УДК 512.61

Н. А. Варенюк, Е. Ф. Галба, И. В. Сергиенко, А. Н. Химич
(Ин-т кибернетики НАН Украины, Киев)

ВЗВЕШЕННАЯ ПСЕВДОИНВЕРСИЯ С ИНДЕФИНИТНЫМИ ВЕСАМИ

We present the definition of weighted pseudoinverse matrices with nonsingular indefinite weights and study these matrices. The theorems on existence and uniqueness for these matrices are proved. Weighted pseudoinverse matrices with indefinite weights are represented in terms of the coefficients of characteristic polynomials of symmetrizable matrices. The decompositions of weighted pseudoinverse matrices into matrix power series and products and their limit representations are obtained. We also propose regularized iterative methods for the determination of these matrices.

Наведено означення зваженої псевдооберненої матриці з невиродженими знаконевизначеними вагами та проведено її дослідження. Доведено теорему про існування та єдиність цієї матриці. Наведено зображення зважених псевдообернених матриць з індефінітними вагами у термінах коефіцієнтів характеристичних многочленів матриць, які симетризуються, отримано розклади зважених псевдообернених матриць у матричні степеневі ряди і добутки, граничні зображення цих матриць; побудовано регуляризовані ітераційні методи для їх обчислення.

1. Введение. Определение взвешенной псевдообратной матрицы с положительно определенными весами впервые было дано в работе [1]. В работе [2] введено понятие косой псевдообратной матрицы. В [3] показано, что множество взвешенных псевдообратных матриц, определенных в [1], совпадает с множеством косых псевдообратных матриц, определенных в [2]. В работе [4] дано определение взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами (с положительно полуопределенными весовыми матрицами). Там же определены необходимые и достаточные условия существования рассмотренного варианта псевдообратных матриц с вырожденными весами. В работах [5 – 7] исследованы другие варианты псевдообратных матриц с вырожденными весами. Определены необходимые и достаточные условия существования рассмотренных псевдообратных матриц с вырожденными весами. Там же определены взвешенные нормальные псевдорешения с вырожденными весами и установлена их связь со взвешенными псевдообратными матрицами. В работе [8] введено понятие ML-взвешенной псевдообратной матрицы. Отметим работы [9, 10], в которых используется взвешенная псевдоинверсия с вырожденными весами, когда веса — диагональные матрицы, при построении итерационных методов для решения линейных задач.

В настоящей работе определяется и исследуется взвешенная псевдообратная матрица с невырожденными знаконеопределенными весами. Во втором пункте приведены необходимые для дальнейшего изложения обозначения, определения и известные факты, а также установлены вспомогательные утверждения. Определены взвешенные матричные нормы с индефинитными весами, установлены неравенства для норм произведения матриц, показано, что симметризуемая слева положительно определенным симметризатором матрица диагонализуема с помощью взвешенного ортогонального преобразования. В пункте 3 доказана теорема существования и единственности предложенного варианта взвешенной псевдообратной матрицы с невырожденными индефинитными весами. При доказательстве использована теорема Гамильтона – Кэли, на основании чего получено представление взвешенной псевдообратной матрицы с индефинитными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц. В пункте 4 на основе свойств симметризуемых матриц и представления псевдообратных матриц в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц получены и исследованы разложения взвешенных псевдообратных матриц с положительно определенным и индефинитным весами в матричные степенные ряды и произведения. На основе этих разложений получены предельные представления взвешенных псевдообратных матриц с этими весами. В пункте 5 построены регуляризованные итерационные методы для вычисления взвешенных псевдообратных матриц.

2. Обозначения, определения, известные факты и вспомогательные утверждения. Обозначим через $\mathbb{R}^n$ n-мерное векторное пространство над полем действительных чисел, где векторы суть матрицы размера $n\times 1$. Пусть H — симметричная положительно определенная, положительно полуопределенная или же знаконеопределенная матрица. В $\mathbb{R}^n$ введем скалярное произведение по формуле $(u, v)_H = (Hu, v)_E$, где $(u, v)_E = u^T v$, E — единичная матрица. Если метрическая матрица H положительно определенная или положительно полуопределенная, то обычным образом можно нормировать пространство $\mathbb{R}^n$, положив $\|u\|_H = (u, u)_H^{1/2}$. В первом случае функция $\|u\|_H$ будет определять норму, а во втором — полунорму.

Отметим, что исследованию n-мерных векторных пространств со знаконеопределенной метрикой (со знаконеопределенным скалярным произведением) уделено значительно меньше внимания, чем с положительно определенной и неотрицательной метрикой. Исследования этих пространств можно найти в работе [11] и монографиях [12, 13], а вопросы их приложения — в монографии [14] и работах [15, 16].

Определим взвешенную норму прямоугольной матрицы с симметричными невырожденными весовыми матрицами. Пусть $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, а $H = H^T\in\mathbb{R}^{m\times m}$ и $V = V^T\in\mathbb{R}^{n\times n}$ — невырожденные матрицы. Для множества матриц A норму введем соотношением

$$\|A\|_{HV} = \sup_{x\neq 0}\frac{\|AVx\|_{H^2}}{\|x\|_{E_n}} = \sup_{x\neq 0}\frac{\|HAVx\|_{E_m}}{\|x\|_{E_n}} = \sup_{x\neq 0}\frac{\left(VA^T H^2 AVx, x\right)_{E_m}^{1/2}}{\|x\|_{E_n}}, \tag{2.1}$$

где $x\in\mathbb{R}^n$, а нижний индекс при единичной матрице означает ее порядок.

Из (2.1) имеем $\left(VA^T H^2 AVx, x\right)_{E_m} = \left((HAV)^T HAVx, x\right) = \|HAVx\|_E^2 \geq 0$ при $x\neq 0$, откуда следует неотрицательность собственных значений матрицы $VA^T H^2 AV$ и тем самым существование неотрицательных квадратных корней из собственных значений этой матрицы. Тогда взвешенная спектральная норма (2.1) матрицы A определяется формулой

$$\|A\|_{HV} = \left[\lambda_{\max}(VA^T H^2 AV)\right]^{1/2}, \tag{2.2}$$

где $\lambda_{\max}(L)$ — максимальное собственное значение матрицы L.

Из (2.2) следует выполнение первой аксиомы матричных норм (положительность), а при $H = E_m$, $V = E_n$ функция (2.1) определяет обычную спектральную норму матрицы A.

Лемма 2.1. *Пусть* $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, *а* $H = H^T\in\mathbb{R}^{m\times m}$ *и* $V = V^T\in\mathbb{R}^{n\times n}$ *— невырожденные матрицы. Тогда функция* (2.1) *является аддитивной* (*обобщенной*) *матричной нормой.*

Доказательство. Выше отмечено, что для функции (2.1) выполняется первая аксиома матричных норм. Очевидно, что в силу определения матричной нормы формулой (2.1) вторая аксиома матричных норм (абсолютная однородность) также выполняется. Покажем, что выполняется и третья аксиома матричных норм (неравенство треугольника). На основании (2.1) имеем

$$||A+B||_{HV}^2 = \left[\sup_{x\neq 0} \frac{||H(A+B)Vx||_{E_m}}{||x||_{E_n}} \right]^2 =$$

$$= \left[\sup_{x\neq 0} \frac{\left(V(A+B)^T H^2 (A+B)Vx, x \right)_{E_m}^{1/2}}{||x||_{E_n}} \right]^2 =$$

$$= \left[\sup_{x\neq 0} \frac{\left[\left(VA^T H^2 AVx, x \right)_{E_m} + \left(VB^T H^2 BVx, x \right)_{E_m} + \left(VA^T H^2 BVx, x \right)_{E_m} + \left(VB^T H^2 AVx, x \right)_{E_m} \right]^{1/2}}{||x||_{E_n}} \right]^2 =$$

$$= \sup_{x\neq 0} \left[\frac{||HAVx||_{E_m}^2}{||x||_{E_n}^2} + \frac{||HBVx||_{E_m}^2}{||x||_{E_n}^2} + 2\frac{(HAVx, HBVx)_{E_m}}{||x||_{E_n}^2} \right] \leq$$

$$\leq \left(\sup_{x\neq 0} \frac{||HAVx||_{E_m}}{||x||_{E_n}} + \sup_{x\neq 0} \frac{||HBVx||_{E_m}}{||x||_{E_n}} \right)^2 = \left(||A||_{HV} + ||B||_{HV} \right)^2,$$

т. е. $||A+B||_{HV} \leq ||A||_{HV} + ||B||_{HV}$, что и требовалось показать.

