УДК 517.956.4

В. А. Літовченко (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

ОДИН МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

A recursive method for the investigation of the fundamental solution of the Cauchy problem for parabolic Shilov systems with time-dependent coefficients is proposed. It is based on the general formula for the solution of linear inhomogeneous systems of differential equations of the first order and does not require the use of the genus of the analyzed system.

Предложен рекурсивный метод исследования фундаментального решения задачи Коши для параболических по Шилову систем уравнений с непрерывно зависящими от времени коэффициентами, базирующийся на формуле общего решения линейных неоднородных систем дифференциальных уравнений первого порядка и не требующий использования рода системы.

1. Вступ. Параболічні за Шиловим системи рівнянь із частинними похідними, як і системи, параболічні за Петровським, характеризуються порядком p і показником параболічності h, $0 < h \leq p$ [1]. Проте для систем Шилова використовується ще одна важлива характеристика — так званий рід μ системи, потреба в якому виникає у зв'язку з використанням теорем типу Фрагмена – Ліндельофа [2] для дослідження фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК). Відомо [1], що якщо $p = h$, то $\mu = 1$. Але для $h < p$, за винятком того, що $1-(p-h) \leq \mu \leq 1$, у випадку, коли розмірність n просторової змінної більша за одиницю, досі не з'ясовано, як виражається μ через p і h за умови, що останні є точними характеристиками системи (випадок $n = 1$ повністю досліджено у [3]). Ця невизначеність роду μ природно поширюється і на низку результатів, одержаних, наприклад, у [1, 4, 5].

У зв'язку з цим у [6] було запропоновано альтернативний метод дослідження ФРЗК для параболічних за Шиловим рівнянь, який ґрунтується на відомій формулі Фаа де Бруно [7] диференціювання складених функцій і не вимагає використання роду μ. Проте цей метод недієвий для систем рівнянь із частинними похідними через некомутативність операції множення матриць.

У даній роботі пропонується ще один метод дослідження ФРЗК, який можна застосовувати як для параболічних рівнянь, так і систем рівнянь. Він рекурсивний, базується на формулі загального розв'язку лінійних неоднорідних систем диференціальних рівнянь першого порядку і також не потребує використання роду μ.

2. Попередні відомості. Розглянемо систему рівнянь

$$\partial_t u(t;x) = P(t;i\partial_x)u(t;x), \qquad (t;x) \in \Pi_{(0;T]} := (0;T] \times \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

у якій функція $u = \mathrm{col}(u_1;\ldots;u_m)$ є невідомою, а $P(t;i\partial_x)$ — матричний диференціальний вираз порядку p з неперервно залежними від t комплекснозначними коефіцієнтами, причому

$$\partial_x^k \cdot := \frac{\partial^{|k|}\cdot}{\partial_{x_1}^{k_1}\ldots\partial_{x_n}^{k_n}}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Вважатимемо, що система (1) є рівномірно параболічною за Шиловим на множині $\Pi_{[0;T]}$ з показником параболічності h, $0 < h \leq p$, тобто (див. [1]) для матриціанта $\theta_\tau^t(\cdot)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, її двоїстої за Фур'є системи

$$\partial_t v(t;\xi) = \mathcal{P}(t;\xi)v(t;\xi), \quad (t;\xi) \in \Pi_{(\tau;T]}, \tag{2}$$

виконується оцінка

$$\left|\theta^t_\tau(\xi)\right| \leq c\big(1 + \|\xi\|\big)^\gamma e^{-\delta(t-\tau)\|\xi\|^h}, \quad (t;\xi) \in \Pi_{(\tau;T]}, \tag{3}$$

з оціночними величинами $c > 0$, $\delta > 0$, що не залежать від ξ, t і τ. Тут $\gamma := (p-h)(m-1)$, $\mathcal{P}(t;\cdot)$ — матричний символ диференціального виразу $P(t; i\partial_x)$, $\|\cdot\|$ — евклідова норма у просторі $\mathbb{R}^n$, а $\left|(a_{l,j})^m_{l,j=1}\right| := \sup_{l,j}|a_{l,j}|$.

Відомо (див., наприклад, [8, с. 410]), що

$$\theta^t_\tau(\xi) = E + \sum_{r=1}^{\infty} \int\limits_\tau^t \int\limits_\tau^{t_1} \ldots \int\limits_\tau^{t_{r-1}} \left(\prod_{j=1}^r \mathcal{P}(t_j;\xi)\right) dt_r \ldots dt_2\, dt_1, \tag{4}$$

де E — одинична матриця порядку m. Цей ряд при кожному фіксованому $\xi \in \mathbb{R}^n$ абсолютно і рівномірно відносно t збігається на кожному відрізку $[a;b] \subset (\tau;T]$, $\tau \in [0;T)$, причому будь-який інший розв'язок системи (2) має вигляд $v = \theta^t_\tau c$, де c — деяка матриця-стовпець з елементами, залежними лише від ξ.

Нехай далі $G(t,\tau;\cdot)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, — ФРЗК для системи (1). Параболічність цієї системи забезпечує існування фундаментального розв'язку у вигляді [1]

$$G(t,\tau;x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} \theta^t_\tau(\xi)\, d\xi, \qquad (t;x) \in \Pi_{(\tau;T]}, \quad \tau \in [0;T).$$

Правильним є таке твердження.

Лема 1. *Матрична функція $\theta^t_\tau(\cdot)$ нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}^n$ за просторовою змінною, причому $\partial^k_\xi \theta^t_\tau(\xi)$ для кожного $k \in \mathbb{Z}^n_+ \setminus \{0\}$ є розв'язком відповідної задачі Коші*

$$\begin{gathered} \partial_t v(t;\xi) = \mathcal{P}(t;\xi)v(t;\xi) + f(t;\xi), \quad (t;\xi) \in \Pi_{(\tau;T]}, \\ v|_{t=\tau} = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

із неоднорідністю $f(t;\xi) := \partial^k_\xi\big(\mathcal{P}(t;\xi)\theta^t_\tau(\xi)\big) - \mathcal{P}(t;\xi)\partial^k_\xi\theta^t_\tau(\xi)$.

