j(z)(1-|z|^2)(z-a_j)}$$

і

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\overline{tB_j(t)}}{(1-a_j\overline{t})|1-\overline{z}t|^2}d\sigma(t) = \overline{\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{tB_j(t)}{1-\overline{a}_jt}\frac{1}{|1-\overline{z}t|^2}d\sigma(t)} = \frac{\overline{zB_j(z)}}{(1-|z|^2)(1-a_j\overline{z})}.$$

Тому

$$\lambda_{j,n}^*(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} P_n(t)\overline{\varphi_j(t)}d\sigma(t) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\overline{\varphi_j(t)}}{1-\overline{z}t}d\sigma(t) - \frac{\sqrt{1-|a_j|^2}\,\overline{B_n(z)}}{1-|zB_n(z)|^2}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\overline{B_j(t)}B_n(t)\left(1-zB_n(z)\overline{tB_n(t)}\right)}{1-a_j\overline{t}}\frac{1-|z|^2}{|1-\overline{z}t|^2}d\sigma(t) =$$

$$= \overline{\varphi_j(z)} - \frac{\sqrt{1-|a_j|^2}\,\overline{B_n(z)}}{1-|zB_n(z)|^2}\left(\frac{B_n(z)z}{B_j(z)(z-a_j)}-\frac{|z|^2B_n(z)\overline{B_j(z)}}{1-a_j\overline{z}}\right) =$$

$$= \overline{\varphi_j(z)}\left(1-\frac{\overline{B_n(z)}}{1-|zB_n(z)|^2}\left(\frac{B_n(z)z(1-a_j\overline{z})}{|B_j(z)|^2(z-a_j)}-|z|^2B_n(z)\right)\right) =$$

$$= \frac{\overline{\varphi_j(z)}}{1-|zB_n(z)|^2}\left(1-z\frac{1-a_j\overline{z}}{z-a_j}\left|\frac{B_n(z)}{B_j(z)}\right|^2\right),$$

що й завершує доведення теореми.

2. Наведемо одне з можливих застосувань теореми 1 до задач наближення голоморфних функцій.

Нехай K — клас голоморфних в $\mathbb{D}$ функцій f, які зображуються інтегралами типу Коші–Сегьо

$$f(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{h(t)}{1-z\overline{t}}d\sigma(t), \quad z\in\mathbb{D}, \tag{7}$$

зі щільностями $h\colon\mathbb{T}\to\mathbb{C}$, для яких

$$\|h\| := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{T}}|h(t)| \le 1.$$

Позначимо

$$\mathcal{E}_n(K;\varphi;z) := \inf_{\mu_{j,n}(z)}\sup_{f\in K}\left|f(z)-\sum_{j=0}^{n-1}\widehat{f}_j\mu_{j,n}(z)\varphi_j(z)\right|, \qquad n\in\mathbb{N}, \quad z\in\mathbb{D}, \tag{8}$$

де $\mu_{j,n} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ — неперервні функції і

$$\widehat{f}_j = \widehat{h}_{j,\varphi} := \int\limits_{\mathbb{T}} h\overline{\varphi_j} d\sigma, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Нашою метою у цьому пункті є розв'язання екстремальної задачі про точне значення (явну формулу) для величини $\mathcal{E}_n(K;\varphi;z)$ та відшукання екстремальних елементів $\mu^*_{j,n}(z)$ і $f^* \in K$, на яких досягаються відповідно інфімум і супремум у правій частині (8).

Перед формулюванням розв'язку поставленої задачі прокоментуємо те, як ми будемо вибирати щільність h^*, що породжуватиме екстремальний елемент f^* у класі K.

Насамперед зауважимо, що для даної функції $h : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, $\|h\| \le 1$, фактор-клас $h + \overline{H}_0^\infty$, де $\overline{H}_0^\infty$ означає підпростір істотно обмежених функцій g на колі $\mathbb{T}$, для яких

$$\int\limits_{\mathbb{T}} g(t)\bar{t}^{\,k} d\sigma(t) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

породжує за формулою (7) одну і ту ж функцію f із класу K.

Припустимо, що екстремальний елемент f^* породжується деякою щільністю h. Тоді (див., наприклад, [9, с. 139]) у фактор-класі $h + \overline{H}_0^\infty$ існує принаймні одна функція h_1 із найменшою нормою $\|h_1\| = \inf_{g \in \overline{H}_0^\infty} \|h + g\| \le \|h\| \le 1$. Якщо така функція єдина, то її вибираємо в якості щільності, яка породжує функцію f^*, і перепозначаємо $h^* = h_1$. Якщо ж у фактор-класі $h + \overline{H}_0^\infty$ знайдеться ще одна функція h_2 з такою самою нормою $\|h_2\| = \|h_1\|$, то за теоремою Адамяна, Арова і Крейна (див., наприклад, [9, с. 154]) у цьому фактор-класі знайдеться і деяка функція h_3, для якої $|h_3| = \|h_1\|$ майже скрізь на колі $\mathbb{T}$. У такому випадку, позначивши $h^* = h_3$, вибиратимемо h^* у якості щільності в інтегралі (7), що породжує функцію f^*.