Таким образом, выполняются три аксиомы матричных норм (кроме кольцевого свойства), откуда и следует утверждение леммы 2.1.

Лемма 2.2. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$, *а* $H \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *и* $M \in \mathbb{R}^{p\times p}$ *— симметричные невырожденные матрицы. Тогда справедливы соотношения*

$$||AB||_{HV} \leq ||A||_{HM} ||B||_{M^{-1}V}, \qquad ||AB||_{HV} \leq ||A||_{HM^{-1}} ||B||_{MV}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть $K = MA^T H^2 AM$, $L = M^{-1}BV$, тогда $L^T KL = V(AB)^T H^2 ABV$, $L^T L = VB^T M^{-2} BV$, и в силу определения нормы формулой (2.1) имеем

$$||AB||_{HV} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{(KLx, Lx)_{E_m}^{1/2}}{||x||_{E_n}} =$$

$$= \sup_{x\neq 0} \frac{(KLx, Lx)_{E_m}^{1/2}}{(Lx, Lx)_{En}^{1/2}} \frac{(Lx, Lx)_{E_m}^{1/2}}{||x||_{E_n}} \leq \sup_{y\neq 0} \frac{(Ky, y)_{E_m}^{1/2}}{||y||_{E_n}} \sup_{x\neq 0} \frac{(Lx, Lx)_{E_m}^{1/2}}{||x||_{E_n}} =$$

$$= \sup_{y\neq 0} \frac{\left(MA^T H^2 AMy,\, y\right)_{E_m}^{1/2}}{\|y\|_{E_n}} \sup_{x\neq 0} \frac{\left(VB^T M^{-2} BVx,\, x\right)_{E_m}^{1/2}}{\|x\|_{E_n}} = \|A\|_{HM} \|B\|_{M^{-1}V},$$

т. е. получили первое соотношение в (2.3).

Аналогично, положив $K = M^{-1}A^T H^2 AM^{-1}$, $L = MBV$, получим второе соотношение в (2.3), т. е. утверждение леммы 2.2.

При доказательстве теоремы существования единственной взвешенной псевдообратной матрицы с индефинитными весами будем использовать следующее утверждение [5].

Лемма 2.3. *Пусть для квадратных матриц* K, L, M *выполняются условия* $KM = MK$, $LM = ML$. *Тогда из равенства* $KM^2 = LM^2$ *следует равенство* $KM = LM$.

Лемма 2.4. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *а* $B = B^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *и* $C^{-1} = (C^{-1})^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *— невырожденные знаконеопределенные матрицы и выполняется условие* $\mathrm{rk}(A^T BA) = \mathrm{rk}(AC^{-1}A^T) = \mathrm{rk}(A)$. *Тогда ранги матриц* A *и* $A^T BAC^{-1}A^T$ *совпадают.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что в силу того, что B и C — невырожденные матрицы, следует

$$\mathrm{rk}\left(A^T B\right) = \mathrm{rk}(BA) = \mathrm{rk}(AC) = \mathrm{rk}(A^T) = \mathrm{rk}(A). \tag{2.4}$$

При доказательстве леммы 2.4 будем использовать неравенство Фробениуса [17]

$$\mathrm{rk}(PQ) + \mathrm{rk}(QL) \le \mathrm{rk}(Q) + \mathrm{rk}(PQL), \tag{2.5}$$

справедливое для всех тех матриц P, Q, L, для которых определено произведение PQL.

На основании (2.5) имеем

$$\mathrm{rk}\left(A^T BA\right) + \mathrm{rk}\left(BAC^{-1}A^T\right) \le \mathrm{rk}(BA) + \mathrm{rk}\left(A^T BAC^{-1}A^T\right). \tag{2.6}$$

Учитывая (2.4) и одно из условий леммы 2.4, а именно равенство $\mathrm{rk}(A^T BA) = \mathrm{rk}(A)$, из (2.6) получаем

$$\mathrm{rk}\left(BAC^{-1}A^T\right) \le \mathrm{rk}\left(A^T BAC^{-1}A^T\right). \tag{2.7}$$

Далее, в силу неравенства Фробениуса (2.5) выполняется неравенство

$$\mathrm{rk}(BA) + \mathrm{rk}\left(AC^{-1}A^T\right) \le \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}\left(BAC^{-1}A^T\right). \tag{2.8}$$

В силу второго условия леммы 2.4, а именно равенства $\mathrm{rk}\left(AC^{-1}A^T\right) = \mathrm{rk}(A)$, а также соотношений (2.4) и очевидного неравенства $\mathrm{rk}\left(BAC^{-1}A^T\right) \le \mathrm{rk}(A)$, из (2.8) имеем $\mathrm{rk}\left(BAC^{-1}A^T\right) = \mathrm{rk}(A)$. Учитывая это равенство и очевидное соотношение $\mathrm{rk}\left(A^T BAC^{-1}A^T\right) \le \mathrm{rk}(A)$, на основании (2.7) получаем $\mathrm{rk}\left(A^T BAC^{-1}A^T\right) = \mathrm{rk}(A)$, т. е. утверждение леммы 2.4.

При разложении взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные произведения будем использовать следующие утверждения [18].

Лемма 2.5. *Для любых матриц* $(P+\delta E)^{-k} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $W \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *и действительного числа* $-\infty < \delta < \infty$ *имеет место тождество*

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left\{E+\delta^{2^k}(P+\delta E)^{-(2^k)}\right\}(P+\delta E)^{-1}W = \sum_{k=1}^{2^n}\delta^{k-1}(P+\delta E)^{-k}W, \quad n=1,2,\ldots . \tag{2.9}$$

Лемма 2.6. *Для любых матриц* $(L+\delta E)^{-k} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *и действительного числа* $-\infty < \delta < \infty$ *имеет место тождество*

$$M(L+\delta E)^{-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left\{E+\delta^{2^k}(L+\delta E)^{-(2^k)}\right\} = M\sum_{k=1}^{2^n}\delta^{k-1}(L+\delta E)^{-k}, \quad n=1,2,\ldots . \tag{2.10}$$

Определение 2.1. *Вещественную матрицу* U *будем называть симметризуемой слева или справа, если существует такая симметричная невырожденная матрица* H, *что выполняются соответственно равенства* $HU = U^T H$, $UH = HU^T$.

Определение 2.2. *Квадратную вещественную матрицу* Q *будем называть* H*-взвешенной ортогональной (ортогональной с весом* H*), если выполняется условие* $Q^T HQ = E$, *где* H *— симметричная положительно определенная матрица.*

В ряде работ определялись симметризуемые матрицы и изучались их свойства. В качестве симметризаторов, в основном, используются симметричные положительно определенные матрицы, а в работах [13, 14, 19, 20] изучались H-самосопряженные матрицы, где H предполагается симметричной невырожденной знаконеопределенной матрицей. Имеет место следующая лемма.

Лемма 2.7. *Симметризуемая слева положительно определенным симметризатором* H *матрица* U *может быть приведена к диагональной форме с помощью* H*-взвешенного ортогонального преобразования, т. е. существует такая* H*-взвешенная ортогональная матрица* Q, *что*

$$Q^T HUQ = \Lambda, \tag{2.11}$$

и матрица U *представима в виде*

$$U = Q\Lambda Q^T H, \tag{2.12}$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i)$, λ_i *— собственные значения матрицы* U, *а столбцы матрицы* Q *образуют полную систему собственных векторов матрицы* U.

Доказательство. Пусть U — симметризуемая слева положительно определенным симметризатором H матрица, а Q_1 — H-взвешенная ортогональная матрица. Тогда $W = Q_1^T HUQ_1$ — симметричная матрица. Известно (см., например, [17]), что действительная симметричная матрица может быть приведена к диагональному виду с помощью обычного ортогонального преобразования. Пусть Q_2 — ортогональная матрица, которая приводит матрицу W к диагональному виду, т. е. $Q_2^T W Q_2 = Q_2^T Q_1^T HUQ_1Q_2 = \Lambda$, где $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i)$, λ_i — собственные значения матрицы W.

Обозначим $Q = Q_1Q_2$, тогда выполняется равенство

$$Q^T HQ \ = \ E\,, \tag{2.13}$$

т. е. Q — H-взвешенная ортогональная матрица, так что $Q^T HUQ = \Lambda$, т. е. имеет место формула (2.11). Учитывая (2.13), из (2.11) получаем (2.12).