Доведення. Будемо використовувати тут зображення (4). Для нескінченної диференційовності по ξ матрицанта $\theta^t_\tau(\xi)$, зважаючи на те, що елементи матриці $\mathcal{P}(t;\xi)$ — цілі аналітичні функції змінної ξ, достатньо обґрунтувати рівність

$$\partial^k_\xi \left(\sum_{r=1}^{\infty} \int\limits_\tau^t \int\limits_\tau^{t_1} \ldots \int\limits_\tau^{t_{r-1}} \left(\prod_{j=1}^r \mathcal{P}(t_j;\xi)\right) dt_r \ldots dt_2\, dt_1\right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \int\limits_\tau^t \int\limits_\tau^{t_1} \ldots \int\limits_\tau^{t_{r-1}} \partial^k_\xi \left(\prod_{j=1}^r \mathcal{P}(t_j;\xi)\right) dt_r \ldots dt_2\, dt_1, \qquad k \in \mathbb{Z}^n_+ \setminus \{0\}, \quad t \in (\tau;T], \quad \tau \in [0;T), \tag{6}$$

при кожному фіксованому ξ з $\mathbb{R}^n$. Згідно з класичною теоремою про почленне диференціювання функціонального ряду, рівність (6) виконуватиметься, якщо буде збігатися рівномірно відносно ξ на кожному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty} \int_{\tau}^{t} \int_{\tau}^{t_1} \ldots \int_{\tau}^{t_{r-1}} \partial_\xi^k \left(\prod_{j=1}^{r} \mathcal{P}(t_j;\xi) \right) dt_r \ldots dt_2\, dt_1, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}, \tag{7}$$

при кожному фіксованому t з $(\tau;T]$, $\tau \in [0;T)$.

Отже, зафіксуємо довільно точку ξ_0 з $\mathbb{R}^n$ і розглянемо довільний компакт $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ із внутрішньою точкою ξ_0. Тоді, використавши оцінку

$$\left|\partial_\xi^k \xi^l\right| \le c_{kl}, \qquad \{k,l\} \subset \mathbb{Z}_+^n, \quad \xi \in \mathbb{K},$$

структуру елементів матриці $\mathcal{P}$ та обмеженість на $[0;T]$ коефіцієнтів системи (1), одержимо

$$\left| \sum_{r=1}^{\infty} \int_{\tau}^{t} \int_{\tau}^{t_1} \ldots \int_{\tau}^{t_{r-1}} \partial_\xi^k \left(\prod_{j=1}^{r} \mathcal{P}(t_j;\xi) \right) dt_r \ldots dt_2\, dt_1 \right| \le$$

$$\le \sum_{r=1}^{\infty} \left((t-\tau)c_{kp}^0\right)^r / r! = e^{(t-\tau)c_{kp}^0} - 1, \qquad k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}, \quad \xi \in \mathbb{K}, \quad t \in (\tau;T], \tag{8}$$

де c_{kp}^0 — додатна величина, що не залежить від ξ, t і τ.

Таким чином, рівність (6) виконується для всіх $\xi \in \mathbb{K}$, зокрема і для ξ_0. З огляду на довільність вибору ξ_0 з $\mathbb{R}^n$ отримаємо нескінченну диференційовність θ_τ^t на $\mathbb{R}^n$.

Зазначимо також, що з оцінки (8) та рівності (6) при кожному фіксованому $\xi \in \mathbb{R}^n$ випливає граничне співвідношення

$$\partial_\xi^k \theta_\tau^t(\xi) \underset{t \to \tau+0}{\longrightarrow} 0, \qquad k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}, \quad \tau \in [0;T).$$

Аналогічно переконуємось у правильності рівності

$$\partial_t(\partial_\xi^k \theta_\tau^t(\xi)) = \partial_\xi^k \mathcal{P}(t;\xi) + \sum_{r=1}^{\infty} \int_{\tau}^{t} \int_{\tau}^{t_1} \ldots \int_{\tau}^{t_{r-1}} \partial_\xi^k \left(\mathcal{P}(t;\xi) \prod_{j=1}^{r} \mathcal{P}(t_j;\xi) \right) dt_r \ldots dt_2\, dt_1,$$

$$k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (\tau;T], \quad \tau \in [0;T).$$

Зважаючи тепер на абсолютну збіжність ряду, з останньої рівності одержуємо

$$\partial_t\big(\partial_\xi^k \theta_\tau^t(\xi)\big) = \partial_\xi^k \mathcal{P}(t;\xi) +$$

$$+ \sum_{r=1}^{\infty} \int_{\tau}^{t} \int_{\tau}^{t_1} \ldots \int_{\tau}^{t_{r-1}} \left(\sum_{l=0}^{k} C_k^l \partial_\xi^l \mathcal{P}(t;\xi) \partial_\xi^{k-l} \left(\prod_{j=1}^{r} \mathcal{P}(t_j;\xi) \right) \right) dt_r \ldots dt_2\, dt_1 =$$

$$= \sum_{l=0}^{k} C_k^l \partial_\xi^l \mathcal{P}(t;\xi) \partial_\xi^{k-l} \left(E + \sum_{r=1}^{\infty} \int_{\tau}^{t} \int_{\tau}^{t_1} \ldots \int_{\tau}^{t_{r-1}} \left(\prod_{j=1}^{r} \mathcal{P}(t_j;\xi) \right) dt_r \ldots dt_2\, dt_1 \right) =$$

$$= \partial_\xi^k \big(\mathcal{P}(t;\xi) \theta_\tau^t(\xi)\big), \qquad k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (\tau;T], \quad \tau \in [0;T),$$

де $\sum_{l=q}^{k} C_k^l := \sum_{l_1=q_1}^{k_1} \ldots \sum_{l_n=q_n}^{k_n} \left(\prod_{j=1}^{n} C_{k_j}^{l_j} \right)$, $\{k, q\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, а C_n^m — біноміальний коефіцієнт.

Отже, $\partial_\xi^k \theta_\tau^t(\xi)$ — звичайний розв'язок задачі Коші (5) для всіх $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$.

Лему доведено.

