УДК 517.929

В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, Рівне)

НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ АБСОЛЮТНОЇ НЕСТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ЗІ САМОСПРЯЖЕНИМИ ОПЕРАТОРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

For linear differential-difference equations of retarded and neutral types with infinitely many deviations and self-adjoint operator coefficients, we present necessary and sufficient conditions for the absolute instability of the zero solutions.

Для линейных дифференциально-разностных уравнений запаздывающего и нейтрального типов с бесконечным числом отклонений и самосопряженными операторными коэффициентами приведены необходимые и достаточные условия абсолютной неустойчивости нулевых решений.

1. Основний об'єкт досліджень. Нехай H — гільбертовий простір і $\|\cdot\|_H$ — норма в H, що визначається рівністю

$$\|x\|_E = \sqrt{(x,x)},$$

де (x,y) — скалярний добуток x на y $(x,y\in H)$. Позначимо через $\operatorname{End} H$ банахову алгебру лінійних неперервних операторів $A\colon H\to H$ з одиницею I та нормою

$$\|A\|_{\operatorname{End} H} = \sup_{\|x\|_H=1}\|Ax\|_H.$$

Розглянемо самоспряжені оператори $A_n\in\operatorname{End} H,\ n\ge 1,\ B_n\in\operatorname{End} H,\ n\ge 0$, що задовольняють умову

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|A_n\|_{\operatorname{End} H}+\sum_{n=0}^{\infty}\|B_n\|_{\operatorname{End} H}<\infty, \tag{1}$$

невід'ємні числа $\Delta_n,\ \tau_n,\ n\ge 1$, для яких

$$\sup_{n\ge 1}\Delta_n+\sup_{n\ge 1}\tau_n<\infty, \tag{2}$$

та диференціально-різницеві рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt}=B_0x(t)+\sum_{n=1}^{\infty}B_nx(t-\Delta_n),\quad t\ge 0, \tag{3}$$

і

$$\frac{dx(t)}{dt}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\frac{dx(t-\tau_n)}{dt}=B_0x(t)+\sum_{n=1}^{\infty}B_nx(t-\Delta_n),\quad t\ge 0, \tag{4}$$

запізнювального та нейтрального типів відповідно.

Нульові розв'язки рівнянь (3), (4) називаються *абсолютно нестійкими* по відношенню до відхилень $\Delta_n,\ \tau_n,\ n\ge 1$, якщо ці розв'язки нестійкі при всіх невід'ємних $\Delta_n,\ n\ge 1$, і $\Delta_n,\ \tau_n,\ n\ge 1$, відповідно і для цих відхилень виконується співвідношення (2) (означення нестійких розв'язків диференціальних рівнянь із відхиленнями аргумента можна знайти, наприклад, в [1, 2]).

Мета статті — встановлення необхідних і достатніх умов абсолютної нестійкості нульових розв'язків рівнянь (3), (4).

2. Формулювання основних результатів. Позначимо через $\operatorname{Sp} A$ спектр оператора $A \in \operatorname{End} H$, а через $\mathbb{C}_+$ множину $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.

Правильними є наступні твердження.

Теорема 1. *Для абсолютної нестійкості нульового розв'язку рівняння* (3) *необхідно і достатньо, щоб*

$$\left(\operatorname{Sp} \sum_{n=0}^{\infty} B_n\right) \bigcap \mathbb{C}_+ \neq \varnothing. \tag{5}$$

Теорема 2. *Нехай*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\|_{\operatorname{End} H} < 1 \tag{6}$$

і

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n A_n\right)\left(B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n B_n\right) = \left(B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n B_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n A_n\right) \tag{7}$$

для всіх $p_n \in [0,1]$, $q_n \in [0,1]$, $n \geq 1$.

Для абсолютної нестійкості нульового розв'язку рівняння (4) *необхідно і достатньо виконання співвідношення* (5).

Доведення цих тверджень див. у пп. 4, 5.

3. Допоміжні твердження. Спочатку наведемо деякі факти про самоспряжені неперервні оператори, що будуть використовуватись у подальшому.