В силу (2.13) из (2.11) имеем $Q^{-1}UQ = \Lambda$, так что симметризуемая слева матрица U является диагонализуемой преобразованием подобия матрицей (матрицей простой структуры) и, следовательно [17], столбцы матрицы Q образуют полную систему собственных векторов матрицы U, а диагональные элементы матрицы Λ совпадают с соответствующими собственными значениями матрицы U.

Лемма 2.7 доказана.

3. Теорема существования и единственности. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$, а $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симметричные знаконеопределенные невырожденные матрицы. Взвешенную псевдобратную матрицу к матрице A определим как матрицу, удовлетворяющую системе матричных уравнений

$$AXA \ = \ A\,, \quad XAX \ = \ X\,, \quad (BAX)^T \ = \ BAX\,, \quad (CXA)^T \ = \ CXA \tag{3.1}$$

при выполнении условий

$$\mathrm{rk}(A^T BA) \ = \ \mathrm{rk}(A)\,, \quad \mathrm{rk}(AC^{-1}A^T) \ = \ \mathrm{rk}(A)\,. \tag{3.2}$$

В этом пункте установлено существование единственного решения задачи (3.1), (3.2), а также получено представление взвешенной псевдообратной матрицы с индефинитными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц.

Теорема 3.1. *Система матричных уравнений* (3.1) *при выполнении условий* (3.2) *имеет единственное решение* $X = A_{BC}^{+}$, *причем матрица* A_{BC}^{+} *представима в виде*

$$A_{BC}^{+} \ = \ C^{-1}SA^T B\,, \tag{3.3}$$

где $S = f(A^T BAC^{-1})$ *— многочлен от матрицы* $A^T BAC^{-1}$ *вида*

$$S \ = \ -\alpha_k^{-1}\left[\left(A^T BAC^{-1}\right)^{k-1} + \alpha_1\left(A^T BAC^{-1}\right)^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1}E\right],$$

α_p, $p = 1,\ldots,n$, *— коэффициенты характеристического многочлена*

$$f(\lambda) \ = \ \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n \ = \ \det\left[\lambda E - A^T BAC^{-1}\right],$$

а α_k *— последний отличный от нуля коэффициент этого многочлена,* E *— единичная матрица.*

Доказательство. Сначала покажем, что матрица, определенная формулой (3.3), удовлетворяет системе (3.1), если существует матрица S, удовлетворяющая условиям

$$SA^TBAC^{-1}A^T = A^T, \quad SA^TBAC^{-1} = A^TBAC^{-1}S, \quad C^{-1}S = (C^{-1}S)^T. \tag{3.4}$$

Матрица A^+_{BC} удовлетворяет первому уравнению в (3.1) при выполнении условий (3.4). Действительно, учитывая второе и третье условия в (3.4), первое условие в (3.4) можно записать в виде $A^TBAC^{-1}SA^T = A^T$, $AS^TC^{-1}A^TBA = A$, $AC^{-1}SA^TBA = A$, откуда в силу представления A^+_{BC} формулой (3.3) и следует утверждение.

Чтобы показать, что матрица A^+_{BC} удовлетворяет второму уравнению в (3.1), умножим первое уравнение в (3.4) слева на $C^{-1}S$, а справа на B. Учитывая второе условие в (3.4) и представление A^+_{BC} (3.3), получаем

$$C^{-1}S^2A^TBAC^{-1}A^TB = C^{-1}SA^TB, \quad C^{-1}SA^TBAC^{-1}SA^TB = A^+_{BC}, \quad A^+_{BC}AA^+_{BC} = A^+_{BC},$$

т. е. матрица A^+_{BC}, определенная формулой (3.3), удовлетворяет второму уравнению в (3.1).

Далее, подставляя в третье уравнение из (3.1) представление для A^+_{BC} из (3.3), с учетом третьего условия в (3.4) имеем $BAC^{-1}SA^TB = BAS^TC^{-1}A^TB = (BAC^{-1}SA^TB)^T$, т. е. BAA^+_{BC} является симметричной матрицей и, следовательно, A^+_{BC} удовлетворяет третьему уравнению в (3.1).

Наконец, подставляя в четвертое уравнение из (3.1) представление для A^+_{BC} из (3.3) и учитывая второе и третье условия в (3.4), получаем

$$CC^{-1}SA^TBAC^{-1}C = CC^{-1}A^TBAC^{-1}SC =$$

$$= CC^{-1}A^TBAS^TC^{-1}C = A^TBAS^T = (SA^TBA)^T,$$

так что $CA^+_{BC}A$ является симметричной матрицей, т. е. удовлетворяет четвертому условию в (3.1).

Теперь покажем, что существует матрица S, которая удовлетворяет равенствам (3.4) при выполнении условий (3.2). Для этого используем теорему Гамильтона – Кэли, согласно которой любая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению. Поскольку $A^TBAC^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, то справедливо равенство

$$\left(A^TBAC^{-1}\right)^n + \alpha_1\left(A^TBAC^{-1}\right)^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}A^TBAC^{-1} + \alpha_nE = 0. \tag{3.5}$$

Пусть матрица A^TBAC^{-1} невырожденная, и, следовательно, имеет обратную. Тогда $\alpha_n \neq 0$ и можно было бы положить $S = \left(A^TBAC^{-1}\right)^{-1}$. Легко проверить, что такая матрица удовлетворяет условиям (3.4). Но в общем случае матрица $A^T BAC^{-1}$ является вырожденной и, следовательно, $\alpha_n = 0$. Пусть среди коэффициентов α_p, $p = 1, 2, \ldots, n-1$, α_k будет последний отличный от нуля коэффициент полинома $f(\lambda) = \det\left[\lambda E - A^T BAC^{-1}\right]$ и

$$S = -\alpha_k^{-1}\left[\left(A^T BAC^{-1}\right)^{k-1} + \alpha_1\left(A^T BAC^{-1}\right)^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1}E\right]. \tag{3.6}$$

Из вида матрицы S, определенной формулой (3.6), следует, что для нее выполняются второе и третье условия в (3.4). Покажем, что для матрицы S выполняется первое условие в (3.4).

Учитывая (3.6), из (3.5) получаем

$$S\left(A^T BAC^{-1}\right)^{n-k+1} = \left(A^T BAC^{-1}\right)^{n-k}. \tag{3.7}$$

В силу леммы 2.3 из (3.7) имеем

$$S\left(A^T BAC^{-1}\right)^2 = A^T BAC^{-1},$$

откуда, умножая справа обе части этого равенства на A с учетом второго равенства в (3.4), получаем

$$A^T BAC^{-1} A^T BAC^{-1} SA^T = A^T BAC^{-1}. \tag{3.8}$$

Поскольку матрицы B и C^{-1} невырожденные, то матрицы $A^T B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $AC^{-1} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и A^T имеют тот же ранг, что и матрица A, который положим равным r. А в силу леммы 2.4 ранг матрицы $A^T BAC^{-1}A^T$ при выполнении условий (3.2) также равен r.

Чтобы показать, что из равенства (3.8) следует первое равенство в (3.4), используем скелетное разложение матриц (см. [17, 21]) $A^T B$, AC^{-1} и A^T, т. е. представим их в виде $A^T B = KL$, $AC^{-1} = MN$, $A^T = PQ$, где $K \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $L \in \mathbb{R}^{r\times m}$, $M \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $N \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $P \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $Q \in \mathbb{R}^{r\times m}$ — матрицы полного ранга. Тогда (3.8) примет вид

$$KLMNPQBAC^{-1}SA^T = KLMNPQ. \tag{3.9}$$

Матрица $K^T K$ невырождена, поскольку K — матрица полного ранга с $n \ge r$ (см. [21]). Умножим равенство (3.9) слева сначала на K^T, а потом на $(K^T K)^{-1}$. В результате получим

$$LMNPQBAC^{-1}SA^T = LMNPQ. \tag{3.10}$$

Матрицы LM и NP — квадратные, невырожденные ранга r.

Действительно, ранг этих матриц равен r, поскольку из леммы 2.4 следует, что ранг матрицы $KLMNPQ = A^T BAC^{-1}A^T$ при выполнении условий (3.2) равен r. Но ранг матрицы-произведения не может превышать ранги матриц-сомножителей, а ранги матриц-сомножителей LM и NP не смогут превышать r, поскольку r — порядок этих матриц.