***Наслідок* 1.** *Для всіх $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$, $\tau \in [0; T)$, $t \in (\tau; T]$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$ правильною є рівність*

$$\partial_\xi^k \theta_\tau^t(\xi) = \int_\tau^t \theta_\sigma^t(\xi) \left(\partial_\xi^k \big(\mathcal{P}(\sigma; \xi) \theta_\tau^\sigma(\xi) \big) - \mathcal{P}(\sigma; \xi) \partial_\xi^k \theta_\tau^\sigma(\xi) \right) d\sigma. \tag{9}$$

Дійсно, з огляду на лему 1, згідно з формулою (45′) з [8, с. 412], дістанемо

$$\partial_\xi^k \theta_\tau^t(\xi) = \int_\tau^t \theta_\tau^t(\xi) \theta_\tau^\sigma(\xi)^{-1} f(\sigma, \xi)\, d\sigma.$$

Врахувавши тепер групову властивість матриціанта (див. [8, с. 410])

$$\theta_\tau^t(\xi) \theta_\tau^\sigma(\xi)^{-1} = \theta_\sigma^t(\xi) \theta_\tau^\sigma(\xi) \theta_\tau^\sigma(\xi)^{-1} = \theta_\sigma^t(\xi),$$

отримаємо зазначену рекурентну формулу.

На завершення цього пункту сформулюємо ще одне допоміжне твердження.

Лема 2. *Нехай $J_j^k := \sum_{\nu_1=0}^{j} \sum_{\nu_2=0}^{\nu_1} \ldots \sum_{\nu_k=0}^{\nu_{k-1}} 1$, де k, j — довільно фіксовані натуральні числа. Тоді*

$$J_j^k \leq \frac{(j+k)^k}{k!}. \tag{10}$$

Доведення. Насамперед оцінимо суму $\sum_{x=1}^{j} x^n$, $\{n, j\} \subset \mathbb{N}$. Оскільки

$$\sum_{x=1}^{j} x^n = \sum_{x=1}^{j} x^n \cdot 1,$$

то зазначену суму можна вважати інтегральною сумою (верхньою сумою Дарбу) функції $y = x^n$ на $[0; j]$, яка відповідає рівномірному розбиттю відрізка $[0; j]$ точками з цілочисловими координатами. Зважаючи на невід'ємність і строге зростання цієї функції на $[0; +\infty)$ та виходячи безпосередньо з геометричного змісту визначеного інтеграла, переконуємось у виконанні нерівності

$$\sum_{x=1}^{j} x^n \cdot 1 \leq \int_0^{j+1} \xi^n \, d\xi.$$

Обчисливши звідси інтеграл, дістанемо

$$\sum_{x=1}^{j} x^n \leq \frac{(j+1)^{n+1}}{n+1}, \quad \{n, j\} \subset \mathbb{N}. \tag{11}$$

Для доведення нерівності (10) скористаємося методом математичної індукції. Нехай $k = 2$, тоді $J_j^2 = \sum_{\nu_1=0}^{j} \sum_{\nu_2=0}^{\nu_1} 1 = \sum_{\nu_1=1}^{j+1} \nu_1$. Врахувавши тепер оцінку (11), переконаємось у виконанні нерівності (10) при $k = 2$ і довільному $j \in \mathbb{N}$.

Припустимо, що нерівність (10) виконується при $k = m > 2$ та $j \in \mathbb{N}$: $J_j^m \le \dfrac{(j+m)^m}{m!}$. Доведемо виконання нерівності (10) при $k = m+1$ і $j \in \mathbb{N}$. Позаяк

$$J_j^{m+1} = \sum_{\nu_1=0}^{j} J_{\nu_1}^m \le \sum_{\nu_1=0}^{j} \frac{(\nu_1+m)^m}{m!} = \frac{1}{m!}\sum_{\nu=m}^{j+m} \nu^m \le \frac{1}{m!}\sum_{\nu=1}^{j+m} \nu^m,$$

то, врахувавши (11), одержимо $J_j^{m+1} \le \dfrac{(j+m+1)^{m+1}}{(m+1)!}$, тобто нерівність (10) виконується при $k = m+1$ і довільному j з $\mathbb{N}$.

Лему доведено.

3. Дослідження ФРЗК. Передусім з'ясуємо властивості похідних матрицанта $\theta_\tau^t(\cdot)$.

Теорема 1. *Існують додатні сталі c, B і δ такі, що для всіх $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t \in (\tau; T]$ і $\tau \in [0; T)$ виконується нерівність*

$$\left|\partial_\xi^k \theta_\tau^t(\xi)\right| \le cB^{|k|}k!\big(1+\|\xi\|\big)^{\alpha|k|+\gamma} e^{-\delta(t-\tau)\|\xi\|^h}, \tag{12}$$

в якій $\alpha := (p-h)m - 1$.

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли $k \in \mathbb{Z}_+^n$ таке, що всі його компоненти, крім однієї, дорівнюють нулю. Нехай, для визначеності, $k_1 \ne 0$ і $k_j = 0$, $j \ne 1$ (решта можливих випадків реалізуються аналогічно). Тоді, згідно з формулою (9), маємо

$$\partial_\xi^k \theta_\tau^t(\xi) = \partial_{\xi_1}^{k_1} \theta_\tau^t(\xi) = \sum_{l_1=1}^{k_1} C_{k_1}^{l_1} \int_\tau^t \theta_{\sigma_1}^t(\xi)\partial_{\xi_1}^{l_1}\mathcal{P}(\sigma_1;\xi)\partial_{\xi_1}^{k_1-l_1}\theta_\tau^{\sigma_1}(\xi)\,d\sigma_1.$$