Нагадаємо, що оператор $A \in \operatorname{End} H$ називається самоспряженим, якщо він збігається зі спряженим до нього оператором A^*, тобто

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

для всіх $x, y \in H$ (теорію таких операторів викладено, наприклад, у [3 – 5]). Самоспряжений оператор $A \in \operatorname{End} H$ характеризується тим, що його ермітова форма (Ax, x), $x \in H$, набуває лише дійсних значень. Спектр самоспряженого оператора $\operatorname{Sp} A$ є непорожньою обмеженою замкненою множиною на дійсній осі. Найменший сегмент, що містить у собі спектр $\operatorname{Sp} A$, позначимо через $[\lambda_m(A), \lambda_M(A)]$. Як відомо (див., наприклад, [4]),

$$\lambda_m(A) = \inf\left\{(Ax, x) : \|x\|_H = 1\right\},$$

$$\lambda_M(A) = \sup\left\{(Ax, x) : \|x\|_H = 1\right\},$$

$$\|A\|_{\operatorname{End} H} = \max\{\lambda_M(A), -\lambda_m(A)\}.$$

Очевидно, що $\lambda_m(A)$, $\lambda_M(A)$ і $\|A\|_{\operatorname{End} H}$ неперервно залежать від A.

Зазначимо також, що сума самоспряжених операторів є самоспряженим оператором, лінійна комбінація їх із дійсними коефіцієнтами також є самоспряженим оператором. Завдяки неперервності скалярного добутку границя за нормою послідовності самоспряжених операторів є самоспряженим оператором. Добуток BA самоспряжених операторів A і B є самоспряженим оператором тільки тоді, коли $BA = AB$.

Далі наведемо твердження, пов'язані зі спектром самоспряженого оператора.

Оскільки точки спектра самоспряженого оператора можуть не бути власними значеннями такого оператора, то важливим для дослідження рівнянь (3), (4) є наступне твердження.

Теорема 3 ([4], розділ VII, § 4). *Точка λ належить спектру самоспряженого оператора $A \in \operatorname{End} H$ тоді і тільки тоді, коли існує послідовність нормованих векторів x_n, $\|x_n\|_H = 1$, $n \geq 1$, для якої*

$$\lim_{n\to\infty} \|Ax_n - \lambda x_n\|_H = 0.$$

Нагадаємо, що кожний самоспряжений оператор $A \in \operatorname{End} H$ визначає спектральну функцію $P(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, за допомогою якої оператор A можна записати у вигляді

$$A = \int\limits_{\lambda_m(A)-\varepsilon}^{\lambda_M(A)} \lambda dP(\lambda),$$

а важливу для подальшого операторну функцію e^{tA} $(t \in \mathbb{R})$ — у вигляді

$$e^{tA} = \int\limits_{\lambda_m(A)-\varepsilon}^{\lambda_M(A)} e^{t\lambda}\, dP(\lambda), \tag{8}$$

де інтеграли розуміють як границі інтегральних сум у сенсі рівномірної збіжності у просторі операторів і ε — довільне додатне число.

За допомогою рівності (8) та властивостей функції $P(\lambda)$ (можна також використати лему Меррея (див. [3, с. 109,110]) легко встановлюється наступне твердження.

Теорема 4. *Якщо для самоспряженого оператора $A \in \operatorname{End} H$ виконується співвідношення*

$$(\operatorname{Sp} A) \bigcap \mathbb{C}_+ = \varnothing,$$

то

$$\sup_{t\geq 0} \left\|e^{tA}\right\|_{\operatorname{End} H} \leq 1. \tag{9}$$

Зауважимо, що твердження теореми 4 є хибним, якщо оператор $A \in \operatorname{End} H$ не є самоспряженим (ліва частина співвідношення (9) може бути необмеженою).

4. Доведення теореми 1. *Необхідність.* Нехай нульовий розв'язок рівняння (3) абсолютно нестійкий. Тоді цей розв'язок нестійкий і при $\Delta_n = 0$, $n \geq 1$. У цьому випадку рівняння (3) набирає вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n\right) x(t), \quad t \geq 0, \tag{10}$$

і функція

$$x = e^{tA} c, \tag{11}$$

де $A = \sum_{n=0}^{\infty} B_n$ і c — довільний вектор простору H, є загальним розв'язком рівняння (10) [6]. Завдяки (1) та самоспряженості операторів B_n, $n \geq 0$, оператор $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$ також є самоспряженим.

Припустимо, що співвідношення (5) не виконується, тобто

$$\left(\operatorname{Sp}\sum_{n=0}^{\infty}B_n\right)\bigcap\mathbb{C}_+=\varnothing. \tag{12}$$

Тоді на підставі теореми 4 кожний розв'язок (11) рівняння (10) є обмеженим на $[0,+\infty)$, що суперечить нестійкості нульового розв'язку цього рівняння.