Умножим равенство (3.10) слева сначала на $(LM)^{-1}$, а затем на $(NP)^{-1}$. В результате получим

$$QBAC^{-1}SA^T = Q. \tag{3.11}$$

Теперь, умножая слева (3.11) на P и используя второе равенство из (3.4), получаем первое равенство в (3.4).

Таким образом, показано, что решение системы матричных уравнений (3.1) при выполнении условий (3.2) существует, причем оно представимо формулой (3.3). Покажем, что это представление единственно, т. е. существует единственная взвешенная псевдообратная матрица с невырожденными знаконеопределенными весами, определенная системой (3.1) при выполнении условий (3.2). Доказательство проведем от противного.

Предположим, что кроме матрицы S существует еще матрица S_1, удовлетворяющая (3.3). Пусть 0 — нулевая матрица и $\tilde{S} = S - S_1$. Тогда $C^{-1}\tilde{S}A^T B = 0$. Умножим это равенство слева на C, а справа на $AC^{-1}A^T$. Тогда, учитывая первое равенство в (3.4), получаем $\tilde{S}A^T BAC^{-1}A^T = A^T = 0$. Последнее равенство возможно, когда матрица $\tilde{S}$ или A нулевая. Если $\tilde{S}$ — нулевая матрица, то матрица S в (3.3) и, следовательно, матрица A^+_{BC} определяются единственным образом. Если A — нулевая матрица, то из (3.3) следует, что взвешенная псевдообратная матрица с невырожденными знаконеопределенными весами будет нулевой. В последнем также можно убедиться непосредственной проверкой условий (3.1), (3.2).

Теорема 3.1 доказана.

***Следствие* 3.1.** *Взвешенная псевдообратная матрица со знаконеопределенными весами, определенная системой матричных уравнений* (3.1) *при выполнении условий* (3.2), *имеет также представления* $A^+_{BC} = S_1C^{-1}A^T B = C^{-1}A^T BS_2 = C^{-1}A^T S_3B$, *где* S_1, S_2, S_3 *— многочлены от симметризуемых матриц вида*

$$S_1 = -\alpha_k^{-1}\left[\left(C^{-1}A^T BA\right)^{k-1} + \alpha_1\left(C^{-1}A^T BA\right)^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1}E\right],$$

$$S_2 = -\alpha_k^{-1}\left[\left(AC^{-1}A^T B\right)^{k-1} + \alpha_1\left(AC^{-1}A^T B\right)^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1}E\right],$$

$$S_3 = -\alpha_k^{-1}\left[\left(BAC^{-1}A^T\right)^{k-1} + \alpha_1\left(BAC^{-1}A^T\right)^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1}E\right].$$

***Следствие* 3.2.** *Симметризуемые идемпотентные матрицы* $A^+_{BC}A$ *и* AA^+_{BC} *имеют следующие представления*:

$$A^+_{BC}A = C^{-1}SA^T BA = f\left(C^{-1}A^T BA\right) =$$

$$= -\alpha_k^{-1}\left[\left(C^{-1}A^T BA\right)^k + \alpha_1\left(C^{-1}A^T BA\right)^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1}\left(C^{-1}A^T BA\right)\right],$$

$$AA_{BC}^{+} = AC^{-1}SA^TB = f\left(AC^{-1}A^TB\right) =$$

$$= -\alpha_k^{-1}\left[\left(AC^{-1}A^TB\right)^k + \alpha_1\left(AC^{-1}A^TB\right)^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1}\left(AC^{-1}A^TB\right)\right].$$

***Следствие* 3.3.** *Имеют место равенства* $A^TBAA_{BC}^{+} = A^TB$, $A_{BC}^{+}AC^{-1}A^T = C^{-1}A^T$.

***Следствие* 3.4.** *При* $\mathrm{rk}(A) = 1$ *справедлива формула* $A_{BC}^{+} = \left[\mathrm{tr}\left(A^TBAC^{-1}\right)\right]^{-1}C^{-1}A^TB$ *для вычисления взвешенных псевдообратных матриц со знаконеопределенными весами*, *где* $\mathrm{tr}(L)$ — *след матрицы* L.

Из представления взвешенной псевдообратной матрицы с индефинитными весами формулой (3.3) следуют соответствующее представление взвешенной псевдообратной матрицы с положительно определенными весами, полученное в работе [22], и псевдообратной матрицы Мура – Пенроуза, полученное в работе [23], где описана вычислительная процедура, позволяющая на основе представления псевдообратной матрицы Мура – Пенроуза в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметричных матриц A^TA вычислять эту матрицу за приемлемое число операций. Представление взвешенной псевдообратной матрицы с индефинитными весами (3.3) в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц используется в следующем пункте при обосновании разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и произведения.

4. Разложение взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и произведения. В настоящем пункте на основе представления взвешенной псевдообратной матрицы со знаконеопределенными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц и утверждений лемм из пункта 2 обоснуем разложение взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения, когда обе весовые матрицы симметричные, причем одна из них положительно определена, а вторая является невырожденной знаконеопределенной. Отметим, что эти задачи являются частным случаем задачи (3.1), (3.2). Поэтому теорема 3.1 для них справедлива. Сначала рассмотрим случай, когда матрица C положительно определена, а B является знаконеопределенной, т. е. обоснуем разложение взвешенных псевдообратных матриц, удовлетворяющих системе матричных уравнений

$$AXA = A,\ XAX = X,\quad (BAX)^T = BAX,\quad (CXA)^T = CXA \tag{4.1}$$

при выполнении условия

$$\mathrm{rk}\left(A^TBA\right) = \mathrm{rk}(A). \tag{4.2}$$

Теорема 4.1. *Для произвольной матрицы* $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *симметричной знаконеопределенной невырожденной матрицы* $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, *симметричной положительно определенной матрицы* $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *и действительного числа* δ, *удовлетворяющего условию*

$$0 < |\delta| < \frac{1}{2}\mu\left(C^{-1}A^TBA\right), \tag{4.3}$$

имеют место соотношения

$$A^+_{BC} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} \left(C^{-1}A^T BA + \delta E \right)^{-k} C^{-1}A^T B , \tag{4.4}$$

$$\left\| A^+_{BC} - A^+_{\delta,p} \right\|_{C^{1/2}V} \le |\delta|^p \left(\mu\left(C^{-1}A^T BA \right) - |\delta| \right)^{-p} \left\| A^+_{BC} \right\|_{C^{1/2}V} , \tag{4.5}$$

где A^+_{BC} *— взвешенная псевдообратная матрица, удовлетворяющая условиям* (4.1), (4.2),

$$A^+_{\delta,p} = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} \left(C^{-1}A^T BA + \delta E \right)^{-k} C^{-1}A^T B , \quad p = 1, 2, \ldots , \qquad \mu(L) = \min\left\{ |\lambda| : \lambda \ne 0 \in \sigma(L) \right\},$$

λ_i *— собственные значения матрицы* $C^{-1}A^T BA$, $V = V^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *— любая невырожденная матрица.*

Доказательство. Докажем равенство (4.4). Пусть $L = C^{-1}A^T BA$. Матрица L в общем случае знаконеопределенная вырожденная, поскольку она представляет собой произведение симметричных положительно определенной матрицы C^{-1} и знаконеопределенной матрицы $A^T BA$, и согласно [17] такая матрица имеет такое же число положительных, отрицательных и нулевых собственных значений, как и матрица $A^T BA$. Матрица L симметризуемая слева положительно определенным симметризатором C, а справа симметризатором C^{-1}. В силу условия (4.3) матрица $L + \delta E$ невырожденная симметризуемая слева симметризатором C, а справа симметризатором C^{-1}. Тогда $(L + \delta E)^{-1}$ существует, $(L + \delta E)C^{-1}$, $\left((L + \delta E)C^{-1} \right)^{-1}$, $C(L + \delta E)^{-1}$ — симметричные матрицы и, следовательно, $(L + \delta E)^{-1}$ симметризуемая слева положительно определенным симметризатором C матрица. Нетрудно убедиться, что $(L + \delta E)^{-k}$, $k = 1, 2, \ldots$, — симметризуемые слева симметризатором C матрицы. Поэтому для них справедлива лемма 2.7. Обозначим через $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots , n$, собственные значения матрицы L. Пусть Q — C-взвешенная ортогональная матрица, которая приводит матрицы L, $(L + \delta E)^{-k}$ к диагональному виду. Рассмотрим одно из слагаемых ряда (4.4). В силу леммы 2.7 (формулы (2.11), (2.12)) с учетом формул (3.3), (3.4) получим

$$\delta^{k-1}(L + \delta E)^{-k} C^{-1}A^T B = \delta^{k-1}(L + \delta E)^{-k} C^{-1}SA^T BAC^{-1}A^T B =$$

$$= \delta^{k-1}(L + \delta E)^{-k} C^{-1}A^T BAC^{-1}A^T BAC^{-1}S^2A^T B = \delta^{k-1}(L + \delta E)^{-k} L^2C^{-1}S^2A^T B =$$

$$= \delta^{k-1}Q(\Lambda + \delta E)^{-k} Q^T CQ\Lambda^2Q^T CC^{-1}S^2A^T B = \delta^{-1}Q\delta^k (\Lambda + \delta E)^{-k} \Lambda^2Q^T S^2A^T B ,$$