Звідси, згідно з рекурсією, прийдемо до рівності

$$\begin{gathered}\partial_{\xi_1}^{k_1}\theta_\tau^t(\xi) = \sum_{l_1=1}^{k_1} C_{k_1}^{l_1}\int_\tau^t \theta_{\sigma_1}^t(\xi)\partial_{\xi_1}^{l_1}\mathcal{P}(\sigma_1;\xi)\sum_{l_2=1}^{k_1-l_1} C_{k_1-l_1}^{l_2}\int_\tau^{\sigma_1}\theta_{\sigma_2}^{\sigma_1}(\xi)\partial_{\xi_1}^{l_2}\mathcal{P}(\sigma_2;\xi)\times \\ \times\sum_{l_3=1}^{k_1-l_1-l_2} C_{k_1-l_1-l_2}^{l_3}\int_\tau^{\sigma_2}\theta_{\sigma_3}^{\sigma_2}(\xi)\partial_{\xi_1}^{l_3}\mathcal{P}(\sigma_3;\xi)\ldots\sum_{l_j=1}^{1} C_1^{l_j}\int_\tau^{\sigma_{j-1}}\theta_{\sigma_j}^{\sigma_{j-1}}(\xi)\partial_{\xi_1}^{l_j}\mathcal{P}(\sigma_j;\xi)\times \\ \times\theta_\tau^{\sigma_j}(\xi)d\sigma_j\ldots d\sigma_3 d\sigma_2 d\sigma_1, \qquad \xi\in\mathbb{R}^n, \quad 0\le\tau<t\le T, \qquad (13) \\ l_1+l_2+l_3+\ldots+l_j = k_1 \qquad \text{і} \qquad j\in\mathbb{N}_{k_1} := \{1;2;\ldots;k_1\}.\end{gathered}$$

Враховуючи оцінку (3) і те, що

$$\left|\partial_\xi^l\mathcal{P}(t;\xi)\right| \le c_0 l!\left(\begin{cases}\big(1+\|\xi\|\big)^{p-|l|}, & p\ge|l|,\\ 0, & p<|l|\end{cases}\right), \qquad l\in\mathbb{Z}_+^n, \quad (t;\xi)\in\Pi_{[0;T]}, \tag{14}$$

знаходимо

$$\left|\partial_{\xi_1}^{k_1}\theta_\tau^t(\xi)\right| \le \sum_{l_1=1}^{\widehat{k_1}} C_{k_1}^{l_1}\int_\tau^t c\big(1+\|\xi\|\big)^\gamma e^{-\delta(t-\sigma_1)\|\xi\|^h} c_0 l_1!\left(\begin{cases}\big(1+\|\xi\|\big)^{p-l_1}, & p\ge l_1,\\ 0, & p<l_1\end{cases}\right)\times$$

$$\times\sum_{l_2=1}^{\widehat{k_1-l_1}} C_{k_1-l_1}^{l_2}\int\limits_{\tau}^{\sigma_1} c\big(1+\|\xi\|\big)^{\gamma}e^{-\delta(\sigma_1-\sigma_2)\|\xi\|^h}c_0l_2!\left(\begin{cases}\big(1+\|\xi\|\big)^{p-l_2}, & p\ge l_2,\\ 0, & p<l_2\end{cases}\right)\times$$

$$\times\sum_{l_3=1}^{k_1\widehat{-l_1-}l_2} C_{k_1-l_1-l_2}^{l_3}\int\limits_{\tau}^{\sigma_2} c\big(1+\|\xi\|\big)^{\gamma}e^{-\delta(\sigma_2-\sigma_3)\|\xi\|^h}c_0l_3!\left(\begin{cases}\big(1+\|\xi\|\big)^{p-l_3}, & p\ge l_3,\\ 0, & p<l_3\end{cases}\right)\times\ldots$$

$$\ldots\times\sum_{l_j=1}^{1} C_{1}^{l_j}\int\limits_{\tau}^{\sigma_{j-1}} c\big(1+\|\xi\|\big)^{\gamma}e^{-\delta(\sigma_{j-1}-\sigma_j)\|\xi\|^h}c_0l_j!\left(\begin{cases}\big(1+\|\xi\|\big)^{p-l_j}, & p\ge l_j,\\ 0, & p<l_j\end{cases}\right)\times$$

$$\times c\big(1+\|\xi\|\big)^{\gamma}e^{-\delta(\sigma_j-\tau)\|\xi\|^h}d\sigma_j\ldots d\sigma_3d\sigma_2d\sigma_1=$$

$$=ck_1!e^{-\delta(t-\tau)\|\xi\|^h}\sum_{l_1=1}^{\widehat{k_1}}C_{k_1}^{l_1}\sum_{l_2=1}^{\widehat{k_1-l_1}}C_{k_1-l_1}^{l_2}\ldots\sum_{l_j=1}^{1}C_1^{l_j}\times$$

$$\times(cc_0)^j\frac{(t-\tau)^j}{j!}\left(\begin{cases}\big(1+\|\xi\|\big)^{(\gamma+p)j+\gamma-k_1}, & pj\ge k_1,\\ 0, & pj<k_1\end{cases}\right),\qquad k_1\in\mathbb{N},\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\quad 0\le\tau<t\le T,$$

де

$$\widehat{\zeta}:=\begin{cases}p, & \zeta\ge p,\\ \zeta, & \zeta<p,\end{cases}\qquad \zeta\in\mathbb{N}.$$

Зважаючи тепер на нерівність

$$\frac{(t-\tau)^j}{j!}e^{-\delta_0(t-\tau)\|\xi\|^h}\le\left(\frac{2^h}{\delta_0}\right)^j e^{\delta_0T2^h}\big(1+\|\xi\|\big)^{-jh},\qquad j\in\mathbb{N},\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\quad 0\le\tau<t\le T, \tag{15}$$

отримуємо оцінку

$$|\partial_{\xi_1}^{k_1}\theta_\tau^t(\xi)|\le c_1B_1^{k_1}k_1!\big(1+\|\xi\|\big)^{\alpha k_1+\gamma}e^{-\delta_1(t-\tau)\|\xi\|^h},\qquad k_1\in\mathbb{N},\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\quad 0\le\tau<t\le T, \tag{16}$$

з додатними величинами c_1, B_1 і δ_1, що не залежать від t, τ, k_1 і ξ.