Отже, припущення про виконання співвідношення (12) є хибним.

Достатність. Нехай виконується співвідношення (5).

Зафіксуємо довільні невід'ємні числа $\Delta_n,\ n\geq 1,$ і розглянемо рівняння (3) та операторну функцію $P(z),$ що визначається рівностями

$$P(z)=zI-B_0-\sum_{n=1}^{\infty}e^{-z\Delta_n}B_n,\quad z\geq 0. \tag{13}$$

Завдяки (1) та самоспряженості операторів $B_n,\ n\geq 0,$ значення функції $P(z)$ при $z\in\in[0,+\infty)$ є самоспряженими операторами і ця функція є неперервною на $[0,+\infty)$. Тому неперервною на $[0,+\infty)$ є функція $\lambda_m(P(z))$.

Оскільки

$$\lambda_m(P(0))<0$$

на підставі (5) та (13) і

$$\lim_{z\to+\infty}\lambda_m(P(z))=+\infty$$

на підставі (13), то за теоремою Больцано–Коші [7] існує точка $z_0\in(0,+\infty)$ така, що

$$\lambda_m(P(z_0))=0.$$

Ця рівність означає, що

$$0\in\operatorname{Sp}P(z_0).$$

Покажемо що нульовий розв'язок рівняння (3) нестійкий.

За теоремою 3 існує послідовність нормованих векторів $a_m,\ m\geq 1,$ для якої

$$\lim_{m\to\infty}\|P(z_0)a_m\|_H=0. \tag{14}$$

Зафіксуємо довільні числа $\varepsilon\in(0,1)$ та $m\in\mathbb{N}$ і розглянемо додатне число $T(\varepsilon),$ для якого

$$\left|e^{z_0T(\varepsilon)}\right|=2. \tag{15}$$

Таке число існує, оскільки $z_0>0$. Позначимо через $x(t,\varepsilon a_m)$ неперервний розв'язок рівняння (3), що задовольняє умову

$$x(t,\varepsilon a_m)=e^{z_0t}\varepsilon a_m$$

для всіх $t\in[-\Delta,0),$ де $\Delta=\sup_{n\geq 1}\Delta_n,$ і розглянемо функцію

$$\delta_m(t)=x(t,\varepsilon a_m)-e^{z_0t}\varepsilon a_m. \tag{16}$$

Очевидно, що

$$\frac{d\delta_m(t)}{dt} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} B_n \delta_m(t-\Delta_n) - \varepsilon e^{z_0 t} P(z_0) a_m,$$

де $\Delta_0 = 0$. Звідси випливає, що

$$\delta_m(t) = \varepsilon \frac{1-e^{z_0 t}}{z_0} P(z_0) a_m + \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} B_n \delta_m(s-\Delta_n)\, ds, \quad t \geq 0.$$

Отже,

$$\max_{\tau\in[0,t]} \|\delta_m(\tau)\|_H \leq \frac{\varepsilon}{z_0} e^{z_0 t} \|P(z_0) a_m\|_H + \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \|B_n\|_{\mathrm{End}\, H} \max_{\tau\in[0,s]} \|\delta_m(\tau)\|_H\, ds, \quad t \geq 0,$$

і на підставі нерівності Гронуолла – Беллмана (див., наприклад, [8])

$$\max_{\tau\in[0,T(\varepsilon)]} \|\delta_m(\tau)\|_H \leq \left(\frac{\varepsilon}{z_0} e^{z_0 T(\varepsilon)} \|P(z_0) a_m\|_H\right) e^{T(\varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \|B_n\|_{\mathrm{End}\, H}}.$$

Звідси та зі співвідношення (14) отримуємо

$$\lim_{m\to\infty} \max_{\tau\in[0,T(\varepsilon)]} \|\delta_m(\tau)\|_H = 0.$$

Тому на підставі (15), (16)

$$\|x(T(\varepsilon), \varepsilon a_m)\|_H \geq 1$$

для досить великих $n \in \mathbb{N}$, що завдяки довільності вибору ε означає нестійкість нульового розв'язку рівняння (3). Із довільності вибору невід'ємних чисел Δ_n, $n \geq 1$, випливає абсолютна нестійкість нульового розв'язку цього рівняння.

Теорему 1 доведено.

***Зауваження* 1.** Якщо в рівнянні (3) операторні коефіцієнти не є самоспряженими, то твердження теореми 1 є хибним навіть тоді, коли $\dim H = 2$. Це підтверджується наступним прикладом.