т. е.

$$\delta^{k-1}(L + \delta E)^{-k} C^{-1}A^T B = \delta^{-1}Q\delta^k (\Lambda + \delta E)^{-k} \Lambda^2Q^T S^2A^T B . \tag{4.6}$$

Поскольку $\delta^k(\Lambda+\delta E)^{-k}\Lambda^2 = \operatorname{diag}\left\{\delta^k(\lambda_i+\delta)^{-k}\lambda_i^2\right\}$ и при выполнении условия (4.3) число $\left|\,\delta(\lambda_i+\delta)^{-1}\,\right|<1$ при $\lambda_i\neq 0$, то $\sum_{k=1}^{\infty}\delta^k(\lambda_i+\delta)^{-k}\lambda_i^2=\delta\lambda_i$ при $\lambda_i\neq 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\delta^k(\lambda_i+\delta)^{-k}\lambda_i^2=0$ при $\lambda_i=0$, в силу чего матричный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\delta^k(\Lambda+\delta E)^{-k}\Lambda^2$ сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\delta^k(\Lambda+\delta E)^{-k}\Lambda^2 \;=\; \delta\Lambda\,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\delta^{k-1}(\Lambda+\delta E)^{-k}\Lambda^2 \;=\; \Lambda\,. \tag{4.7}$$

В силу (4.6), (4.7), (3.2), (3.4) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\delta^{k-1}(C^{-1}A^TBA+\delta E)^{-k}C^{-1}A^TB \;=\; \delta^{-1}Q\sum_{k=1}^{\infty}\delta^k(\Lambda+\delta E)^{-k}\Lambda^2Q^TS^2A^TB \;=$$

$$=\; Q\Lambda Q^TS^2A^TB \;=\; Q\Lambda Q^TCC^{-1}S^2A^TB \;=\; LC^{-1}S^2A^TB \;=$$

$$=\; C^{-1}A^TBAC^{-1}S^2A^TB \;=\; C^{-1}S^2A^TBAC^{-1}A^TB \;=\; C^{-1}SA^TB\,,$$

так что получили формулу (4.4), т. е. разложение взвешенной псевдообратной матрицы с весами, указанными в теореме, в матричный степенной ряд с отрицательными показателями степеней.

Теперь покажем справедливость оценки (4.5). Аналогично равенству (4.6) получаем

$$\delta^{k-1}(L+\delta E)^{-k}C^{-1}A^TB \;=\; \delta^{k-1}Q(\Lambda+\delta E)^{-k}\Lambda Q^TSA^TB\,. \tag{4.8}$$

Из (4.7) следует равенство

$$\delta^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\delta^k(\Lambda+\delta E)^{-k}\Lambda \;=\; [I(\Lambda)]^2 \;=\; \Theta, \tag{4.9}$$

где $I(\Lambda)$ — матрица инерции для Λ, Θ — диагональная матрица размера матрицы Λ с элементами, равными единице при $\lambda_i\neq 0$ и нулю при $\lambda_i=0$.

Нетрудно убедиться, что для частичной суммы членов ряда (4.9) выполняется

$$\delta^{-1}\sum_{k=1}^{p}\delta^k(\Lambda+\delta E)^{-k}\Lambda \;=\; \Theta-\delta^p(\Lambda+\delta E)^{-p}\Theta\,.$$

В силу этого равенства и равенств (4.4), (4.8), (4.9) имеем

$$A_{BC}^{+}-A_{\delta,p}^{+} \;=\; \delta^{-1}Q\sum_{k=1}^{\infty}\delta^k(\Lambda+\delta E)^{-k}\Lambda Q^TSA^TB-\delta^{-1}Q\sum_{k=1}^{p}\delta^k(\Lambda+\delta E)^{-k}\Lambda Q^TSA^TB \;=$$

$$=\; \delta^{-1}Q\Theta Q^TSA^TB-\delta^{-1}Q\Theta Q^TSA^TB+\delta^pQ(\Lambda+\delta E)^{-p}\Theta Q^TSA^TB\,.$$

Учитывая (3.3) и C-взвешенную ортогональность матрицы Q, последнее равенство можно представить в виде

$$A^+_{BC} - A^+_{\delta,p} = \delta^p Q(\Lambda + \delta E)^{-p}\Theta Q^{-1}A^+_{BC}.$$

Чтобы установить оценку (4.5), будем использовать определение нормы согласно формуле (2.1), равенство (2.2), соотношения (2.3), а также определение матриц C и V, приведенное в формулировке теоремы 4.1, C-взвешенную ортогональность матрицы Q. Тогда из последнего равенства имеем

$$\left\|A^+_{BC} - A^+_{\delta,p}\right\|_{C^{1/2}V} \leq |\delta|^p \|Q\|_{C^{1/2}E_n} \left\|\left(\Lambda + \delta E\right)^{-p}\Theta Q^{-1}A^+_{BC}\right\|_{E_nV} \leq$$

$$\leq |\delta|^p \left\|\left(\Lambda + \delta E\right)^{-p}\Theta\right\|_{E_nE_n} \left\|Q^{-1}A^+_{BC}\right\|_{E_nV} \leq$$

$$\leq |\delta|^p \left(\mu(L) - |\delta|\right)^{-p} \left\|Q^{-1}A^+_{BC}\right\|_{E_nV} \leq |\delta|^p \left(\mu(L) - |\delta|\right)^{-p} \left\|Q^{-1}\right\|_{E_nC^{-1/2}} \left\|A^+_{BC}\right\|_{C^{1/2}V} =$$

$$= |\delta|^p \left(\mu(L) - |\delta|\right)^{-p} \left\|A^+_{BC}\right\|_{C^{1/2}V},$$

т. е. получили оценку (4.5), что и завершает доказательство теоремы 4.1.

***Следствие* 4.1.** *Из* (4.4) *вытекает соотношение*

$$A^+_{BC} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} C^{-1}(A^T BAC^{-1} + \delta E)^{-k} A^T B.$$

При выполнении предположений теоремы 4.1 в силу (2.9) и (4.4) получаем следующее разложение взвешенной псевдообратной матрицы со знаконеопределенной симметричной невырожденной весовой матрицей $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и положительно определенной матрицей $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ в матричное степенное произведение:

$$A^+_{BC} = \prod_{k=0}^{\infty} \left\{E + \delta^{2^k}\left(C^{-1}A^T BA + \delta E\right)^{-(2^k)}\right\}\left(C^{-1}A^T BA + \delta E\right)^{-1} C^{-1}A^T B. \tag{4.10}$$

Обозначим

$$A^+_{\delta,n} = \prod_{k=0}^{n-1} \left\{E + \delta^{2^k}\left(C^{-1}A^T BA + \delta E\right)^{-(2^k)}\right\}\left(C^{-1}A^T BA + \delta E\right)^{-1} C^{-1}A^T B, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Тогда в силу тождества (2.9) и соотношения (4.5) получим

$$\left\|A^+_{BC} - A^+_{\delta,n}\right\|_{C^{1/2}V} \leq \delta^{2^n}\left(\mu(C^{-1}A^T BA) - |\delta|\right)^{-(2^n)} \left\|A^+_{BC}\right\|_{C^{1/2}V}. \tag{4.11}$$

Из оценки (4.5) следует, что для любого $p = 1, 2, \ldots$ справедливо следующее предельное представление взвешенной псевдообратной матрицы:

$$A_{BC}^{+} = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} \left(C^{-1} A^T B A + \delta E \right)^{-k} C^{-1} A^T B \,, \tag{4.12}$$

а из оценки (4.11) для любого $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$A_{BC}^{+} = \lim_{\delta \to 0} \prod_{k=0}^{n-1} \left\{ E + \delta^{2^k} \left(C^{-1} A^T B A + \delta E \right)^{-(2^k)} \right\} \left(C^{-1} A^T B A + \delta E \right)^{-1} C^{-1} A^T B \,. \tag{4.13}$$

Отметим, что на основе взвешенного сингулярного разложения матриц [24] с положительно определенными весами в работе [18] получены разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и произведения с положительно определенными весами, а на основе взвешенного сингулярного разложения матриц с вырожденными весами в работах [25, 26] — разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и произведения с вырожденными весами.