Таким чином, для завершення обґрунтування правильності оцінки (12) при зазначеному k із $\mathbb{Z}_+^n$ необхідно довести виконання нерівності (15). Для цього розглянемо спочатку $\xi\in\mathbb{R}^n$ таке, що $\|\xi\|<1$, тоді

$$\frac{(t-\tau)^j}{j!}e^{-\delta_0(t-\tau)\|\xi\|^h}=\frac{(t-\tau)^j}{j!e^{\delta_0(t-\tau)\left(1+\|\xi\|\right)^h}}e^{\delta_0(t-\tau)\left(\left(1+\|\xi\|\right)^h-\|\xi\|^h\right)}\le e^{\delta_0T2^h}\frac{(t-\tau)^j}{j!e^{\delta_0(t-\tau)\left(1+\|\xi\|\right)^h}}=$$

$$=e^{\delta_0T2^h}\frac{(t-\tau)^j}{j!\left(1+\dfrac{\delta_0(t-\tau)\big(1+\|\xi\|\big)^h}{1!}+\ldots+\dfrac{(\delta_0(t-\tau)\big(1+\|\xi\|\big)^h)^j}{j!}+\ldots\right)}\le$$

$$\le e^{\delta_0T2^h}\frac{(t-\tau)^j}{j!\dfrac{(\delta_0(t-\tau)\big(1+\|\xi\|\big)^h)^j}{j!}}\equiv\left(\frac{1}{\delta_0}\right)^j e^{\delta_0T2^h}\big(1+\|\xi\|\big)^{-jh},$$

$$j \in \mathbb{N}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \le \tau < t \le T.$$

Якщо $\|\xi\| \ge 1$, то

$$1 - \frac{1}{1+\|\xi\|} \ge \frac{1}{2}.$$

У цьому випадку

$$\frac{(t-\tau)^j}{j!} e^{-\delta_0(t-\tau)\|\xi\|^h} = \frac{(t-\tau)^j}{j!} \exp\left\{-\delta_0(t-\tau)\big(1+\|\xi\|\big)^h \left(1 - \frac{1}{1+\|\xi\|}\right)^h\right\} \le$$

$$\le \frac{(t-\tau)^j}{j!\dfrac{\big(\delta_0(t-\tau)((1+\|\xi\|)/2)^h\big)^j}{j!}} =$$

$$= \frac{(t-\tau)^j}{j!\left(1 + \dfrac{\delta_0(t-\tau)((1+\|\xi\|)/2)^h}{1!} + \ldots + \dfrac{(\delta_0(t-\tau)((1+\|\xi\|)/2)^h)^j}{j!} + \ldots\right)} \le$$

$$\le \frac{(t-\tau)^j}{j!\dfrac{\big(\delta_0(t-\tau)((1+\|\xi\|)/2)^h\big)^j}{j!}} \equiv \left(\frac{2^h}{\delta_0}\right)^j \big(1+\|\xi\|\big)^{-jh}, \qquad j \in \mathbb{N}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \le \tau < t \le T.$$

Звідси приходимо до оцінки (15).

Нехай тепер $k \in \mathbb{Z}_+^n$ таке, що $k_1 \ne 0$ і $k_2 \ne 0$, а $k_j = 0$, $j \overline{\in} \mathbb{N}_2$. Припустимо, що виконується співвідношення $k_1 \ge k_2$ $\big($випадок $k_2 \ge k_1$ реалізується аналогічно з використанням рівності $\partial_\xi^k \theta_\tau^t(\xi) = \partial_{\xi_1}^{k_1}\big(\partial_{\xi_2}^{k_2}\theta_\tau^t(\xi)\big)\big)$. Тоді з огляду на (13) і (14) одержуємо

$$\partial_\xi^k \theta_\tau^t(\xi) = \partial_{\xi_2}^{k_2}(\partial_{\xi_1}^{k_1}\theta_\tau^t(\xi)) = \sum_{l_{11}=1}^{\widehat{k_1}} C_{k_1}^{l_{11}} \sum_{\mu_1=0}^{k_2} C_{k_2}^{\mu_1} \int_\tau^t \partial_{\xi_2}^{k_2-\mu_1}\theta_{\sigma_1}^t(\xi) \sum_{l_{21}=0}^{\widehat{\mu_1}} C_{\mu_1}^{l_{21}} \big(\partial_{\xi_1}^{l_{11}}\partial_{\xi_2}^{l_{21}}\mathcal{P}(\sigma_1;\xi)\big)\times$$

$$\times \sum_{l_{12}=1}^{\widehat{k_1-l_{11}}} C_{k_1-l_{11}}^{l_{12}} \sum_{\mu_2=0}^{\mu_1-l_{21}} C_{\mu_1-l_{21}}^{\mu_2} \int_\tau^{\sigma_1} \partial_{\xi_2}^{\mu_1-l_{21}-\mu_2}\theta_{\sigma_2}^{\sigma_1}(\xi) \sum_{l_{22}=0}^{\widehat{\mu_2}} C_{\mu_2}^{l_{22}} \big(\partial_{\xi_1}^{l_{12}}\partial_{\xi_2}^{l_{22}}\mathcal{P}(\sigma_2;\xi)\big)\times$$

$$\times \sum_{l_{13}=1}^{k_1-\widehat{l_{11}-l_{12}}} C_{k_1-l_{11}-l_{12}}^{l_{13}} \sum_{\mu_3=0}^{\mu_2-l_{22}} C_{\mu_2-l_{22}}^{\mu_3} \int_\tau^{\sigma_2} \partial_{\xi_2}^{\mu_2-l_{22}-\mu_3}\theta_{\sigma_3}^{\sigma_2}(\xi) \sum_{l_{23}=0}^{\widehat{\mu_3}} C_{\mu_3}^{l_{23}} \big(\partial_{\xi_1}^{l_{13}}\partial_{\xi_2}^{l_{23}}\mathcal{P}(\sigma_3;\xi)\big) \times \ldots$$

$$\ldots \times \sum_{l_{1j}=1}^{1} C_1^{l_{1j}} \sum_{\mu_j=0}^{\mu_{j-1}-l_{2j-1}} C_{\mu_{j-1}-l_{2j-1}}^{\mu_j} \int_\tau^{\sigma_{j-1}} \partial_{\xi_2}^{\mu_{j-1}-l_{2j-1}-\mu_j}\theta_{\sigma_j}^{\sigma_{j-1}}(\xi) \sum_{l_{2j}=0}^{\widehat{\mu_j}} C_{\mu_j}^{l_{2j}} \big(\partial_{\xi_1}^{l_{1j}}\partial_{\xi_2}^{l_{2j}}\mathcal{P}(\sigma_j;\xi)\big)\times$$

$$\times \partial_{\xi_2}^{\mu_j-l_{2j}}\theta_\tau^{\sigma_j}(\xi)d\sigma_j \ldots d\sigma_3 d\sigma_2 d\sigma_1, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \le \tau < t \le T,$$

$$l_{11} + l_{12} + l_{13} + \ldots + l_{1j} = k_1, \quad j \in \mathbb{N}_{k_1}.$$