***Приклад* 1.** Розглянемо систему двох скалярних диференціально-різницевих рівнянь

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = B_0 \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + B_1 \begin{pmatrix} x_1(t-\Delta) \\ x_2(t-\Delta) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \tag{17}$$

з довільним невід'ємним Δ, де

$$B_0 = B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що

$$\mathrm{Sp}\,(B_0 + B_1) = \{0\}, \tag{18}$$

тобто для (17) не виконується співвідношення (5). Однак нульовий розв'язок системи рівнянь (17) є абсолютно нестійким, оскільки векторні функції

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_1 t + c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

є розв'язками цієї системи для кожного $\Delta \geq 0$.

5. Доведення теореми 2. *Необхідність.* Нехай виконуються співвідношення (6), (7) і нульовий розв'язок рівняння (4) абсолютно нестійкий. Тоді цей розв'язок нестійкий і при $\Delta_n = 0$, $\tau_n = 0,\ n \geq 1$. У цьому випадку рівняння (4) набирає вигляду

$$\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) \frac{dx(t)}{dt} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n\right) x(t), \quad t \geq 0. \tag{19}$$

Завдяки нерівності (6) оператор $I + \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ має неперервний обернений $\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{-1}$ (див., наприклад, [9]) і

$$\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{-1} = I + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)^n. \tag{20}$$

Тому рівняння (19) рівносильне рівнянню

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n\right) x(t), \quad t \geq 0. \tag{21}$$

Завдяки (7), (20) оператор

$$\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n\right)$$

у рівнянні (21) є самоспряженим. Оскільки нульовий розв'язок рівняння (21) нестійкий, то за допомогою міркувань, що використовувалися при доведенні необхідності умов теореми 1, переконуємося, що виконується співвідношення

$$\mathbb{C}_+ \bigcap \mathrm{Sp} \left(\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \right) \neq \varnothing. \tag{22}$$

Із цього співвідношення випливає (5). Справді, на підставі (7), (20) самоспряжені оператори $\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{-1}$ і $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$ переставні (комутують) і на підставі (6)

$$\mathrm{Sp} \left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{-1} \subset (0, +\infty). \tag{23}$$

Оскільки для переставних операторів $\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{-1}$ і $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$

$$\mathrm{Sp} \left(\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \right) \subset \left\{ \lambda\mu : \lambda \in \mathrm{Sp} \left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{-1},\ \mu \in \mathrm{Sp} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \right\}$$

(див., наприклад, [9, с. 229, 230]), то завдяки (22), (23) виконується (5).

Достатність. Нехай виконуються співвідношення (5) – (7).

Покажемо, що нульовий розв'язок рівняння (4) абсолютно нестійкий.

Зафіксуємо довільні невід'ємні числа $\Delta_n,\ \tau_n,\ n \geq 1,$ і розглянемо рівняння (4) та операторну функцію $Q(z),$ що визначається рівностями

$$Q(z) = z\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-z\tau_n} A_n\right) - B_0 - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-z\Delta_n} B_n, \quad z \geq 0. \tag{24}$$

Завдяки (1) та самоспряженості операторів $A_n,\ n \geq 1$ і $B_n,\ n \geq 0,$ значення функції $Q(z)$ при $z \in [0, +\infty)$ є самоспряженими операторами і ця функція є неперервною на $[0, +\infty).$ Тому неперервною на $[0, +\infty)$ є функція $\lambda_m(Q(z)).$

Очевидно, що на підставі (5) та (24)

$$\lambda_m(Q(0)) < 0.$$

Також

$$\lim_{z \to +\infty} \lambda_m(Q(z)) = +\infty. \tag{25}$$

Справді, завдяки співвідношенням

$$\lambda_m(Q(z)) = \inf_{\|x\|_H = 1} \left(\left(z\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-z\tau_n} A_n\right) - B_0 - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-z\Delta_n} B_n \right) x, x \right) \geq$$

$$\geq \inf_{\|x\|_H = 1} \left(z\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-z\tau_n} A_n\right) x, x \right) - \sup_{\|x\|_H = 1} \left(\left(B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-z\Delta_n} B_n \right) x, x \right) \geq$$

$$\geq z - \sup_{\|x\|_H = 1} \left(z\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-z\tau_n} A_n\right) x, x \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \|B_n\|_{\operatorname{End} H} \geq$$

$$\geq z\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\|_{\operatorname{End} H}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} \|B_n\|_{\operatorname{End} H}, \quad z \in [0, +\infty),$$

та (6) виконується (25).