Теперь рассмотрим случай, когда матрица B положительно определена, а C является невырожденной знаконеопределенной, т. е. обоснуем разложение взвешенных псевдообратных матриц, удовлетворяющих системе матричных уравнений

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad (BAX)^T = BAX, \quad (CXA)^T = CXA \tag{4.14}$$

при выполнении условия

$$\operatorname{rk}\left(A C^{-1} A^T \right) = \operatorname{rk}(A). \tag{4.15}$$

Теорема 4.2. *Для произвольной матрицы* $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, *симметричной положительно определенной матрицы* $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, *симметричной знаконеопределенной невырожденной матрицы* $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *и действительного числа* δ, *удовлетворяющего условию*

$$0 < |\delta| < \frac{1}{2} \mu\left(A C^{-1} A^T B \right), \tag{4.16}$$

имеют место соотношения

$$A_{BC}^{+} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} C^{-1} A^T B \left(A C^{-1} A^T B + \delta E \right)^{-k}, \tag{4.17}$$

$$\left\| A_{BC}^{+} - A_{\delta,p}^{+} \right\|_{HB^{-1/2}} \leq |\delta|^p \left(\mu(A C^{-1} A^T B) - |\delta| \right)^{-p} \left\| A_{BC}^{+} \right\|_{HB^{-1/2}} , \tag{4.18}$$

где A_{BC}^{+} *— взвешенная псевдообратная матрица, удовлетворяющая условиям* (4.14), (4.15), $A_{\delta,p}^{+} = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} C^{-1} A^T B (A C^{-1} A^T B + \delta E)^{-k}$, $p = 1, 2, \ldots$, $\mu(L)$ *определено в теореме* 4.1,

λ_i *— собственные значения матрицы* $AC^{-1}A^TB$, $H = H^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *— любая невырожденная матрица.*

Доказательство. Докажем равенство (4.17). Пусть $L = AC^{-1}A^TB$. Матрица L в общем случае знаконеопределенная вырожденная, поскольку она представляет собой произведение симметричных знаконеопределенной матрицы $AC^{-1}A^T$ и положительно определенной матрицы B, и согласно [17] такая матрица имеет такое же число положительных, отрицательных и нулевых собственных значений, как и матрица $AC^{-1}A^T$. Матрица L симметризуемая слева положительно определенным симметризатором B, а справа симметризатором B^{-1}. В силу условия (4.16) матрица $L + \delta E$ невырожденная симметризуемая слева симметризатором B, а справа симметризатором B^{-1}. Тогда $(L+\delta E)^{-1}$ существует, $(L+\delta E)B^{-1}$, $\left((L+\delta E)B^{-1}\right)^{-1}$, $B(L+\delta E)^{-1}$ — симметричные матрицы и, следовательно, $(L+\delta E)^{-1}$ симметризуемая слева положительно определенным симметризатором B матрица. Нетрудно убедиться, что $(L+\delta E)^{-k}$, $k = 1,2,\ldots$, — симметризуемые слева симметризатором B матрицы. Поэтому для них справедлива лемма 2.7. Обозначим через $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_i)$, $i = 1,\ldots,n$, собственные значения матрицы L.

Отметим, что поскольку в силу следствий 3.1, 3.2 $S_2AC^{-1}A^TB = AA^+_{BC}$, то, учитывая первое равенство в (3.1), имеем $S_2AC^{-1}A^TBA = A$, откуда следуют равенства

$$A^TBAC^{-1}A^TS_2^T \;=\; A^T, \qquad S_2AC^{-1}A^TB \;=\; AC^{-1}A^TBS_2, \qquad S_2^TB \;=\; \left(S_2^TB\right)^T. \tag{4.19}$$

Рассмотрим одно из слагаемых матричного ряда (4.17). В силу леммы 2.7 (формулы (2.11), (2.12)) с учетом формул (4.19) и $A^+_{BC} = C^{-1}A^TBS_2$ (см. следствие 3.1) получаем

$$\delta^{k-1}C^{-1}A^TB(L+\delta E)^{-k} \;=\; \delta^{k-1}C^{-1}A^TBAC^{-1}A^TS_2^TB(L+\delta E)^{-k} \;=$$

$$=\; \delta^{k-1}C^{-1}A^TBS_2AC^{-1}A^TB(L+\delta E)^{-k} = \delta^{k-1}C^{-1}A^TBS_2^2AC^{-1}A^TBAC^{-1}A^TB(L+\delta E)^{-k} \;=$$

$$=\; \delta^{k-1}C^{-1}A^TBS_2^2L^2(L+\delta E)^{-k} \;=\; \delta^{k-1}C^{-1}A^TBS_2^2Q\Lambda^2Q^TBQ(\Lambda+\delta E)^{-k}Q^TB \;=$$

$$=\; \delta^{k-1}C^{-1}A^TBS_2^2Q\Lambda^2(\Lambda+\delta E)^{-k}Q^TB\,,$$

т. е.

$$\delta^{k-1}C^{-1}A^TB(L+\delta E)^{-k} \;=\; \delta^{k-1}C^{-1}A^TBS_2^2Q\Lambda^2(\Lambda+\delta E)^{-k}Q^TB\,. \tag{4.20}$$

Поскольку $\delta^k\Lambda^2(\Lambda+\delta E)^{-k} = \operatorname{diag}\left\{\delta^k\lambda_i^2(\lambda_i+\delta)^{-k}\right\}$ и при выполнении условия (4.16) число $\left|\delta(\lambda_i+\delta)^{-1}\right| < 1$ при $\lambda_i \neq 0$, то $\sum_{k=1}^{\infty}\delta^k\lambda_i^2(\lambda_i+\delta)^{-k} = \delta\lambda_i$ при $\lambda_i \neq 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\delta^k\lambda_i^2(\lambda_i+\delta)^{-k} = 0$ при $\lambda_i = 0$, в силу чего матричный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\delta^k\Lambda^2(\Lambda+\delta E)^{-k}$ сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta^k \Lambda^2 (\Lambda + \delta E)^{-k} = \delta\Lambda . \tag{4.21}$$

Учитывая (4.19) – (4.21), следствия 3.1, 3.2 и первое равенство в (3.1), имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} C^{-1} A^T B (AC^{-1}A^T B + \delta E)^{-k} = \delta^{-1} C^{-1} A^T B S_2^2 Q \sum_{k=1}^{\infty} \delta^k \Lambda^2 (\Lambda + \delta E)^{-k} Q^T B =$$

$$= C^{-1} A^T B S_2^2 Q \Lambda Q^T B = C^{-1} A^T B S_2^2 L = A_{BC}^{+} S_2 L = A_{BC}^{+} A A_{BC}^{+} = A_{BC}^{+} ,$$

так что получили формулу (4.17), т. е. разложение взвешенной псевдообратной матрицы с весами, указанными в теореме, в матричный степенной ряд с отрицательными показателями степеней.