Звідси, використовуючи оцінки (14) – (16), а також лему 2, знаходимо

$$\left|\partial_\xi^k \theta_\tau^t(\xi)\right| \le$$

$$\le \sum_{l_{11}=1}^{\widehat{k_1}} C_{k_1}^{l_{11}} \sum_{\mu_1=0}^{k_2} C_{k_2}^{\mu_1} \sum_{l_{21}=0}^{\widehat{\mu_1}} C_{\mu_1}^{l_{21}} \int_\tau^t c_1 B_1^{k_2-\mu_1}(k_2-\mu_1)!\big(1+\|\xi\|\big)^{\alpha(k_2-\mu_1)+\gamma} e^{-\delta_1(t-\sigma_1)\|\xi\|^h}\times$$

$$\times c_0 l_{11}! l_{21}! \left(\begin{cases}\big(1+\|\xi\|\big)^{p-l_{11}-l_{21}}, & p\ge l_{11}+l_{21},\\ 0, & p<l_{11}+l_{21}\end{cases}\right) \sum_{l_{12}=1}^{\widehat{k_1-l_{11}}} C_{k_1-l_{11}}^{l_{12}} \sum_{\mu_2=0}^{\mu_1-l_{21}} C_{\mu_1-l_{21}}^{\mu_2} \sum_{l_{22}=0}^{\widehat{\mu_2}} C_{\mu_2}^{l_{22}}\times$$

$$\times \int_\tau^{\sigma_1} c_1 B_1^{\mu_1-l_{21}-\mu_2}(\mu_1-l_{21}-\mu_2)!\big(1+\|\xi\|\big)^{\alpha(\mu_1-l_{21}-\mu_2)+\gamma} e^{-\delta_1(\sigma_1-\sigma_2)\|\xi\|^h} c_0 l_{12}! l_{22}!\times$$

$$\times \left(\begin{cases}\big(1+\|\xi\|\big)^{p-l_{12}-l_{22}}, & p\ge l_{12}+l_{22},\\ 0, & p<l_{12}+l_{22}\end{cases}\right) \sum_{l_{13}=1}^{k_1-\widehat{l_{11}-}l_{12}} C_{k_1-l_{11}-l_{12}}^{l_{13}} \sum_{\mu_3=0}^{\mu_2-l_{22}} C_{\mu_2-l_{22}}^{\mu_3} \sum_{l_{23}=0}^{\widehat{\mu_3}} C_{\mu_3}^{l_{23}}\times$$

$$\times \int_\tau^{\sigma_2} c_1 B_1^{\mu_2-l_{22}-\mu_3}(\mu_2-l_{22}-\mu_3)!\big(1+\|\xi\|\big)^{\alpha(\mu_2-l_{22}-\mu_3)+\gamma} e^{-\delta_1(\sigma_2-\sigma_3)\|\xi\|^h} c_0 l_{13}! l_{23}!\times$$

$$\times \left(\begin{cases}\big(1+\|\xi\|\big)^{p-l_{13}-l_{23}}, & p\ge l_{13}+l_{23},\\ 0, & p<l_{13}+l_{23}\end{cases}\right) \times\ldots\times \sum_{l_{1j}=1}^{1} C_1^{l_{1j}} \sum_{\mu_j=0}^{\mu_{j-1}-l_{2j-1}} C_{\mu_{j-1}-l_{2j-1}}^{\mu_j} \sum_{l_{2j}=0}^{\widehat{\mu_j}} C_{\mu_j}^{l_{2j}}\times$$

$$\times \int_\tau^{\sigma_{j-1}} c_1 B_1^{\mu_{j-1}-l_{2j-1}-\mu_j}(\mu_{j-1}-l_{2j-1}-\mu_j)!\big(1+\|\xi\|\big)^{\alpha(\mu_{j-1}-l_{2j-1}-\mu_j)+\gamma}\times$$

$$\times e^{-\delta_1(\sigma_{j-1}-\sigma_j)\|\xi\|^h} c_0 l_{1j}! l_{2j}! \left(\begin{cases}\big(1+\|\xi\|\big)^{p-l_{1j}-l_{2j}}, & p\ge l_{1j}+l_{2j},\\ 0, & p<l_{1j}+l_{2j}\end{cases}\right)\times$$

$$\times c_1 B_1^{\mu_j-l_{2j}}(\mu_j-l_{2j})!\big(1+\|\xi\|\big)^{\alpha(\mu_j-l_{2j})+\gamma} e^{-\delta_1(\sigma_j-\tau)\|\xi\|^h}\times$$

$$\times d\sigma_j\ldots d\sigma_3 d\sigma_2 d\sigma_1 = c_1 B_1^{k_2} e^{-\delta_1(t-\tau)\|\xi\|^h} \sum_{l_{11}=1}^{\widehat{k_1}} C_{k_1}^{l_{11}} \sum_{\mu_1=0}^{k_2} C_{k_2}^{\mu_1} \sum_{l_{21}=0}^{\widehat{\mu_1}} C_{\mu_1}^{l_{21}}\times$$

$$\times \sum_{l_{12}=1}^{\widehat{k_1-l_{11}}} C_{k_1-l_{11}}^{l_{12}} \sum_{\mu_2=0}^{\mu_1-l_{21}} C_{\mu_1-l_{21}}^{\mu_2} \sum_{l_{22}=0}^{\widehat{\mu_2}} C_{\mu_2}^{l_{22}} \ldots \sum_{l_{1j}=1}^{1} C_1^{l_{1j}} \sum_{\mu_j=0}^{\mu_{j-1}-l_{2j-1}} C_{\mu_{j-1}-l_{2j-1}}^{\mu_j} \sum_{l_{2j}=0}^{\widehat{\mu_j}} C_{\mu_j}^{l_{2j}}\times$$