За теоремою Больцано – Коші існує точка $z_0 \in (0, +\infty)$ така, що

$$\lambda_m(Q(z_0)) = 0.$$

Ця рівність означає, що

$$0 \in \operatorname{Sp} Q(z_0). \tag{26}$$

Покажемо що нульовий розв'язок рівняння (4) нестійкий.

За теоремою 3 та (26) існує послідовність нормованих векторів $a_m,\ m \geq 1,$ для якої

$$\lim_{m \to \infty} \|Q(z_0) a_m\|_H = 0. \tag{27}$$

Розглянемо векторні функції $v_m = e^{z_0 t} a_m,\ m \geq 1.$ Ці функції є розв'язками відповідно рівнянь

$$\frac{dv(t)}{dt} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{dv(t-\tau_n)}{dt} - B_0 v(t) - \sum_{n=1}^{\infty} B_n v(t-\Delta_n) = e^{z_0 t} Q(z_0) a_m, \quad m \geq 1.$$

Далі розглянемо неперервно диференційовні на $[-\Delta, 0]$ $\big(\Delta = \sup_{n\geq 1} \Delta_n + \sup_{n\geq 1} \tau_n\big)$ функції $\varepsilon_m = \varepsilon_m(t),\ m \geq 1$, такі, що

$$\frac{d\varepsilon_m(0)}{dt} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{d\varepsilon_m(-\tau_n)}{dt} - B_0 \varepsilon_m(0) - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \varepsilon_m(-\Delta_n) = Q(z_0) a_m, \quad m \geq 1,$$

і

$$\lim_{m\to\infty} \left(\sup_{t\in[-\Delta,0]} \|\varepsilon_m(t)\|_H + \sup_{t\in[-\Delta,0]} \left\| \frac{d\varepsilon_m(t)}{dt} \right\|_H \right) = 0 \tag{28}$$

$\left(\text{тут } \dfrac{d\varepsilon_m(0)}{dt}\right.$ і $\dfrac{d\varepsilon_m(-\Delta)}{dt}$ означають похідні функції $\varepsilon_m(t)$ зліва і справа в точках 0 і $-\Delta$ відповідно$\Big)$. Функції з такими властивостями існують завдяки співвідношенням (6), (27) та лінійності рівняння (4).

Позначимо через $\gamma_m(t)$ розв'язок початкової задачі

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{d\gamma(t-\tau_n)}{dt} - B_0 \gamma(t) - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \gamma(t-\Delta_n) = e^{z_0 t} Q(z_0) a_m,$$

$$\gamma(\theta) = \varepsilon_m(\theta), \quad \theta \in [-\Delta, 0].$$

Тоді $v_m(t) - \gamma_m(t)$ — розв'язок рівняння (4).

Легко перевірити, використовуючи (27), (28), що

$$\lim_{m\to\infty} \left(\sup_{t\in[0,T]} \|\gamma_m(t)\|_H + \sup_{t\in[0,T]} \left\| \frac{d\gamma_m(t)}{dt} \right\|_H \right) = 0 \tag{29}$$

для кожного $T > 0$. Оскільки для розв'язків $v_m(t) - \gamma_m(t),\ m \geq 1$, рівняння (4), очевидно, справджуються співвідношення

$$e^{z_0 t} + \|\gamma_m(t)\|_H \geq \|e^{z_0 t} a_m - \gamma_m(t)\|_H \geq e^{z_0 t} - \|\gamma_m(t)\|_H$$

для всіх $m \geq 1$ і $t \geq 0$, то на підставі (29) і того, що $z_0 > 0$, нульовий розв'язок рівняння (4) нестійкий. Із довільності вибору в рівнянні (4) невід'ємних чисел $\Delta_n,\ \tau_n,\ n \geq 1$, випливає абсолютна нестійкість нульового розв'язку цього рівняння.

Теорему 2 доведено.

***Зауваження* 2.** Якщо для рівняння (4) не виконується вимога самоспряженості операторних коєфіцієнтів, то твердження теореми 2 є хибним, що підтверджується наступним прикладом.

***Приклад* 2.** Розглянемо систему диференціально-різницевих рівнянь

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} + A_1 \begin{pmatrix} x_1'(t-\tau) \\ x_2'(t-\tau) \end{pmatrix} = B_0 \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + B_1 \begin{pmatrix} x_1(t-\Delta) \\ x_2(t-\Delta) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \tag{30}$$

з довільними невід'ємними τ і Δ, де

$$A_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що для (30) виконуються співвідношення (6), (7) і (18).