Теперь покажем справедливость оценки (4.18). Аналогично равенству (4.20) имеем

$$\delta^{k-1} C^{-1} A^T B (L + \delta E)^{-k} = \delta^{k-1} A_{BC}^{+} Q \Lambda (\Lambda + \delta E)^{-k} Q^{-1} . \tag{4.22}$$

Из (4.21) получаем равенство

$$\delta^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \delta^k \Lambda (\Lambda + \delta E)^{-k} = [I(\Lambda)]^2 = \Theta . \tag{4.23}$$

Для частичной суммы членов матричного ряда (4.23) имеем

$$\delta^{-1} \sum_{k=1}^{p} \delta^k \Lambda (\Lambda + \delta E)^{-k} = \Theta - \delta^p \Theta (\Lambda + \delta E)^{-p} .$$

В силу последнего равенства и равенств (4.22), (4.23) выполняется

$$A_{BC}^{+} - A_{\delta,p}^{+} = \delta^{-1} A_{BC}^{+} Q \sum_{k=1}^{\infty} \delta^k \Lambda (\Lambda + \delta E)^{-k} Q^{-1} - \delta^{-1} A_{BC}^{+} Q \sum_{k=1}^{p} \delta^k \Lambda (\Lambda + \delta E)^{-k} Q^{-1} =$$

$$= A_{BC}^{+} Q \left(\Theta - \Theta + \delta^p \Theta (\Lambda + \delta E)^{-p} \right) Q^{-1} = \delta^p A_{BC}^{+} Q \Theta (\Lambda + \delta E)^{-p} Q^{-1} ,$$

т. е.

$$A_{BC}^{+} - A_{\delta,p}^{+} = \delta^p A_{BC}^{+} Q \Theta (\Lambda + \delta E)^{-p} Q^{-1} .$$

Чтобы установить оценку (4.18), будем использовать определение нормы согласно формуле (2.1), равенство (2.2), соотношения (2.3), а также определение матриц B, H, приведенное в формулировке теоремы 4.2, и B-взвешенную ортогональность матрицы Q. Тогда из последнего равенства последовательно имеем

$$\left\| A_{BC}^{+} - A_{\delta,p}^{+} \right\|_{HB^{-1/2}} \le |\delta|^p \left\| A_{BC}^{+} Q \Theta (\Lambda + \delta E)^{-p} \right\|_{HE_m} \left\| Q^{-1} \right\|_{E_m B^{-1/2}} =$$

$$= |\delta|^p \left\| A_{BC}^+ Q\Theta(\Lambda + \delta E)^{-p} \right\|_{HE_m} \le |\delta|^p \left\| A_{BC}^+ \right\|_{HB^{-1/2}} \left\| Q\Theta(\Lambda + \delta E)^{-p} \right\|_{B^{1/2}E_m} \le$$

$$\le |\delta|^p \left\| A_{BC}^+ \right\|_{HB^{-1/2}} \|Q\|_{B^{1/2}E_m} \left\| \Theta(\Lambda + \delta E)^{-p} \right\|_{E_mE_m} =$$

$$= |\delta|^p \left\| A_{BC}^+ \right\|_{HB^{-1/2}} \left\| \Theta(\Lambda + \delta E)^{-p} \right\|_{E_mE_m} \le |\delta|^p (\mu(L) - |\delta|)^{-p} \left\| A_{BC}^+ \right\|_{HB^{-1/2}},$$

т. е. получили оценку (4.18), что и завершает доказательство теоремы 4.2.

***Следствие* 4.2.** *Из* (4.17) *вытекает соотношение*

$$A_{BC}^+ = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} C^{-1} A^T (BAC^{-1}A^T + \delta E)^{-k} B.$$

При выполнении предположений теоремы 4.2 в силу (2.10) и (4.17) получаем следующее разложение взвешенной псевдообратной матрицы с положительно определенной симметричной весовой матрицей $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и знаконеопределенной симметричной невырожденной весовой матрицей $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ в матричное степенное произведение:

$$A_{BC}^+ = C^{-1}A^T B \left(AC^{-1}A^T B + \delta E \right)^{-1} \prod_{k=0}^{\infty} \left\{ E + \delta^{2^k} \left(AC^{-1}A^T B + \delta E \right)^{-(2^k)} \right\}. \qquad (4.24)$$

Обозначим

$$A_{\delta,n}^+ = C^{-1}A^T B \left(AC^{-1}A^T B + \delta E \right)^{-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left\{ E + \delta^{2^k} \left(AC^{-1}A^T B + \delta E \right)^{-(2^k)} \right\}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Тогда в силу (2.10) и соотношения (4.18) выполняется неравенство

$$\left\| A_{BC}^+ - A_{\delta,n}^+ \right\|_{HB^{-1/2}} \le \delta^{2^n} \left(\mu(AC^{-1}A^T B) - |\delta| \right)^{-(2^n)} \left\| A_{BC}^+ \right\|_{HB^{-1/2}}. \qquad (4.25)$$

Из оценки (4.18) следует, что для любого $p = 1, 2, \ldots$ справедливо следующее предельное представление взвешенной псевдообратной матрицы:

$$A_{BC}^+ = \lim_{\delta \to 0} C^{-1}A^T B \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} \left(AC^{-1}A^T B + \delta E \right)^{-k}, \qquad (4.26)$$

а из оценки (4.25) для любого $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$A_{BC}^+ = \lim_{\delta \to 0} C^{-1}A^T B (AC^{-1}A^T B + \delta E)^{-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left\{ E + \delta^{2^k} \left(AC^{-1}A^T B + \delta E \right)^{-(2^k)} \right\}. \qquad (4.27)$$

Из предельных представлений (4.12), (4.13), (4.26), (4.27) взвешенных псевдообратных матриц следует, что при достаточно малом параметре δ матрицы A_{BC}^+ и $A_{\delta,p}^+$, $A_{\delta,n}^+$ могут как угодно мало отличаться одна от другой и на основании предложенных предельных представлений можно вычислять приближения к взвешенным псевдообратным матрицам. Оценки близости взвешенных псевдообратных матриц и их приближенных значений даны формулами (4.5), (4.11), (4.18), (4.25).

5. Построение итерационных процессов для вычисления взвешенных псевдобратных матриц. В данном пункте опишем методику построения регуляризованных итерационных процессов для вычисления взвешенных псевдообратных матриц, основанную на разложениях взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и произведения, полученных в пункте 4.

Сначала построим итерационный процесс для вычисления взвешенной псевдообратной матрицы со смешанными весами, когда матрица C положительно определена, а B является знаконеопределенной, т. е. итерационный процесс для вычисления взвешенных псевдообратных матриц, удовлетворяющих системе матричных уравнений (4.1) при выполнении условия (4.2).

Рассмотрим разложение (4.4) взвешенных псевдообратных матриц в матричный степенной ряд. Положим

$$X_k = \sum_{i=1}^{k} \delta^{i-1} \left(C^{-1}A^T BA + \delta E \right)^{-i} C^{-1}A^T B .$$

Тогда для вычисления A_{BC}^{+} получим регуляризованный итерационный процесс

$$\begin{gathered} X_0 = 0, \\ X_k = \delta \left(C^{-1}A^T BA + \delta E \right)^{-1} X_{k-1} + \left(C^{-1}A^T BA + \delta E \right)^{-1} C^{-1}A^T B = \\ = \left(C^{-1}A^T BA + \delta E \right)^{-1} \left(\delta X_{k-1} + C^{-1}A^T B \right), \quad k = 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{5.1}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (5.1) к A_{BC}^{+} определяется формулой (4.5), где следует положить $p = k$.

Используем разложение (4.10) взвешенной псевдообратной матрицы в матричное степенное произведение, на основе которого положим

$$X_k = \prod_{i=0}^{k-1} \left\{ E + \delta^{2^i} \left(C^{-1}A^T BA + \delta E \right)^{-(2^i)} \right\} \left(C^{-1}A^T BA + \delta E \right)^{-1} C^{-1}A^T B .$$

Тогда для вычисления A_{BC}^{+} получим регуляризованный итерационный процесс

$$\begin{gathered} X_0 = \left(C^{-1}A^T BA + \delta E \right)^{-1} C^{-1}A^T B, \\ X_k = \left\{ E + \delta^{2^{k-1}} \left(C^{-1}A^T BA + \delta E \right)^{-(2^{k-1})} \right\} X_{k-1} = \\ = X_{k-1} + \delta^{2^{k-1}} \left(C^{-1}A^T BA + \delta E \right)^{-(2^{k-1})} X_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{5.2}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (5.2) к A^{+}_{BC} определяется формулой (4.11), где следует положить $n = k$.

Теперь построим итерационный процесс для вычисления взвешенной псевдообратной матрицы со смешанными весами, когда матрица B положительно определена, а C является знаконеопределенной, т. е. итерационный процесс для вычисления взвешенных псевдообратных матриц, удовлетворяющих системе матричных уравнений (4.14) при выполнении условия (4.15).

Рассмотрим разложение (4.17) взвешенных псевдообратных матриц в матричный степенной ряд. Положим

$$X_k = C^{-1}A^T B \sum_{i=1}^{k} \delta^{i-1}\left(AC^{-1}A^T B + \delta E\right)^{-i}.$$

Тогда для вычисления A^{+}_{BC} получим регуляризованный итерационный процесс

$$\begin{aligned} X_0 &= 0, \\ X_k &= \delta X_{k-1}\left(AC^{-1}A^T B + \delta E\right)^{-1} + C^{-1}A^T B\left(AC^{-1}A^T B + \delta E\right)^{-1} = \\ &= \left(\delta X_{k-1} + C^{-1}A^T B\right)\left(AC^{-1}A^T B + \delta E\right)^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{5.3}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (5.3) к A^{+}_{BC} определяется формулой (4.18), где следует положить $p = k$.