$$\times\big((k_2-\mu_1)!(\mu_1-l_{21}-\mu_2)!\ldots(\mu_{j-1}-l_{2j-1}-\mu_j)!(\mu_j-l_2)! l_{21}! l_{22}!\ldots l_{2j}!\big)(l_{11}! l_{12}!\ldots l_{1j}!)(c_0c_1)^j\times$$

$$\times \frac{(t-\tau)^j}{j!} \left(\begin{cases}\big(1+\|\xi\|\big)^{\alpha(k_2-l_{21}-\ldots-l_{2j})+(\gamma+p)j+\gamma-k_1-l_{21}-\ldots-l_{2j}}, & jp\ge k_1+l_{21}+\ldots+l_{2j},\\ 0, & jp<k_1+l_{21}+\ldots+l_{2j}\end{cases}\right) =$$

$$= c_1 B_1^{k_2} k_1! k_2! \big(1+\|\xi\|\big)^{\alpha(k_1+k_2)+\gamma} e^{-\delta_1(t-\tau)\|\xi\|^h} \sum_{l_{11}=1}^{\widehat{k_1}} \sum_{l_{12}=1}^{\widehat{k_1-l_{11}}} \ldots \sum_{l_{1j}=1}^{1} \times$$

$$\times \left(\sum_{\mu_1=0}^{k_2} \sum_{l_{21}=0}^{\widehat{\mu_1}} \sum_{\mu_2=0}^{\mu_1-l_{21}} \sum_{l_{22}=0}^{\widehat{\mu_2}} \ldots \sum_{\mu_j=0}^{\mu_{j-1}-l_{2j-1}} \sum_{l_{2j}=0}^{\widehat{\mu_j}} (c_0c_1)^j \frac{(t-\tau)^j}{j!} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\begin{cases} \big(1+\|\xi\|\big)^{(\gamma+p)j-(p-h)m(k_1+l_{21}+..+l_{2j})}, & jp \geq k_1+l_{21}+\ldots+l_{2j}, \\ 0, & jp < k_1+l_{21}+\ldots+l_{2j} \end{cases} \right) \right) \leq$$

$$\leq c_1 e^{\delta_1 T 2^{h-1}} \big(c_0c_1(4/\delta_1)^h\big)^{k_1} B_1^{k_2} k! \big(1+\|\xi\|\big)^{\alpha|k|+\gamma} e^{-\frac{\delta_1}{2}(t-\tau)\|\xi\|^h} \times$$

$$\times \sum_{l_{11}=1}^{\widehat{k_1}} \sum_{l_{12}=1}^{\widehat{k_1-l_{11}}} \ldots \sum_{l_{1j}=1}^{1} \left(\sum_{\mu_1=0}^{k_2} \sum_{\mu_2=0}^{\mu_1} \ldots \sum_{\mu_j=0}^{\mu_{j-1}} \left(\sum_{l_{21}=0}^{p} \sum_{l_{22}=0}^{p} \ldots \sum_{l_{2j}=0}^{p} (c_0c_1)^j \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(\begin{cases} \big(1+\|\xi\|\big)^{-(p-h)m(k_1-j+l_{21}+..+l_{2j})}, & jp \geq k_1+l_{21}+\ldots+l_{2j}, \\ 0, & jp < k_1+l_{21}+\ldots+l_{2j} \end{cases} \right) \right) \right) \leq$$

$$\leq c_1 e^{\delta_1 T 2^{h-1}} \big(c_0c_1(p+1)(4/\delta_1)^h\big)^{k_1} B_1^{k_2} k! \big(1+\|\xi\|\big)^{\alpha|k|+\gamma} e^{-\frac{\delta_1}{2}(t-\tau)\|\xi\|^h} \times$$

$$\times \sum_{l_{11}=1}^{\widehat{k_1}} \sum_{l_{12}=1}^{\widehat{k_1-l_{11}}} \ldots \sum_{l_{1j}=1}^{1} \frac{(k_2+j)^j}{j!}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq \tau < t \leq T.$$

Далі, оцінимо величину

$$S(k) := \sum_{l_{11}=1}^{\widehat{k_1}} \sum_{l_{12}=1}^{\widehat{k_1-l_{11}}} \ldots \sum_{l_{1j}=1}^{1} \frac{(k_2+j)^j}{j!}.$$

Оскільки $j \in \mathbb{N}_{k_1}$, то $j = qk_1$ при $q \in (0;1]$, тоді

$$\frac{(k_2+j)^j}{j!} \leq \frac{(k_1+j)^j}{j!} = \frac{(qk_1)^{qk_1}}{(qk_1)!} \left(\left(1+\frac{1}{q} \right)^q \right)^{k_1}, \quad q \in (0;1]$$

(тут ми врахували співвідношення $k_1 \geq k_2$). Використовуючи тепер відому формулу Стірлінга, згідно з якою

$$\frac{j^j}{j!} \leq \frac{e^j}{\sqrt{2\pi}},$$

а також нерівність

$$\left(1+\frac{1}{q}\right)^q \leq 2, \quad q \in (0;1],$$

одержуємо

$$S(k) \leq \frac{(2e)^{k_1}}{\sqrt{2\pi}} \left(\sum_{l=1}^{p} 1 \right)^{k_1} = \frac{(2pe)^{k_1}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Отже, існують додатні сталі $c,$ B і δ такі, що для всіх мультиіндексів $k \in \mathbb{Z}_+^n$, у яких лише дві компоненти відмінні від нуля, та всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t \in (\tau; T]$ і $\tau \in [0; T)$ виконується оцінка (12).

Продовжуючи згідно з індукцією процес оцінювання, переконуємось у виконанні оцінки (12) для всіх $k \in \mathbb{Z}_+^n$.

Теорему доведено.

Маючи оцінки (12) похідних матриціанта $\theta_\tau^t(\cdot)$, можемо оцінити похідні ФРЗК $G(t, \tau; \cdot)$. Для цього скористаємось очевидною рівністю

$$(ix)^q \partial_x^k G(t, \tau; x) = \frac{(-i)^{|k|}}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_\xi^q \big(\xi^k \theta_\tau^t(\xi)\big) e^{-i(x,\xi)} d\xi,$$

яка виконується для всіх $\{q, k\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ і $0 \leq \tau < t \leq T$.