Отже, для (30) співвідношення (5) не виконується. Однак нульовий розв'язок системи рівнянь (30) є абсолютно нестійким, оскільки векторні функції

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_1 t + c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

є розв'язками цієї системи для всіх невід'ємних τ і Δ.

6. Додаткові зауваження та літературні вказівки. Теореми 1 і 2 є новими. Вони аналогічні відповідним твердженням про необхідні та достатні умови абсолютної нестійкості розв'язків лінійних скалярних диференціально-різницевих рівнянь, отриманих автором в [1,10]. У цих працях також наведено достатні умови абсолютної нестійкості розв'язків лінійних систем диференціально-різницевих рівнянь запізнювального типу.

Достатні умови нестійкості розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі зі скінченним числом довільних неперервно залежних від часу запізнень отримано в [1].

Задача про абсолютну нестійкість розв'язків диференціально-різницевих рівнянь аналогічна задачі про абсолютну стійкість розв'язків диференціально-різницевих рівнянь, що розв'язувалася в [1, 11 – 22] та інших працях.

Застосування абсолютних стійкості та нестійкості розв'язків диференціально-різницевих рівнянь наведено в [1].

Література

1. *Слюсарчук В. Ю.* Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією. – Рівне: Вид-во Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, 2003. – 366 с.
2. *Слюсарчук В. Ю.* Нестійкість розв'язків еволюційних рівнянь. – Рівне: Вид-во Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, 2004. – 416 с.
3. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. – М.: Мир, 1965. – 571 с.
4. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
5. *Садовничий В. А.* Теория операторов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. – 368 с.
6. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 535 с.
7. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М: Наука, 1966. – Т. 1. – 608 с.
8. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А. А.* Устойчивость движения: метод сравнения. – Киев: Наук. думка, 1991. – 248 с.
9. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. – М.: Наука, 1968. – 664 с.
10. *Слюсарчук В. Ю.* Умови абсолютної нестійкості розв'язків диференціально-різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. – 2007. – **7**, № 3. – С. 430 – 436.
11. *Репин Ю. М.* Об условиях устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений при любых запаздываниях // Уч. зап. Урал. ун-та. – 1960. – **23**. – С. 34 – 41.
12. *Гоздек В. С.* О галопировании тележек шасси при движении самолета по грунтовому аэродрому // Инж. журн. – 1965. – Вып. 4. – С. 743 – 745.
13. *Животовский Л. А.* Абсолютная устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями // Тр. семинара по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом. – 1969. – **23**. – С. 919 – 928.

14. *Слюсарчук В. Е.* Достаточные условия абсолютной асимптотической устойчивости линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с несколькими запаздываниями // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 6. – С. 919 – 923.
15. *Слюсарчук В. Е.* Об абсолютной устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с запаздываниями // Мат. заметки. – 1975. – **18**, № 2. – С. 161 – 165.
16. *Слюсарчук В. Е.* Абсолютная асимптотическая устойчивость линейных дифференциальных уравнений с бесконечным числом запаздываний в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. – 1976. – **12**, № 5. – С. 840 – 847.
17. *Слюсарчук В. Е.* К вопросу об устойчивости решений бесконечных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1976. – **12**, № 11. – С. 2019 – 2026.
18. *Слюсарчук В. Е.* К вопросу об абсолютной устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений запаздывающего типа в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 8. – С. 1526 – 1528.
19. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия абсолютной экспоненциальной устойчивости решений линейных скалярных дифференциальных уравнений нейтрального типа // Проблемы современной теории периодических движений. – 1982. – № 6. – С. 19 – 24.
20. *Слюсарчук В. Е.* Абсолютно устойчивые системы с запаздыванием // Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 8. – С. 1364 – 1373.
21. *Кореневский Д. Г.* Коэффициентный критерий абсолютной (не зависящей от отклонения аргумента) устойчивости систем линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1989. – Вып. 12. – С. 16 – 22.
22. *Kovalev A. M., Martynyuk A. A., Boichuk O. A., Mazko A. G., Petryshyn R. I., Slyusarchuk V. Ye., Zuyev A. L., Slyn'ko V. I.* Novel qualitative methods of nonlinear mechanics and their application to the analysis of multifrequency oscillations, stability and control problems // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. – 2009. – **9**, № 2. – P. 117 – 145.

Одержано 20.07.16