Используем разложение (4.24) взвешенной псевдообратной матрицы в матричное степенное произведение, на основе которого положим

$$X_k = C^{-1}A^T B\left(AC^{-1}A^T B + \delta E\right)^{-1} \prod_{i=0}^{k-1} \left\{E + \delta^{2^i}\left(AC^{-1}A^T B + \delta E\right)^{-(2^i)}\right\}.$$

Тогда для вычисления A^{+}_{BC} получим регуляризованный итерационный процесс

$$\begin{aligned} X_0 &= C^{-1}A^T B\left(AC^{-1}A^T B + \delta E\right)^{-1}, \\ X_k &= X_{k-1}\left\{E + \delta^{2^{k-1}}\left(AC^{-1}A^T B + \delta E\right)^{-(2^{k-1})}\right\} = \\ &= X_{k-1} + \delta^{2^{k-1}} X_{k-1}\left(AC^{-1}A^T B + \delta E\right)^{-(2^{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{5.4}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (5.4) к A^{+}_{BC} определяется формулой (4.25), где следует положить $n = k$.

Таким образом, получены регуляризованные итерационные процессы для вычисления взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весовыми матрицами. Из оценок (4.5), (4.11), (4.18), (4.25) следует, что погрешность приближения зависит от количества итераций и параметра δ. Очевидно, что параметр δ необходимо выбирать по возможности наименьшим. Но его величина ограничивается в сторону уменьшения необходимой точностью вычисления обратных матриц к матрицам $C^{-1}A^T BA + \delta E$ и $AC^{-1}A^T B + \delta E$. Таким образом, остается открытым вопрос согласования параметра δ с числом итераций с точки зрения получения необходимой точности приближенного решения. При решении прикладных задач исходные данные, как правило, задаются с погрешностью, кроме того, погрешность в решения вносят ошибки округления. Следовательно, возникает вопрос согласования параметра δ, числа итераций, величины погрешности исходных данных и ошибок округления с точки зрения получения необходимой точности приближенного решения регуляризованными итерационными методами. Последнее обстоятельство особенно важно, поскольку вычисление псевдообратных матриц относится к классу некорректных задач (нет непрерывной зависимости решения задачи от изменения исходных данных). Отметим, что в [27] приведен краткий обзор библиографии по использованию взвешенного сингулярного разложения матриц с положительно определенными весами при анализе влияния возмущений исходных данных на решения задач вычисления взвешенных нормальных псевдорешений с положительно определенными весами (см., например, [28, 29]). В работах [18, 25, 27, 30, 31] построены и исследованы регуляризованные итерационные процессы для вычисления взвешенных псевдообратных матриц с положительно полуопределенными весовыми матрицами, основанные на разложениях этих матриц в матричные степенные ряды и произведения.

Литература

1. *Chipman J. S.* On least squares with insufficient observation // J. Amer. Statist. Assoc. – 1964. – **59**, № 308. – P. 1078 – 1111.
2. *Milne R. D.* An oblique matrix pseudoinverse // SIAM J. Appl. Math. – 1968. – **16**, № 5. – P. 931 – 944.
3. *Ward J. F., Boullion T. L., Lewis T. O.* A note on the oblique matrix pseudoinverse // SIAM J. Appl. Math. – 1971. – **20**, № 2. – P. 173 – 175.
4. *Ward J. F., Boullion T. L., Lewis T. O.* Weighted pseudoinverses with singular weights // SIAM J. Appl. Math. – 1971. – **21**, № 3. – P. 480 – 482.
5. *Галба Е. Ф., Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Взвешенные псевдообратные матрицы и взвешенные нормальные псевдорешения с вырожденными весами // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2009. – **49**, № 8. – С. 1347 – 1363.
6. *Сергиенко И. В., Галба Е. Ф., Дейнека В. С.* Существование и единственность взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 1. – С. 80 – 101.
7. *Сергиенко И. В., Галба Е. Ф., Дейнека В. С.* Теоремы существования и единственности в теории взвешенной псевдоинверсии с вырожденными весами // Кибернетика и системный анализ. – 2011. – № 1. – С. 14 – 33.
8. *Mitra S. K., Rao C. R.* Projections under seminorms and generalized Moore – Penroze inverses // Linear Algebra and Appl. – 1974. – **9**. – P. 155 – 167.
9. *Censor Y., Elfving T.* Block-iterative algorithms with diagonally skaled oblique projections for the linear feasibility problem // SIAM J. Matrix Anal. – 2002. – **24**, № 1. – P. 40 – 58.
10. *Censor Y., Elfving T.* Iterative algorithms with seminorm-induced oblique projections // Abstr. Appl. Anal. – 2003. – № 7. – P. 387 – 406.
11. *Понтрягин Л. С.* Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1944. – **8**. – С. 243 – 280.
12. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. – М.: Гостехиздат, 1948. – 420 с.
13. *Gohberg I., Lancaster P., Rodman L.* Matrices and indefinite scalar products. – Basel etc.: Birkhäuser, 1983.
14. *Gohberg I., Lancaster P., Rodman L.* Indefinite linear algebra and applications. – Basel etc.: Birkhäuser, 2005. – 357 p.

15. *Икрамов Х. Д.* Теорема о диагонализации одного типа гамильтонианов с точки зрения теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1989. – **29**, № 1. – С. 3 – 14.
16. *Икрамов Х. Д.* О связи между биортогональным алгоритмом и методом Ланцоша в пространстве с незнакоопределенной метрикой // Вестн. МГУ. Сер. вычислит. математика и кибернетика. – 1991. – № 3. – С. 19 – 23.
17. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 656 с.
18. *Галба Е. Ф., Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Разложения и многочленные предельные представления взвешенных псевдообратных матриц // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2007. – **47**, № 5. – С. 747 – 766.
19. *Lancaster P., Rozsa P.* Eigenvectors of H-self-adjoint matrices // Z. angew. Math. und Mech. – 1984. – **64**, № 9. – S. 439 – 441.
20. *Икрамов Х. Д.* Об алгебраических свойствах классов псевдоперестановочных и H-самосопряженных матриц // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1992. – **32**, № 8. – С. 155 – 169.
21. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
22. *Молчанов И. Н., Галба Е. Ф.* Взвешенное псевдообращение комплексных матриц // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 1. – С. 53 – 57.
23. *Decell H. P.* An application of the Cayley – Hamilton theorem to generalized matrix inversion // SIAM Rev. – 1965. – **7**, № 4. – P. 526 – 528.
24. *Галба Е. Ф.* Взвешенное сингулярное разложение и взвешенное псевдообращение матриц // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 10. – С. 1426 – 1430.
25. *Галба Е. Ф., Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Необходимые и достаточные условия существования одного из вариантов взвешенного сингулярного разложения матриц с вырожденными весами // Докл. РАН. – 2014. – **455**, № 3. – С. 261 – 264.
26. *Сергиенко И. В., Галба Е. Ф., Дейнека В. С.* Необходимые и достаточные условия существования взвешенного сингулярного разложения матриц с вырожденными весами // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 3. – С. 406 – 426.
27. *Галба Е. Ф., Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Взвешенное сингулярное разложение и взвешенное псевдообращение матриц с вырожденными весами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2012. – **52**, № 12. – С. 2115 – 2132.
28. *Химич А. Н., Николаевская Е. А.* Анализ достоверности компьютерных решений систем линейных алгебраических уравнений с приближенно заданными исходными данными // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 6. – С. 83 – 95.
29. *Николаевская Е. А., Химич А. Н.* Оценка погрешности взвешенного нормального псевдорешения с положительно определенными весами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2009. – **49**, № 3. – С. 422 – 430.
30. *Галба Е. Ф., Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Итерационные методы высоких скоростей сходимости для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами // Журн. вычисл. математики. и мат. физики. – 2005. – **45**, № 10. – С. 1731 – 1755.
31. *Сергиенко И. В., Галба Е. Ф., Дейнека В. С.* Необходимые и достаточные условия существования взвешенного сингулярного разложения матриц с вырожденными весами // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 3. – С. 406 – 426.

Получено 05.07.17