Оскільки

$$\big|\partial_\xi^q(\xi^k \theta_\tau^t(\xi))\big| \leq \sum_{l=0}^{q} C_q^l |\partial_\xi^l \xi^k| |\partial_\xi^{q-l} \theta_\tau^t(\xi)| \leq c 2^{|k|} e^{-\delta(t-\tau)\|\xi\|^h} \sum_{l=0}^{q} C_q^l l! \|\xi\|^{|k-l|} B^{|q-l|} (q-l)! \times$$

$$\times \big(1 + \|\xi\|\big)^{\alpha|q-l|+\gamma} \leq c_0 (t-\tau)^{-\frac{\alpha|q|+|k|+\gamma}{h}} A_0^{|k|} B_0^{|q|} e^{-\frac{\delta}{2}(t-\tau)\|\xi\|^h} \sum_{l=0}^{q} C_q^l l! (q-l)! \times$$

$$\times \sup_{y>0} \left\{ y^{\frac{\alpha|q-l|+|k-l|+\gamma}{h}} e^{-y} \right\} \leq c_1 (t-\tau)^{-\frac{\alpha|q|+|k|+\gamma}{h}} A_1^{|k|} B_1^{|q|} |k|^{\frac{1}{h}|k|} |q|^{(1+\frac{\alpha}{h})|q|} e^{-\frac{\delta}{2}(t-\tau)\|\xi\|^h},$$

то

$$\big|x^q \partial_x^k G(t, \tau; x)\big| \leq$$

$$\leq c_2 (t-\tau)^{-\frac{n+\alpha|q|+|k|+\gamma}{h}} A_2^{|k|} B_2^{|q|} |k|^{\frac{1}{h}|k|} |q|^{(1+\frac{\alpha}{h})|q|}, \qquad \{q, k\} \subset \mathbb{Z}_+^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq \tau < t \leq T$$

(тут оціночні величини не залежать від $k,$ $q,$ $t,$ τ і x).

Звідси знаходимо

$$\big|\partial_x^k G(t, \tau; x)\big| \leq c_2 (t-\tau)^{-\frac{n+|k|+\gamma}{h}} A_2^{|k|} |k|^{\frac{1}{h}|k|} \inf_{|q|>0} \left\{ B_2^{|q|} |q|^{(1+\frac{\alpha}{h})|q|} \big((t-\tau)^{\frac{\alpha}{h}} \|x\|\big)^{-|q|} \right\} \leq$$

$$\leq c_3 (t-\tau)^{-\frac{n+|k|+\gamma}{h}} A_3^{|k|} |k|^{\frac{1}{h}|k|} e^{-\delta_3 \left((t-\tau)^{\alpha/h}\|\xi\|\right)^{\frac{1}{1+\alpha/h}}}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq \tau < t \leq T,$$

де сталі $c_3,$ A_3 і δ_3 не залежать від $k,$ $t,$ τ і $x.$

Отже, правильним є таке твердження.

Теорема 2. *Нехай система* (1) *порядку* p *із* m *рівнянь є параболічною за Шиловим з показником параболічності* h *та неперервними коефіцієнтами. Тоді*

$$\exists \{c, A, \delta\} \subset (0; +\infty)\, \forall k \in \mathbb{Z}_+^n\, \forall \tau \in [0; T)\, \forall t \in (\tau; T]\, \forall \xi \in \mathbb{R}^n:$$

$$\big|\partial_x^k G(t, \tau; x)\big| \leq c (t-\tau)^{-\frac{n+|k|+\gamma}{h}} A^{|k|} |k|^{\frac{1}{h}|k|} e^{-\delta\left((t-\tau)^{\alpha/h}\|\xi\|\right)^{\frac{1}{1+\alpha/h}}}, \tag{17}$$

$$\alpha := (p-h)m - 1, \qquad \gamma = (p-h)(m-1).$$

Насамкінець зазначимо, що у випадку, коли система (1) є параболічною за Петровським із $p = h = 2b,\ b \in \mathbb{N}$, відповідна оцінка (17) набирає вигляду

$$\left|\partial_x^k G(t,\tau;x)\right| \le c(t-\tau)^{-\frac{n+|k|}{2b}} A^{|k|} |k|^{\frac{1}{2b}|k|} e^{-\delta\left(\frac{\|\xi\|}{(t-\tau)^{1/2b}}\right)^{\frac{1}{1-1/2b}}}.$$

Ця оцінка збігається з оцінкою, одержаною, наприклад, в [4, 9] методом теорем типу Фрагмена – Ліндельофа для систем із родом $\mu = 1$. Крім цього, якщо рівняння (1) скалярне, тобто $m = 1$, то оцінка (12) така ж, як у [6] чи [10], яка встановлена там за допомогою формули Фаа де Бруно диференціювання складених функцій.

Література

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.
2. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
3. *Борок В. М.* Об одном характеристическом свойстве параболических систем // Докл. АН СССР. – 1956. – **110**, № 6. – С. 903 – 905.
4. *Житомирский Я. И.* Задача Коши для некоторых типов параболических по Г. Е. Шилову систем линейных уравнений в частных производных с непрерывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1959. – **23**. – С. 925 – 932.
5. *Городецкий В. В., Житарюк И. В.* О скорости локализации решений задачи Коши для уравнений параболического типа с вырождением // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 4. – С. 697 – 699.
6. *Litovchenko V. A.* The cauchy problem for Shilov parabolic equations // Sib. Math. J. – 2004. – **45**, № 4. – P. 669 – 679.
7. *Дворянинов С. В., Сильванович М. И.* О формуле Фаа ди Бруно для производных сложной функции // Мат. образование. – 2009. – **49**, № 1. – С. 22 – 26.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – 5-е изд. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.
9. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
10. *Litovchenko V. A.* Cauchy problem for $\{\vec{p};\vec{h}\}$-parabolic equations with time-dependent coefficients // Math. Notes. – 2005. – **77**, № 3-4. – P. 364 – 379.

Одержано 17.09.17