Наслідок. *Нехай $\varphi \in TM$ і $z \in \mathbb{D}$. Тоді для будь-якого $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{E}_n(K;\varphi;z) = \frac{|B_n(z)|(1-|z|^2)}{1-|zB_n(z)|^2} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\left|1 - \overline{zB_n(z)}tB_n(t)\right|}{|1-\overline{z}t|^2} d\sigma(t).$$

При кожному фіксованому $n \in \mathbb{N}$ екстремальними елементами, на яких досягаються точна нижня і точна верхня межі в (8), *є відповідно*

$$\mu^*_{j,n}(z) = \frac{1}{1-|zB_n(z)|^2}\left(1 - \overline{z}\frac{1-\overline{a}_j z}{\overline{z}-\overline{a}_j}\left|\frac{B_n(z)}{B_j(z)}\right|^2\right), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

і

$$h^*(t) = h^*_n(t) = \operatorname{sign}\left(\frac{1}{1-z\bar{t}} - \sum_{j=0}^{n-1} \mu^*_j(z)\varphi_j(z)\overline{\varphi_j(t)}\right).$$

Справді, для будь-яких $\mu_{j,n}$

$$f(z) - \sum_{j=0}^{n-1} \widehat{f}_j \mu_{j,n}(z)\varphi_j(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} h(t)\left(\frac{1}{1-z\bar{t}} - \sum_{j=0}^{n-1} \mu_{j,n}(z)\varphi_j(z)\overline{\varphi_j(t)}\right) d\sigma(t),$$

звідки за теоремою 1 випливає оцінка зверху

$$\mathcal{E}_n(K;\varphi;z) \leq \left| f(z) - \sum_{j=0}^{n-1} \widehat{f}_j \mu_{j,n}^*(z)\varphi_j(z) \right| \leq$$

$$\leq E_n\left(\overline{\frac{1}{1-\overline{z}\cdot}};\varphi\right) = \frac{|B_n(z)|(1-|z|^2)}{1-|zB_n(z)|^2} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\left|1-\overline{zB_n(z)}tB_n(t)\right|}{|1-\overline{z}t|^2} d\sigma(t).$$

Для оцінки знизу розглянемо функцію h^*. В доведенні теореми 1 (див. перевірку умови iii)) показано, що

$$\int\limits_{\mathbb{T}} h^* \overline{\varphi_j} d\sigma = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Тому для будь-яких $\mu_{j,n}$

$$\mathcal{E}_n(K;\varphi;z) \geq \left| \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{h^*(t)}{1-z\overline{t}} d\sigma(t) \right| = \int\limits_{\mathbb{T}} h^*(t) \left(\frac{1}{1-z\overline{t}} - \sum_{j=0}^{n-1} \mu_{j,n}^*(z)\varphi_j(z)\overline{\varphi_j(t)} \right) d\sigma(t) =$$

$$= E_n\left(\overline{\frac{1}{1-\overline{z}\cdot}};\varphi\right) = \frac{|B_n(z)|(1-|z|^2)}{1-|zB_n(z)|^2} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\left|1-\overline{zB_n(z)}tB_n(t)\right|}{|1-\overline{z}t|^2} d\sigma(t),$$

що й потрібно було довести.

Література

1. *Уолш Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 508 с.
2. *Джрбашян М. М.* О разложении аналитических функций в ряд по рациональным функциям с заданным множеством полюсов // Изв. АН АрмССР. Сер. мат. – 1956. – **9**, № 7. – С. 3 – 28.
3. *Альпер С. Я.* О наилучшем приближении аналитических функций в среднем первой степени на окружности // Докл. АН СССР. – 1963. – **153**, № 3. – С. 503 – 506.
4. *Альпер С. Я.* Об асимптотических значениях наилучшего приближения аналитических функций в комплексной области // Успехи мат. наук. – 1959. – **14**, № 1. – С. 131 – 134.
5. *Rivlin T. J.* Some explicit polynomial approximations in the complex domain // Bull. Amer. Math. Soc. – 1967. – **73**, № 3. – P. 467 – 469.
6. *Джрбашян М. М.* Биортогональные рациональные функции и наилучшее приближение ядра Коши на вещественной оси // Мат. сб. – 1974. – **94**, № 3. – С. 418 – 444.
7. *Савчук В. В.* Найкращі лінійні методи наближення та оптимальні ортонормовані системи простору Гарді // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 5. – С. 661 – 671.
8. *Савчук В. В., Чайченко С. О.* Найкращі наближення ядра Коші на дійсній осі // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 1. – С. 1540 – 1549.
9. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 469 с.
10. *Хавинсон С. Я.* О единственности функции наилучшего приближения в метрике пространства L_1 // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1958. – **22**, № 2. – С. 242 – 270.

Одержано 14.11.16,
після доопрацювання — 29.12.17